فصلنامه

مهندسی مکانیک و ارتعاشات

jvibme.semnaniau.ac.ir

نقطه ثابت دوتایی در فضاهای متریک فازی

سمانه قدس

1- استادیار، گروه علوم پایه، واحد سمنان، **دانشگاه آزاد اسلامی**، سمنان، ایران

* s1ghods@gmail.com

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 دی 1399

پذیرش: 28 خرداد 1400

ارائه در سایت: 16 مرداد 1400

کلیدواژگان

نقطه ثابت دوتایی

فضای متریک فازی

چکیده

در این مقاله، قضیه نقطه ثابت دوتایی را برای نگاشت انقباضی $F: X \times X \to X$ در فضاهای متریک فازی که دارای یک زیرفضای کامل F -ثابت غیر تهی E هستند، ثابت می کنیم، سپس منحصر به فرد بودن نقطه ثابت دوتایی در E را اثبات می کنیم. اگرچه قضایای نقطه ثابت زیادی در فضای متریک فازی وجود دارد، اما قضیه ما نوع جدیدی از این قضایا است، زیرا ثابت می‌کنیم نقطه ثابت منحصربه‌فرد در زیرمجموعه کامل F- ثابت E در X است. در نهایت، یک مثال جالب در فضای متریک فازی کامل ارائه می‌دهیم که در شرایط قضیه ما صدق می کند.

Coupled fixed point in Fuzzy metric spaces

Samaneh Ghods

Department of science, Semnan Branch, Islamic Azad University, Semnan, Iran

Article Information

Original Research Paper

Received 4 January 2021

Accepted 18 June 2021

Available Online 7 August 2021

Keywords

Coupled fixed point,

Fuzzy metric space

ABSTRACT

In this present work, we prove fixed point theorem for contractive mapping $F: X \times X \to X$ in fuzzy metric spaces that have a nonempty F −invariant complete subspace E, then prove the uniqueness the fixed point in E. Though many theorems in fuzzy metric space in this case, our theorem is a new type of these theorems. because we prove unique fixed point is in F −invariant complete subset E in X. Finally, we give an interesting example in complete fuzzy metric space that satisfies in the conditions of our theorem.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Samaneh Ghods, Coupled fixed point in Fuzzy metric spaces, *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 12, No. 2, pp. 32-36, 2021 (In Persian)

1- مقدمه

مفهوم مجموعه های فازی در ابتدا توسط زاده [8] در سال 1965 معرفی شد. برای استفاده از این مفهوم در توپولوژی و آنالیز، بسیاری از نویسندگان نظریه مجموعه ها و کاربردهای فازی را به طور گسترده توسعه داده اند. جورج و ویرامانی [2] مفهوم فضای متریک فازی ارائه شده توسط کراموسیل و میچالک [4] را اصلاح کردند. واسوکی [7] نسخه فازی قضایای نقطه ثابت مشترک را به دست آورد که دارای شرایط اضافی بود، در واقع، او یک قضیه نقطه ثابت مشترک فازی را با تعریف قوی دنباله کوشی [2] اثبات کرد. ابتدا تعاریفی را بیان می کنیم.

تعریف 1-1 [6] عملگر دوتایی $*: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ یک t- نرم پیوسته نامیده می شود اگر $([0,1],*)$ ، یک مونوید توپولوژیکی آبلی باشد. یعنی

الف) * شرکتپذیر و جابجایی است،

ب) * پیوسته است،

پ) برای هر $a \in [0, 1]$، $a * 1 = a$.

ت) برای هر $a, b, c, d \in [0,1]$، هر گاه $a * b \leq c * d$ ، $a \leq c$ و $b \leq d$.

دو مثال از t- نرمهای پیوسته، عبارتند از

$a *_1 b = ab$ ، $a *_2 b = \{a + b - 1,0\}$.

تعریف 1-2 [2] 3 تایی $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی نامیده می شود اگر X یک مجموعه دلخواه ناتهی، * یک t- نرم پیوسته و M یک مجموعه فازی در $X^2 \times [0, \infty)$ باشد که در شرایط زیر صدق می کند، برای هر $x, y, z \in X$ و $t, s > 0$

1) $M (x, y, t) > 0$،

2) $M (x, y, t) =1$ اگر و تنها اگر $x = y$،

3) $M (x, y, t) = M (y, x, t)$،

4) $M (x, y, t) * M (y, z, s) \leq M (x, z, t + s)$،

5) $M (x, y,.): (0, \infty) \to [0,1]$ پیوسته است.

مثال 1-3 [7] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک معمولی و ψیک تابع افزایشی و پیوسته از R^+ به $(0,1)$ باشد به طوری که$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 1$. به عنوان مثال $\psi(t) = e^{(-1/x)}$

فرض کنید $a * b \leq ab$ برای هر $a, b \in [0,1]$. برای هر $t \in (0, \infty)$ ، تعریف می کنیم

$$M (x, y, t) = [\psi(t)]^{d (x, y)}$$

برای هر $x, y \in X$. لذا $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی است.

تعریف 1-4 [2] فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد.

الف) دنباله x_n در X را به نقطه $x \in X$ همگرا می گویند اگر برای هر$t>0$ ، $\lim_{n\to\infty} M (x_n, x, t) =1$

ب) دنباله x_n در X دنباله کوشی نامیده می شود اگر برای هر $0 < \varepsilon < 1$ و $t > 0$

$n_0 \in N$ ای چنان موجود باشد که $M (x_n, x_m, t) > 1-\varepsilon$ برای هر $n, m \geq n_0$

پ) فضای متریک فازی که در آن هر دنباله کوشی همگرا باشد کامل گفته می شود.

تعریف 1-5 [5] فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد. دنباله $\{x_n\}$ در X به کوشی گفته می شود اگر

$\lim_{n\to\infty} M (x_{n+p}, x_n, t) = 1$برای هر $t > 0$ و $p > 0$.

لم 1-6 [3] برای هر $x, y \in X$، $M (x, y,.)$ یک تابع غیر کاهشی است.

تعریف 1-7 [7] فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد. M بر دنباله ای $X^2\times (0, \infty)$ بر پیوسته است هر گاه

$$lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = M(x, y, t)$$

که در آن (x_n, y_n, t_n) دنباله ای در $X^2 \times (0, \infty)$ است که به نقطه $(x, y, t) \in X^2 \times (0, \infty)$ همگراست. یعنی

$$lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = lim_{n\to\infty} M(y_n, y, t) = 1 \text{ and } lim_{n\to\infty} M(x, y, t_n) = M(x, y, t).$$

لم 1-8 [3] M یک تابع پیوسته در $X^2 \times (0, \infty)$ است.

تعریف 1-9 [7] فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد. گویند M ویژگی n را در $X^2 \times (0, \infty)$ دارد، هرگاه $lim_{n\to\infty} [M(x, y, k^n t)]^{(np)} = 1$

که در آن $k > 1$، $x, y \in X$ و $p > 0$.

مثال 1-10 [7] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک معمولی باشد. $a * b = ab$ برای هر $a, b \in [0,1]$ و

$M(x,y,t) = e^{\frac{-(x,y)}{t}}$ برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$. سپس داریم

$$lim_{n\to\infty}[M(x,y,k^n t)]^{np} = lim_{n\to\infty}(e^{\frac{-d(x,y)}{k^n}})^{np} lim_{n\to\infty} e^{\frac{-d(x,y)np}{k^n}} = 1.$$

بنابراین، M دارای ویژگی n در $X^2 \times (0, \infty)$ است.

لم 1-11 [7] فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد، $a * b \geq ab$ برای هر $a, b \in [0,1]$، و M دارای ویژگی n است. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای در X است به طوری که برای هر $n \in N$

$M(x_n, x_{n+1}, kt) \geq M(x_{n-1}, x_n, t)$ برای هر $0 < k < 1$، سپس دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است.

تعریف 1-12 [1] عنصر $(x, y) \in X \times X$ یک نقطه ثابت دوتایی نگاشت $F: X \times X \to X$ نامیده می شود هرگاه

$$F(x, y) = x, \quad F(y, x) = y$$

قضیه 1- 13 [5] (قضیه انقباض فازی باناخ). فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل باشد به طوری

برای هر $x, y \in X$،

$$lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$$

و فرض کنید $T: X \to X$ نگاشتی باشد که در شرط زیر صدق کند

$$M(T(x), T(y), kt) \geq M(x, y, t)$$

برای هر $x, y \in X$ و $0 < k < 1$. سپس T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

نتیجه 1- 14 [6] فرض کنید $a * b \geq ab$ برای هر $a, b \in [0,1]$ و فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل باشد به طوری که M دارای n خاصیت باشد. فرض کنید تابع $F: X \times X \to X$ چنان موجود است که

$$M(F(x, y), F(u, v), kt) \geq M(x, u, t) * M(y, v, t)$$

برای هر $x, y, u, v \in X$ و $0 < k < 1$. آنگاه یک $x \in X$ منحصر به فرد وجود دارد به طوری که $x = F(x, x)$.

2- نتایج اصلی

در این بخش قضیه و مثالی را برای نقطه ثابت دوتایی در فضای متریک فازی ارایه می دهیم. اگرچه هزاران قضیه نقطه ثابت دوتایی در فضای متریک فازی وجود دارد، قضیه ما نوع جدیدی از قضیه است، زیرا ثابت کردیم نقطه ثابت دوتایی منحصر به فرد

در زیر فضای کامل ثابت F- فضای متریک فازی $(X, M, *)$ قرار دارد.

قضیه 2-1 فرض کنید$(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد به طوری که M دارای ویژگی n- باشد و فرض کنید $a * b \geq ab$ برای هر $a, b \in [0,1]$. فرض کنید $F: X \times X \to X$ یک نگاشت باشد. فرض کنید $0 < k < 1$ و یک زیرمجموعه کامل F- ثابت غیرتهی E از X وجود دارد به طوری که برای هر $t > 0$;

$$M(F(x, y), F(u, v), kt) \geq$$

$$M(x, u, t) * M(y, v, t)$$

برای هر $x, y, u, v \in E$ و

$$M(F(x, y), F(u, v), kt) > M(x, u, t) * M(y, v, t)$$

برای هر $x, y, u, v \in X$ که $u \neq x, y \neq v$ در اینصورت یک $x \in X$ منحصر به فرد وجود دارد که $x = F(x, x)$.

اثبات: از آنجایی که E یک زیرمجموعه کامل F - ثابت غیر تهی از X است، بنابراین $F|_{E\times E}: E \times E \to E$ یک نگاشت است و $(E, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل است. اکنون، از (نتیجه 1,14)، یک $x \in E$ یکتا وجود دارد، به طوری که $F(x, x) = x$ فرض کنید $u \in X - E$ وجود دارد به طوری که $F(u, u) = u$ از آنجا که $u \in X-E$، بنا براین $u \neq x$ و داریم:

$$M(x, u, kt) = M(F(x, x), F(u, u), kt) > M(x, u, t) * M(x, u, t) \geq [M(x, u, t)]^2$$

بنابراین

$$\ldots\frac{t}{k^2})]^4 > \cdots > [M(x, u, \frac{t}{k^n})]^{2^n} \geq [M(x, u, \frac{t}{k^n})]^{n^p}$$

که در آن p به گونه ای است که $2^n \leq n^p$. از این رو

$$M(x, u, t) > [M(x, u, \frac{t}{k^n})]^{n^p} \longrightarrow 1$$

هرگاه $n \to \infty$. یعنی $M(x, u, t) = 1$. این یک تناقض است. بنابراین، همه نقاط به جز $(x, x) \in E \times E$ نقطه ثابت دوتایی F نیستند.

در این مثال نشان می دهیم که F یک نقطه ثابت دوتایی منحصر به فرد دارد و $\{F^n(x, y)\}$ لزوماً به نقطه ثابت دوتایی همگرا نمی شود.

مثال2-2 قرار دهید $X = \{0\} \cup \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ و یک متریک d بر X به صورت $d(x, y) = |x| + |y|$ برای هر $x, y \in X$ تعریف کنید. فرض کنید $a * b = ab$ برای هر $a, b \in [0,1]$. در اینصورت $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل است که در آن برای هر $x, y \in X$,

$$M(x, y, t) = e^{\frac{-d(x,y)}{t}}$$

نگاشت $F: X \times X \to X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ یا } y = 0 \\ 1 + \dfrac{1}{N+1} & x = 1 + \dfrac{1}{n}, \quad y = 1 + \dfrac{1}{m} \end{cases}$$

که در آن $N = \max\{n, m\}$. در اینصورت F در شرایط قضیه قبل صدق می کند اما $\{F^n(2, 2)\}$ همگرا نیست.

مراجع

[1] T. G. Bhaskar, V. Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, *Nonlinear Analysis* ,65, pp. 1379 – 1393, 2006.

[2] A. George, P. Veeramani, On some results in fuzzy metric space, *Fuzzy sets and Systems* 64 399.

[3] M. Grabiec, Fixed points in fuzzy metric spaces, *Fuzzy sets and Systems 27*, pp. 385–389, 1988.

[4] I. Kramosil, J. Michalek, fuzzy metric and statistical metric spaces, *Kybernetica* 11, pp. 326– 334, 1975.

[5] B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces, *Journal of mathematics* 10, pp. 313− 334, 1960.

[6] S. Sedghi, I. Altun, N. Shobe, Coupled fixed point theorems for contractions in fuzzy metric spaces, *Nonlinear Analysis* 72, pp. 1298 – 1304, 2010.

[7] R. Vasuki, common fixed points for R - weakly commuting maps in fuzzy metric space, *indian journal of pure Applied Mathematics*, 30, pp. 419 – 423, 1999.

[8] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, pp. 338 – 353, 1965.