اصلاح مدل اجزاء محدود به روش تابع پاسخ (RFM)

• محمد رضا آشوری[۱]
• حمید دائیان[۲]
• احسان جمشیدی[۳]

فهرست نمادها و نشانه‌ها

$[\ ]^{-1}$: معکوس ماتریس	$[\alpha]$: ماتریس Receptance
$[\ ]^{T}$: ماتریس ترانهاده	$[\omega^2]$: ماتریس مقادیر ویژه
$[\ ]_a$: ماتریس بدست آمده از تحلیل	$[\varphi_A]$: شکل مد بدست آمده از تحلیل
$[\ ]_x$: ماتریس بدست آمده از آزمایش	$[\varphi_x]$: شکل مد بدست آمده از تست مودال
[K] : ماتریس سختی	{}: بردار
[M] : ماتریس جرم	
MAC : Modal Assurance Criterion	DOF : Degree of Freedom
COMAC : Coordinate Modal assurance Criterion	FEM : Finite Element Method
RFM : Response Function Method	EMM : Error Matrix Method
SVD : Singular value Decomposition	FRF: Frequency Response Function

چکیده

امروزه به دلیل پیچیده شدن طراحی‌ها، بررسی رفتار سازه‌های دینامیکی به کمک اجزاء محدود، بسیار مورد توجه قرار گرفته اســت و با ظهور کامپیوترهای قدرتمند، اســتفاده از این روش‌ها توسط طراحان با شتاب بیشتری صورت می‌گیرد. روش دیگر دست‌یابی به یک مدل دینامیکی برای سازه‌های مکانیکی، ساختن مدل آزمایشگاهی برای سازه با انجام تست‌های ارتعاشی و تحلیل داده‌های اندازه‌گیری شده است. به این فرایند در اصطلاح تست مودال (Modal Testing) می‌گویند که در طی سه دهه گذشــته در تئوری و عمل توســعه بسیاری یافته اســت. یکی از مهم‌ترین کاربردهای تست مودال، بهبود مدل‌های عددی سیستم‌های دینامیکی با مقایسه پارامترهای مودال حاصل از نتایج تست مودال و مدل‌های عددی می‌باشد. پس از بهبود مدل عددی، می‌توان با اطمینان از آن در تحلیل‌های بعدی مانند پیش‌بینی پاسخ به یک نیروی وارده بر سازه، کوپلینگ سازه‌ها، تحلیل تنش و غیره استفاده کرد. در این مقاله مزایا، معایب و محدودیت‌های یکی از روش‌های امروزی بهبود مدل دینامیکی سازه‌ها به نام روش تابع پاسخ (Response Function Method) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین برای درک بهتر روش یک مدل ۵ درجه آزادی جرم و فنر توسط نرم افزار MATLAB مدل گردیده است.

واژه‌های کلیدی: بهبود مدل اجزاء محدود، آنالیز مودال، ماتریس جرم، ماتریس سختی، ماتریس خطا، SVD و Receptance.

۱. – استادیار گروه مکانیک دانشگاه سمنان و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان
۲. – دانشجوی دکتری مکانیک دانشگاه اسلو، نروژ
۳. – دانشجوی دکتری مکانیک–طراحی کاربردی دانشگاه سمنان و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان

۱- مقدمه

تحلیل دینامیکی سازه‌ها دارای اهمیت بسزائی است و امروزه در طراحی و ساخت کلیه سازه‌های مهندسی تحلیل دینامیکی نقـش مهم و کاربردی دارد. اما به جهت در دســترس نبودن جواب تحلیلی برای سازه‌های پیچیده با بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلــف، مدل‌های تقریبی عددی ماننــد روش اجزاء محدود[4]، روش تفاضل محدود[5] و روش المان‌های مرزی[6] ارائه و استفاده می‌گردد.

از میان روش‌هــای فوق ، روش اجزاء محــدود امروزه کاربرد وسیعی در تحلیل‌های دینامیکی و استاتیکی سازه‌ها دارد. به طوری‌که نرم‌افزارهای متعددی در زمینه‌های مختلف کاربرد روش اجزاء محدود ارائه شده است. اما به علت خطاهای مدل کردن از جمله عدم اطلاع دقیق از رفتار سازه، عدم مدل کردن صحیح شــرایط مرزی مدل‌های عددی همــواره دارای خطا می‌باشند. یکی از روش‌های بررسی اعتبار مدل اجزاء محدود سازه، انجام تســت دینامیکی آن اســت. یعنی فرکانس‌های طبیعی و مودهای نوســانی به دســت آمده از آزمایش آنالیز مــودال باید انطباق قابل قبولی با مدل اجزاء محدود داشــته باشد. در سازه‌های پیچیده اعتبار مدل اجزاء محدود باید حتماً مورد بررســی قرار گیرد. زیرا مدل عــددی در این‌گونه موارد معمولا دارای خطای بزرگی می‌باشد. در چنین مواردی اولین قدم اصلاح مدل دینامیکی است به چنین روش‌هایی اصطلاحاً اصلاح یا بهبود مدل[7] گویند.

روش‌های متداول بهبود مدل عبارتند از [۱]:

Direct Matrix Updating Method (DMU)
Error Matrix Method (EMM)
Eigendynamic Constraint Method(ECM)
Inverse Eigensensitivity Method (IES)
Response Function Method (RFM)

۲- دیدگاه کلی بر روشهای بهبود مدل

یکی از روشهای ساده بررسی صحت مدل اجزاء محدود مقایسه پارامترهای دینامیکی (فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نوســانی) حاصل از روش اجزاء محدود با فرکانس‌ها طبیعی و مودهای نوسانی به دســت آمده از تست مودال می‌باشد. اگر این نتایج از انطباق قابل قبولی برخوردار باشــند، مدل عددی ساخته شده مناسب بوده و می توان در مراحل دیگر آنالیز از آن با اطمینان اســتفاده کرد. اما در مورد سازه‌های پیچیده و سازه‌هایی که در آنها رفتار غیرخطی وجود دارد، این نتایج نه تنها با یکدیگر انطباق ندارند بلکه تفاوت‌های فاحشی نیز دارند به نحوی که از نتایج مدل عددی در عمل نمی‌توان اســتفاده

4. Finite Element Method (FEM)
5. Finite Difference Method (FDM)
6. Boundary Element Method (BEM)
7. Model Updating

کرد. در این موارد دو راه حل وجود دارد:
یکی ســاختن مجدد مدل عددی بــا فرضیات جدید دیگر و راه‌حـل دوم که در این مقاله مد نظر ماســت، تصحیح مدل اجزاء محدود موجود با توجه به نتایج آزمایشــگاهی می‌باشد. در آنالیزهای امروزی بیشترین تلاش و سرمایه گذاری بر روی بهبود بخشــیدن مدل‌های کامپیوتری است. هدف از این کار، پیشــگویی صحیح‌تر پارامترهای دینامیکی سیستم است که متعاقب آن طراحی بهینه‌ای انجام می‌شود.

۳- بهبود مدل با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی

روشی که به بررسی آن می‌پردازیم بهبود مدل اجزاء محدود با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی است، که به اختصار به روش RFM موســوم است. این روش در سال‌های اخیر ارائه شده و کاربرد و قابلیت فراوان دارد.

اطلاعات لازم برای استفاده از این روش به شرح زیر است:
۱) ماتریس‌های ســختی ، جرمی و دمپینگ حاصل از اجزاء محدود
۲) اطلاعات FRF حاصل از تست دینامیکی

از قابلیت‌های این روش، عدم نیاز به تکنیک‌های فشرده‌سازی ماتریس‌های جرم و ســختی می‌باشــد. در ایــن روش با یک الگوریتم تکرار می‌توانیــم در حالاتی که تعداد درجات آزادی مدل عددی و مدل آزمایشگاهی یکسان نیست نیز به تصحیح مدل FEM بپردازیم.

در این روش برای حل دستگاه معادلات خطی به دست آوردن ضرایب تصحیح هر المان از الگوریتم SVD استفاده می‌کنیم. ایــن الگوریتم برای حل دســتگاه معادلات تکین و دســتگاه معادلاتی که تعداد مجهولات کمتر از معادلات است، مناسب می‌باشد.

اســاس روش بهبود مدل با اســتفاده از نتایــج FRF معادله ریاضی زیر است[۲].

(۱)
$$[[A]+[B]]^{-1}=[A]^{-1}+[[A]+[B]]^{-1}[B][A]^{-1}$$

که در معادله فوق ماتریس $[A]$ و $([A]+[B])$ معکوس پذیر هستند.

حال در رابطه (۱) فرض می‌کنیم $[A]$ ماتریس ســختی دینامیکی، $[Za(\omega)]$ و $([A]+[B])$ ماتریس سختی دینامیکی مدل آزمایشگاهی $[Zx(\omega)]$ باشند در این صورت معادله (۱) به صورت زیر خواهد شد:

(۲)
$$[Z_x(\omega)]^{-1}=[Z_a(\omega)]^{-1}-[Z_x(\omega)]^{-1}([Z_x(\omega)]-[Z_a(\omega)])[Z_a(\omega)]^{-1}$$

بــا توجه به این‌که $[Z(\omega)][\alpha(\omega)]=[I]$ اســت ، پس نتیجه می‌شود:

$$[Z(\omega)]^{-1}=[\alpha(\omega)] \qquad (۳)$$

با استفاده از رابطه (۳)، رابطه (۲) را دوباره بررسی می‌کنیم.

(۴)
$$-[\alpha_x(\omega)][\Delta Z(\omega)][\alpha_a(\omega)]=[\alpha_x(\omega)]-[\alpha_a(\omega)]=[\Delta\alpha(\omega)]$$

در معادله (۴) $[\Delta Z(\omega)]$ ماتریس خطای امپدانس بوده و به صورت زیر است.

$$[\Delta Z(\omega)]=[Z_x(\omega)]-[Z_a(\omega)]$$

امــا در عمل ماتریس $[\alpha_x(\omega)]$ بطور کامل در آزمایشــگاه به دست نمی‌آید، بلکه ستون i ام آن در هر آزمایش اندازه‌گیری و ثبت می‌شود و به عبارت دیگر، اندازه‌گیری پاسخ سیستم در یک نقطه و تحریک‌ها در نقاط مختلف به سازه اعمال می‌شوند. از این رو همواره ستون (کامل یا ناقص) $\{\alpha_x(\omega)\}_i$ به صورت اطلاعات آزمایشگاهی در دسترس می‌باشد. بنابراین رابطه (۴) با فرض فوق به صورت زیر به دست می‌آید.

(۵)
$$\{\alpha_x(\omega)\}_i^T[\Delta Z(\omega)][\alpha_a(\omega)]=\{\alpha_a(\omega)\}_i^T-\{\alpha_x(\omega)\}_i^T$$

$[\alpha_x(\omega)]$ را می توان بر اساس $[\Delta M]$، $[\Delta K]$ و $[D]$ به صورت زیر نوشت.

(۶)
$$[\Delta Z(\omega)]=-\omega^2[\Delta M]+[\Delta k]+i\omega[D]$$

با جایگزینی معادله (۶) در رابطه (۵) و با ترانسپوزگیری از دو طرف به رابطه نهائی و کاربردی زیر می‌رسیم :

(۷)
$$[\alpha_a(\omega)](-\omega^2[\Delta M]+[\Delta K]+i\omega[D])\{\alpha_x(\omega)\}_i=\{\alpha_x(\omega)\}_i-\{\alpha_x(\omega)\}_i$$

مسأله دیگر در معادله (۷) تعیین پارامترهای $[\Delta M]$، $[\Delta K]$ و $[D]$ است. به منظور حفظ تقارن و پیوستگی مدل عددی سازه بعد از اصلاح ماتریس‌های جرم و سختی و دمپینگ، می‌بایست که خطای مــدل عددی در المان‌هایــی از ماتریس‌های فوق اتفاق افتد که مقادیر آنها مخالف صفر می‌باشد[۳]. با این اصل خطای ماتریس جرمی را می‌توان بصورت Δm_r (r=۱,...,L۱) در نظر گرفت. که در آن L۱ تعداد پارامترهای مستقل طراحی بوده که بطور مثال در سیستم جرم و فنر به جرم‌های مختلف سیســتم اطلاق می‌شود و در مدل‌های اجزاء محدود اشاره به ضرایب ماتریس جرمی هر المــان در مختصات کلی دارد. به همین ترتیب خطای ماتریس سختی به صورت (s=۱,...,L۲) Δk_s و خطــای ماتریس میرائی به صــورت (s=۱,...,L۲) d_s می‌باشد با این فرض معادله (۷) بصورت زیر به دست می‌آید.

(۸)
$$b_j(\omega)=\sum_{r=1}^{L_1}C_m^r(\omega)\Delta m_r+\sum_{S=1}^{L_2}C_k^s(\omega)\Delta k_s+\sum_{S=1}^{L_2}C_d^s(\omega)d_s=\{C_j(\omega)\}^T\{p\}$$

در معادلــه (۸) بــا داشــتن $\{\alpha_x(\omega)\}_i$ و $[\alpha_a(\omega)]$ ماتریــس ضرایب $[C(\omega)]$ قابل محاســبه است و $\{P\}$ بردار مجهول که شامل تغییرات پارامترهای مستقل سیستم می باشد و $b_j(\omega)$ (j=۱,...,N) اختــلاف بین بردارهــای receptance مدل عددی و مدل آزمایشگاهی را نشان می‌دهد.

نهایتــاً رابطه (۴) به صورت یک دســتگاه معادلات جبری به صورت زیر ساده می‌باشد.

(۹)
$$[C(\omega)]\{p\}=\{B(\omega)\}$$

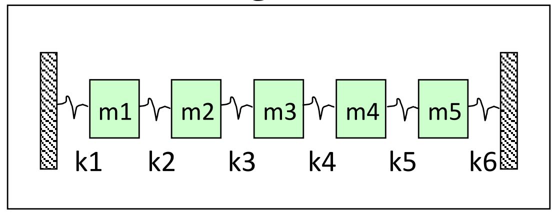
که در آن:

(۱۰)
$$C(\omega)=\begin{bmatrix}\{C_1(\omega)^T\}\\ \{C_2(\omega)\}^T\\ .\\ .\\ .\\ .\\ \{C_N(\omega)^T\}\end{bmatrix}\quad \{P\}=\begin{bmatrix}\Delta m_1\\ \Delta m_2\\ .\\ \Delta m_{l1}\\ \Delta k_1\\ .\\ \Delta k_{l2}\\ d_1\\ .\\ d_{L2}\end{bmatrix}\quad,\quad \{B(\omega)\}=\begin{bmatrix}b_1(\omega)\\ b_2(\omega\\ .\\ .\\ .\\ .\\ B_N(\omega)\end{bmatrix}=[\Delta\alpha(\omega)]$$

در حالتــی که سیســتم دارای دمپینگ باشــد در آن صورت $[C(\omega)]$ و $\{B(\omega)\}$ متغیرهــای مختلط اســت در حالی‌که $\{P\}$ اعــداد حقیقی می‌باشــد. در این حالت برای به دســت آوردن ضرایب مجهول $\{P\}$ دستگاه معادلات را به صورت زیر مرتب می‌کنیم.

(۱۱)
$$\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(C(\omega))\\ \mathrm{Im}(C(\omega))\end{bmatrix}\{P\}=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(B(\omega))\\ \mathrm{Im}(B(\omega))\end{bmatrix}$$

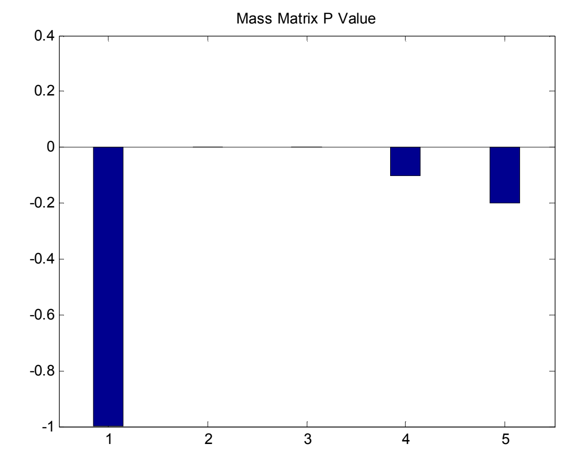
برای درک بهتر روش RFM در این قسمت نتایج اصلاح مدل جرم و فنر ۵ درجه آزادی (شــکل ۱) با خطای مشخص ارائه شده اســت. برای این مقصود برنامه‌ای به زبان MATLAB نوشــته شده که با مشخص کردن تعداد درجات آزادی، جرم، ســختی فنر و خطای در نظر گرفته شــده برای مدل عددی (در این برنامه مقادیر بدســت آمده از تحلیل به عنوان مقادیر آزمایشــگاهی در نظر گرفته می‌شود) به کمک روش RFM خطای مدل عددی را محاسبه می‌کنند.



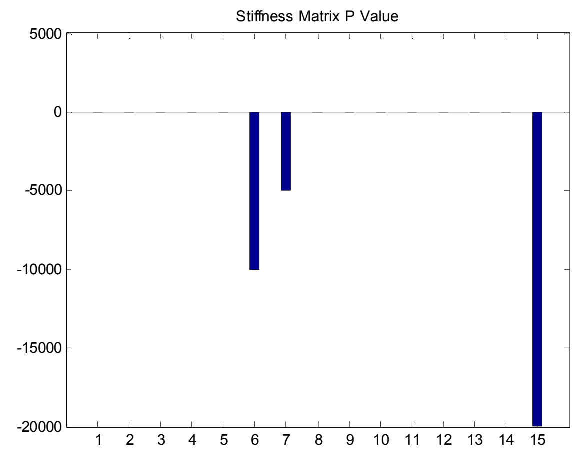
شکل۱- سیستم ۵ درجه آزادی جرم و فنر

با در نظر گرفتن سیستم ۵ درجه آزادی شکل ۱ با مشخصات زیر:

m1= 1.5 Kg
m2=m3=m4=m5= 1Kg
k1=k2=k3=k4=k5=k6= 100000 N/m



شکل۲- مقدار P Value برای ماتریس جرمی



شکل۳- مقدار P Value برای ماتریس سختی

و اعمال خطا:

m1= m1+1, m4= m4+0.1, m5= m5+0.2.
k22=k22+10000,k23=k23+5000,k32= k32+10000,
k66= k66+20000

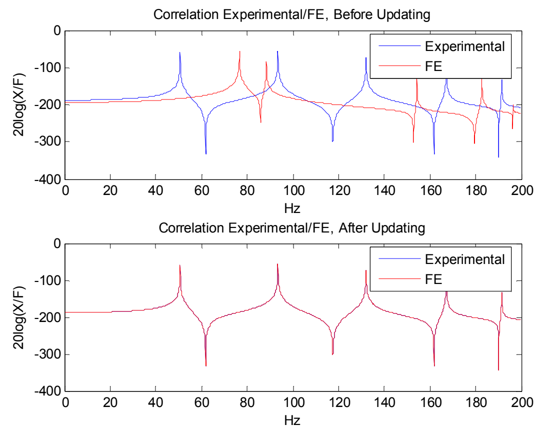
همانطور که مقادیر P-Value بدست آمده در اشکال ۲و ۳ برای ماتریس سختی و جرمی نشان می‌دهد، این روش قادر است مقدار خطا و محل آن را بخوبی تشخیص دهد.

یکی از روش‌های متداول مقایسه مدل عددی و نتایج تست، که نشان دهنده میزان خطای مدل عددی است، معیار MAC است که به صورت زیر تعریف می‌گردد[۴].

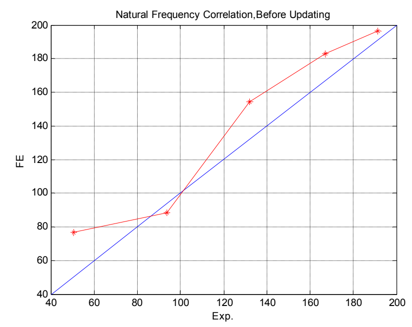
(۱۲)

$$MAC(\phi_{iA},\phi_{jX})=\frac{\left|\{\phi_A\}_i^T\{\phi_X\}_j^*\right|^2}{\{\phi_A\}_i^T\{\phi_A\}_i^*\{\phi_X\}_j^T\{\phi_X\}_j^*}$$

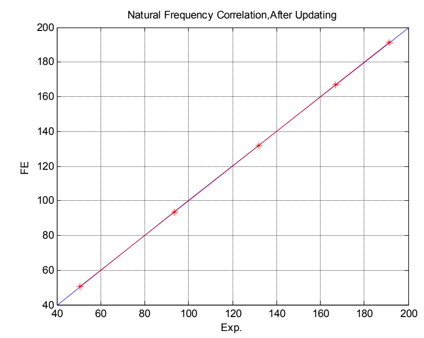
برای مقایسه بهتر α۱۱، فرکانس‌های طبیعی و MAC در



شکل۴- مقایسه α_{11} مدل عددی و تست قبل و بعد از اصلاح مدل عددی



الف



ب

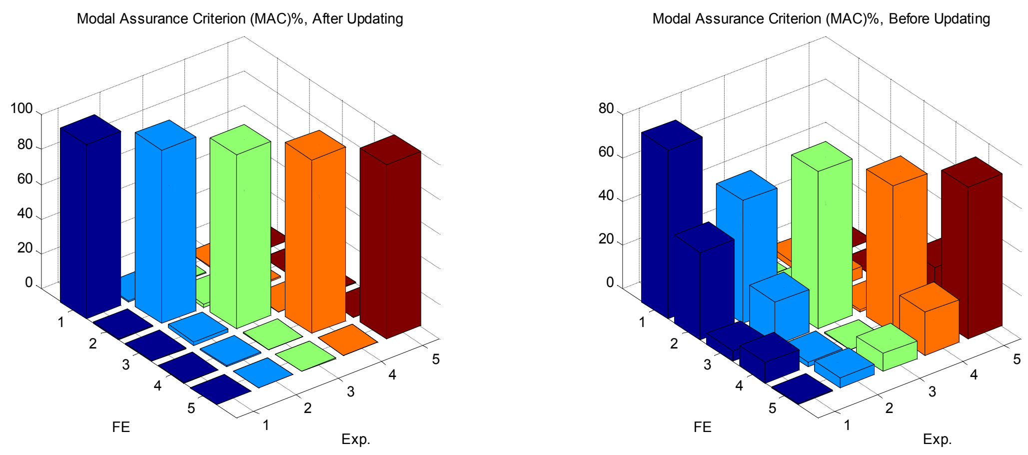
شکل۵ - مقایسه فرکانسهای طبیعی (الف) قبل و (ب) بعد از بهبود مدل

دو حالت قبل و بعد از بروز رسانی در اشکال ۴، ۵ و ۶ رسم گردیدند.

توجه به این موضوع که نتایج تست همواره با نویز می‌باشد، روش فوق برای این حالت نیز بررسی شده‌است. برای این منظور نویز به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۵].

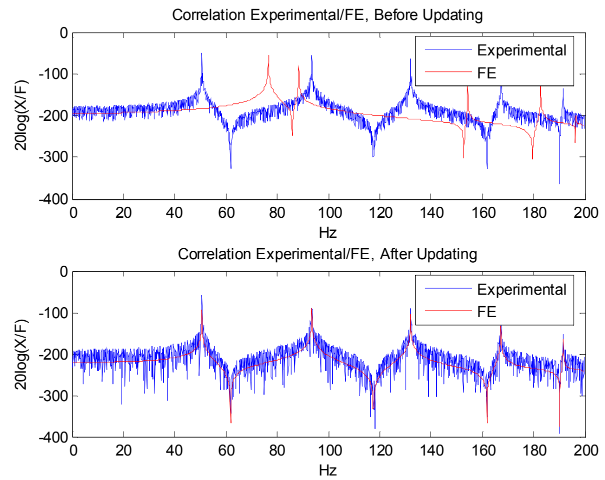
(۱۳)

$$A_{li}=[1+\alpha\times(2\times RAN-1)]\times A_{li}$$

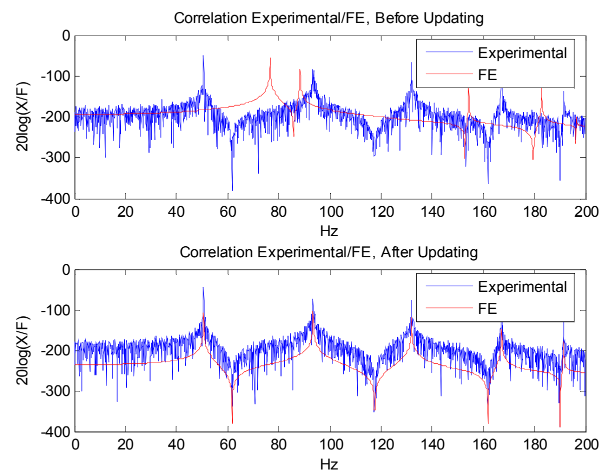


الف ب

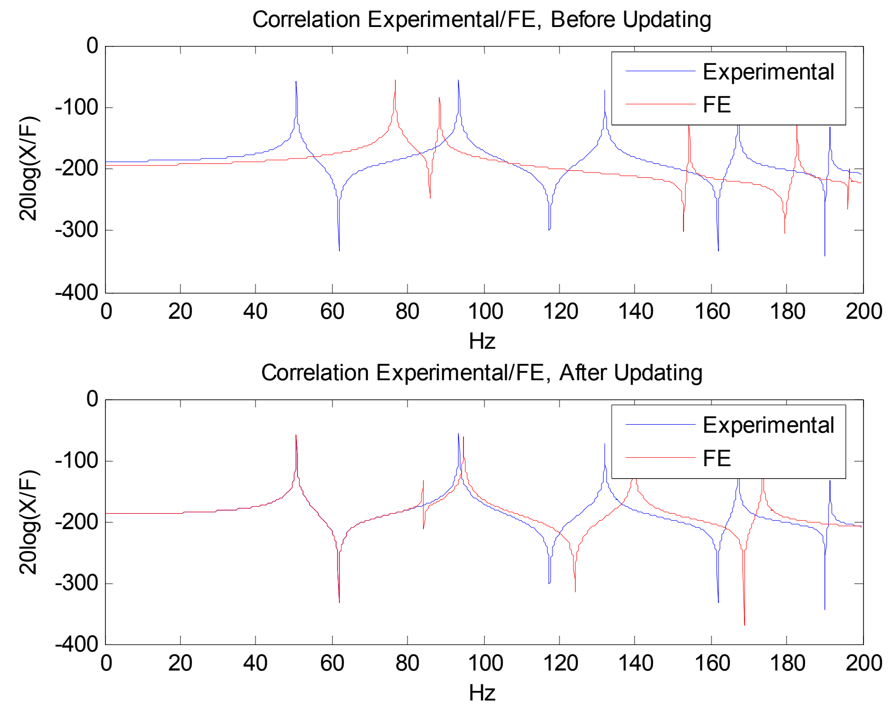
شکل۶ - مقایسه درصدMAC (الف) قبل و (ب) بعد از بهبود مدل



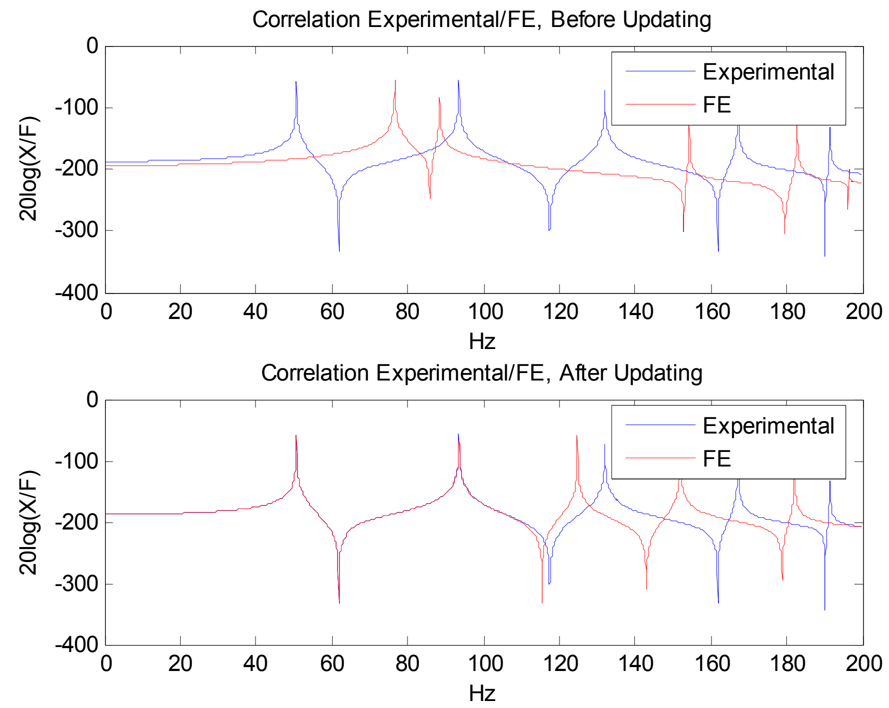
شکل۷- مقایسه α_{11} مدل عددی و تست قبل و بعد از اصلاح مدل عددی با در نظر گرفتن ۱۵٪ نویز



شکل ۸ - مقایسه α_{11} مدل عددی و تست قبل و بعد از اصلاح مدل عددی با در نظر گرفتن ۲۰٪ نویز



شکل۹- بهبود مدل در حالتی که نتایج تست کامل نمی باشد (تکرار ۱۰ بار)



شکل۱۰- بهبود مدل در حالتی که نتایج تست کامل نمی باشد (تکرار ۵۰ بار)

کــه در آن α، Receptance، A، میزان نویز و RAN، یک مقدار اتفاقی بین صفر و یک است.
نمودار های α_{11} به ازای مقادیر مختلف نویز در دو حالت قبل و بعد از بروز رسانی (اشکال ۷و ۸) نشان می‌دهد که این روش با ۱۵درصد نویز برای این مثال مشخص کاملا موفق است ولی نتایج بهبود مــدل عددی حاصل از اطلاعات با ۲۰درصد نویز قابل قبول نیست.
در بررســـی‌های صورت گرفته توسط محققان برای مثال‌های دیگر مقدار تقریبی ۱۷درصد بــرای این روش در نظر گرفته شده است[۲] که نشـــان‌دهنده قدرت روش است. زیرا مقدار نویز در تست واقعی، امروزه به کمک ابزارهای دقیق و فیلترهای گوناگون کمتر از این مقدار است. البته برای موارد مختلف این مقدار متفاوت است.

۴- یکسان ســازی درجات آزادی مدل آزمایشگاهی و مدل عددی

در حالتی که درجات آزادی مدل اجزاء محدود بیشتر از مدل آزمایشگاهی‌است، فرض اینکه تمامی مقادیر بردار $\{\alpha_x(\omega)\}_i$ در دســت باشــد، واقع بینانه و منطقی نمی‌باشد، چرا که در بســـیاری از موارد اندازه‌گیری بعضی از درجات آزادی سیستم مقدور نیســت و یا بســیار مشــکل و هزینه بر اســت، مانند اندازه‌گیری درجات آزادی دورانی یا درجات آزادی درونی یک تیر. در چنین حالاتی برای به دست آوردن بردار $\{P\}$ باید از روش تکرار اســتفاده کرد. فرض می‌شود که بردار $\{\alpha_x(\omega)\}_i$ یک بردار $n\times1$ باشــد که n تعداد درجات آزادی اندازه‌گیری شده است. از آن‌جا که $n\leq N$ ، معادله ۸ به علت عدم قابلیت ضرب ماتریس‌ها قابل محاسبه نمی‌باشد. برای رفع این مشکل مقادیــری از $\{\alpha_x(\omega)\}_i$ کــه اندازه گیری نشــده اســت را با مقادیر مشابه مدل عددی حاصل از $\{\alpha_a(\omega)\}_i$ جایگزین می کنیم[۶].
برای بررســی توانایی این روش در حالــت عدم تطابق تعداد درجات آزادی مدل اجزاء محدود و مدل آزمایشــگاهی، با در نظر گرفتن سیستم ۵ درجه آزادی شکل ۱ و با این فرض که نتایج مربوط به درجه آزادی ۵ام قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد، با قرار دادن مقادیر عددی به جای مقادیری که قابل اندازه‌گیری نیســتند و به روش تکرار، مدل عددی بهبود یافت. با بررسی نتایج حل به روش تکرار (اشــکال ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲) می‌توان دید که با افزایش دفعات تکرار تا یک مقدار خطای مدل عددی کاهش یافته و به مدل آزمایشــگاهی نزدیک می‌شــود، اما با افزایش دفعــات حل دوباره خطا افزایش می‌یابد که برای این منظــور، مقدار حداکثر خطایی که مورد نظر کاربر اســت در برنامه نویسی مشــخص می‌گردد و بدین ترتیب مقدار بهینه تکرار به دست می‌آید.

۵- نتیجه گیری

روش بهبود مدل با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی (RFM)، از روشهای جدید و امروزی بهبود مدل بوده و به علت قابلیت‌های متعدد آن کاربرد فراوان دارد.
مزیت‌های این روش به طور خلاصه به شرح زیر است :
۱) قابلیت روش در مواردی که سیستم عددی دارای ماتریس دمپینگ بوده و بالاخص در مواردی که فرکانس‌های طبیعی سیستم مختلط می باشد.
۲) عــدم نیاز به تکنیک‌های فشرده‌ســازی در مواردی که در حالت آزادی مدل آزمایشــگاهی کمتر از درجات آزادی مدل عددی اســت و یا به عـــبارت دیگر در مـــواردی که بردار $\{\alpha_a(\omega)\}_i$ ناقص است.
۳) عدم نیاز به استخراج مودهای نوسانی مدل آزمایشگاهی.
۴) قابل فهم بودن الگوریتم روش
از معایب این روش می‌توان به موارد اساسی زیر اشاره کرد :
۱)حجم بالای محاســبات در این روش به خصوص در مرحله تشکیل دستگاه معادلات خطی و حل آنها به روش SVD از این رو حجم بالایی از حافظه در این روش مورد اســتفاده قرار می گیرد .
۲) نرســیدن بــه ضرایب تصحیح یکتا در مــواردی که تعداد درجات آزادی مدل عددی و آزمایشگاهی متفاوت است .
امــروزه با توجه به محاســن ایــن روش، کاربــرد آن در بین روش‌های دیگر توسعه یافته و به تدریج به یک روش استاندارد بهبود مدل تبدیل می‌شود.

۶- مراجع

[1] Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory, Practice and Application", 2nd Edition, RESEARCH STUDIES PRESS LTD., England, 2000.
[2] Visser, W.J. "Updating Structural Dynamic Using Frequency Response Data", Ph.D. Thesis, Imperial College London, 1992.
[3] Imregun, M., and Visser, W. J., "A Review of Model Updating Techniques", Shock and Vibration Bulletin, 1991 ,20-9.
[4] Ziaei Rad, S. "Methods for Updating Numerical Models in Structural Dynamic", Ph.D. Thesis, Imperial College London, 1997.
[5] Ashory, M. R, «High Quality Modal Testing Methods», Ph.D. Thesis, Imperial College London, 1999.
[6] Mottershead, J. E. «Theory for the Estimation of Structural Vibration Parameters from Incomplete Data «, AIAA Journal, Vol. 28, No. 3, pp 1990 ,561-559.