



تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر تیمو شینکو کامپوزیت با لایه های پیزوالکتریک

محمد صادقی^۱، دکتر علی اصغر جعفری^{۲*}

۱- کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیر طوسی، تهران، ایران

*Tehran, Ajafari@Kntu.ac.ir

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد و اجباری تیر تیمو شینکو کامپوزیت با لایه های پیزو الکتریک عملگر و حسگر بررسی شده است. میدان جا به جایی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تیر ها^۱ به دست آورده شده و معادلات حاکم بر حرکت تیر با استفاده از اصل همپلتون استخراج گردیده است. شرایط مرزی مکانیکی دوانتهای تیر از نوع تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. حل معادلات حرکت با استفاده از برنامه نویسی در نرم افزار متلب انجام یافته است و فرکانس های طبیعی تیر به دست آمده با [۱] مقایسه شده است. در بخش ارتعاش اجباری بارگذاری بار گسترده با شدت یکنواخت و با تحریک هارمونیک و بار پله ای در نظر گرفته شده است.

اطلاعات مقاله

مقاله یادداشت پژوهشی

دریافت: ۲۷ آذر ۱۳۹۵

پذیرش: ۲۸ اسفند ۱۳۹۷

ارائه در سایت: ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۸

کلیدواژگان

مواد کامپوزیت

پیزوالکتریک

عملگر

حسگر

Free and forced vibration analysis of Timoshenko composite beam with piezo-electric layers

Mohammad sadeghi¹, Ali asghar jafari^{2*}

1-MA, Department of mechanic, West Tehran Branch, IslamicAzadUniversity, Tehran, Iran

2-Professor, Department of mechanic, khaje nasir University, Tehran, Iran

* Tehran, Iran, Ajafari@Kntu.ac.ir

Article Information

Research Note

Received 17 December 2016

Accepted 19 March 2019

Available Online 15 May 2019

Keywords

Composite materials

piezo-electric

actuator

sensor

ABSTRACT

relocation field using First shear deformation beam theory obtained and governor equations on moving beam derivated with using Hamilton's rule. mechanical boundery conditions of beam bipolar from simple supported is discussed. resolution of moving equations with using programming in matlab software achieved and natural frequencies obtained and compared with [1]. in part forced vibration loading, explode load with uniform tensity with harmonic excitation and stepper load is discussed.

^۱. First shear deformation beam theory

Please cite this article using:

Mohammad sadeghi, Ali asghar jafari, Free and forced vibration analysis of Timoshenko composite beam with piezo-electric layers, *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 10, No. 1, pp. 7-13, 2019 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

۱- مقدمه

بر این پایه روابط کرنش- جا به جایی تیر به فرم زیر قابل حصول است؛

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad \varepsilon_y, \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi(x,t) \quad \gamma_{xy}, \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

با استفاده از اصل همیلتون معادله حاکم بر حرکت تیر به فرم کلی زیر بر حسب جا به جایی و منتجه های ممان و تنش استخراج شده است؛

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} &= I_1 \ddot{u}(x,t) + I_2 \ddot{\psi}(x,t) \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x &= I_2 \ddot{u}(x,t) + I_3 \ddot{\psi}(x,t) \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} &= I_1 \ddot{u}(x,t) + I_2 \ddot{\psi}(x,t) \end{aligned} \quad (3)$$

که در روابط (۳) P, N, M, Q به ترتیب نیروی خارجی در جهت قائم، نیروی در صفحه بر واحد طول، ممان خمشی بر واحد طول و نیروی برشی بر واحد طول می باشند. I_1, I_2, I_3 به صورت زیر تعریف شده اند؛

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{z_{NL}}^{z_1} \rho(\bar{x}, z, \bar{z}) dz \quad (4)$$

۳- روابط لایه کامپوزیت

رابطه ی تنش های نرمال و با کرنش ها برای یک ماده کامپوزیت در حالت کلی به صورت زیر می باشد؛

۲- مدل سازی و استخراج معادلات حرکت

روابط کرنش و جا به جایی

میدان جا به جایی تیر بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی تیر ها به شکل زیر در نظر گرفته شده است [۵]؛

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u(x,t) + z\psi(x,t) \\ v &= 0 \\ w &= w(x,t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در روابط (۱) u, v, w به ترتیب جا به جایی در راستای z, y, x هر نقطه از تیر می باشند، چرخش سطح مقطع عمود بر لایه میانی تیر است. اندیس صفر در مولفه های جا به جایی برای معین کردن جا بجایی لایه میانی تیر است.

بکار گیری لایه پیزو در این مقاله به این صورت است که لایه پایینی حسگر بوده ولایه بالایی عملگر می باشد.

۵- روابط لایه حسگر

چون هیچ گونه شارژ الکتریکی در حسگر وجود ندارد جابجایی الکتریکی در راستای z صفر است لذا شدت میدان الکتریکی حسگر به دست می آید. بنابراین داریم؛

$$\sigma_{xx}^s = \left(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^s \quad (7)$$

بر این پایه با برابر قرار دادن شدت میدان الکتریکی در حسگر و رابطه تجربی $E_i = \varphi_{,i}$ ، ولتاژ حسگر به دست می آید؛

$$V^s = -\frac{e_{31} h_s}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)$$

$$h_m^s = \frac{z_{NL} + z_S}{2} \quad (8)$$

۶- روابط لایه عملگر

توزیع پتانسیل الکتریکی و شرایط مرزی الکتریکی در لایه عملگر به صورت زیر فرض شده است؛

$$\varphi^a = \varphi + z\varphi_1 + z^2\varphi_2$$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi = V^a \text{ at } z = z_1 = h/2 + h_a \\ \varphi = 0 \text{ at } z = z_2 = h/2 \end{array} \right. \quad \text{شرایط مرزی} \quad (9)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق، و اعمال معادله ماکسول در لایه عملگر ضرایب مجهول در رابطه پتانسیل الکتریکی به دست می آیند. با استفاده از رابطه تجربی $E_i = \varphi_{,i}$ شدت میدان الکتریکی در لایه عملگر به دست می آید.

با قرار دادن شدت میدان الکتریکی لایه عملگر در رابطه تنش لایه پیزوالکتریک و نوشتن ولتاژ لایه عملگر بر حسب ولتاژ لایه حسگر و ضریب بهره تنش لایه عملگر به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \cdot & \cdot & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \cdot & \cdot & \bar{Q}_{26} \\ \cdot & \cdot & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bar{Q}_{54} & K_\Delta \bar{Q}_{55} & \cdot \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \cdot & \cdot & K_\epsilon \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \cdot \\ \cdot & K_\Delta \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{Q}_{11}^i = (Q_{11} \cos^2 \theta_i + 2(Q_{12} + 2Q_{66})$$

$$\sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i + Q_{22} \cos^2 \theta_i)$$

$$\bar{Q}_{55}^i = (Q_{55} \cos^2 \theta_i + Q_{44} \sin^2 \theta_i)$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12} = \frac{E_{12}}{2(1 + \gamma_{12})}$$

$$Q_{55} = G_{13}$$

$$Q_{44} = G_{13}$$

۴- روابط پیزوالکتریک

با در نظر گرفتن مولفه جا به جایی الکتریکی در راستای z به دلیل نازک بودن لایه پیزو خواهیم داشت [۵]؛

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_{xx} - e_{31} E_z$$

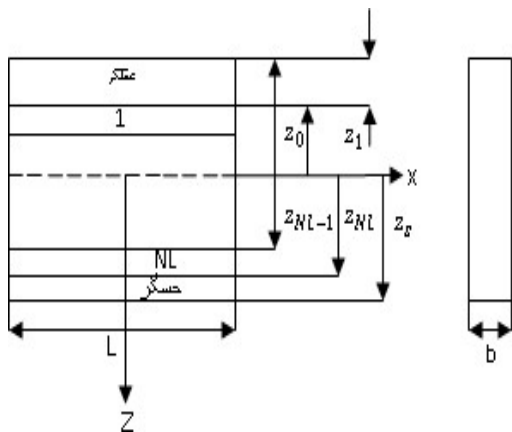
$$D_z = \epsilon_{33} E_z - e_{31} \epsilon_{xx}, D_x = 0 \quad (6)$$

e, D, ϵ, E_z به ترتیب بیانگر شدت میدان الکتریکی، ضریب

دی-

الکتریک، جابجایی الکتریکی و ضریب پیزوالکتریک می باشند.

نحوه



شکل (۱) هندسه تیر متشکل از لایه کامپوزیت و لایه های پیزوالکتریک.

$$\sigma_{xx}^a = c_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \right)^a - \frac{e_{31}^y h_s G}{h_a \epsilon_{33}}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \right) - \frac{e_{31}^y}{\epsilon_{33}} (h_m^a - z)^a \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}$$

$$h_m^s = \frac{z_{NL} + z_s}{2} \quad (10)$$

۷- معادله حرکت تیر

روابط (۵)، (۷) و (۱۰) در روابط منتهجه های ممان و تنش قرار داده شده است. سپس با جایگذاری روابط حاصل در رابطه (۳) معادله ی حاکم بر حرکت تیر تیموشینکو کامپوزیت با لایه های پیزوالکتریک به دست می آید.

در رابطه (۱۲) $\beta = \frac{m\pi}{L}$ ، و برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی تیردترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر قرار داده شده است.

(۱۱)

$$A_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = I_1^* \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + I_2^* \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

$$A_3 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - K_\Delta A_\Delta \left(\Psi(x) + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) =$$

$$I_2^* \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + I_3^* \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

$$K_\Delta A_\Delta \left(\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) + P(x,t) = I_1^* \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}$$

(۱۲)

$$[k] - [m] \omega^2 =$$

$$\begin{vmatrix} A_1 \beta^2 - I_1^* \omega^2 & A_2 \beta^2 - I_2^* \omega^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_3 \beta^2 - I_3^* \omega^2 & A_4 \beta^2 + K_\Delta A_\Delta - I_3^* \omega^2 & K_\Delta A_\Delta \beta & \cdot \\ \cdot & K_\Delta A_\Delta \beta & K_\Delta A_\Delta \beta^2 - I_1^* \omega^2 & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

مولفه های جا به جایی برای تحلیل ارتعاش اجباری تیر به صورت زیر فرض می شوند [۶].

(۱۳)

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \Omega t$$

$$\Psi(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \Omega t$$

$$W(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \Omega t$$

$$\begin{pmatrix} I_1^* & I_2^* & \cdot & \cdot \\ I_2^* & I_3^* & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_1^* & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \beta^2 & A_2 \beta^2 & \cdot & \cdot \\ A_3 \beta^2 & A_4 \beta^2 + K_\Delta A_\Delta & K_\Delta A_\Delta \beta & \cdot \\ \cdot & K_\Delta A_\Delta \beta & K_\Delta A_\Delta \beta^2 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

برای درک بهتر هندسه تیر در شکل (۱) نشان داده شده است.

در جدول (۲) فرکانس های طبیعی تا سه مود اول ارتعاشی با نتایج [۱] برای حالتی که ولتاژ لایه های پیزو الکتریک صفر باشند مقایسه شده است.

جدول (۲) مقایسه فرکانس های طبیعی

	th freq		th
	۱	۲	۳freq
Present	۳۵/۷۵	۱۰۷/۳	۲۱۷/۶۹
[۱] (FEM)	۳۴۰	۱۰۵/۲	۲۱۵۴/۴
Difference	%۳/۰۷	%۱/۸	%۰/۷۶

در جدول (۳) فرکانس های طبیعی تا سه مود اول ارتعاشی با نتایج [۱] برای حالتی که ولتاژ لایه های پیزو الکتریک صفر نباشد و

$G=100$ (ضریب بهره) در نظر گرفته شود مقایسه شده اند.

جدول (۳) مقایسه فرکانس های طبیعی

	th	th	thfreq
	۱ freq	۲ freq	۳
Present	۲۰۲	۹۶۱	۱۸۶۳
[۱] (FEM)	۱۸۸	۹۳۸	۱۸۴۲
Difference	%۶,۹۶	%۲,۴	%۱,۱۳

۹- نتایج ارتعاش اجباری

بار گسترده با دامنه ثابت $p_0 = 100 \text{ KN}$ و تحریک هارمونیک $\Omega = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در $t = 0,00015708 \text{ s}$ به تیر تیمو شینکو کامپوزیت بدون لایه های پیزو الکتریک وارد شده است نمودار خیز تیر در راستای طول تیر در شکل (۱) آمده است.

هم چنین نیروی هارمونیک یکنواخت گسترده و با فرکانس تحریک Ω و شدت یکنواخت p_0 در راستای قائم بر تیر فرض می گردد.

(۱۴)

$$p(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4p_0 \sin(\Omega t)}{(2-1)\pi} \sin \frac{m\pi x}{L}$$

با جایگذاری معادلات (۱۴) و (۱۳) در معادلات (۱۱) داریم .

$$\rightarrow \begin{bmatrix} I_1^* & I_2^* & 0 \\ I_2^* & I_3^* & 0 \\ 0 & 0 & I_1^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_m(t) \\ \ddot{\psi}_m(t) \\ \ddot{w}_m(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1\beta^2 & A_2\beta^2 & 0 \\ A_2\beta^2 & A_4\beta^2 + k_5 A_5 & k_5 A_5 \beta \\ 0 & k_5 A_5 \beta & k_5 A_5 \beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4p_0 \sin(\Omega t)}{(2-1)\pi} \end{Bmatrix}$$

(۱۵)

ملاحظه می گردد که رابطه (۱۵) معادله دیفرانسیل معمولی با متغیر زمانی است که از روش های عددی برای حل آن می توان استفاده کرد.

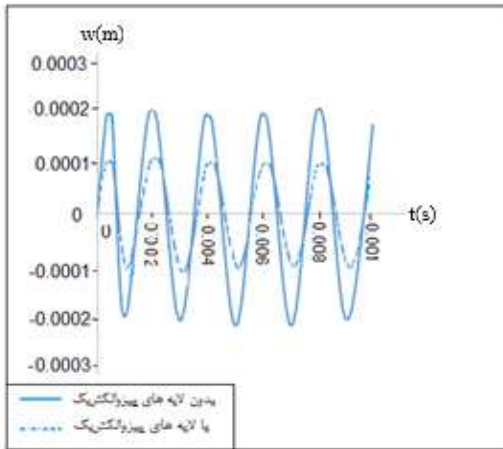
۸- صحنه گذاری نتایج

خواص مکانیکی لایه کامپوزیت؛ مشخصات هندسی تیر و خواص ماده پیزو الکتریکی مطابق جدول (۱) در نظر گرفته شده است.

جدول (۱) مشخصات هندسی تیر و خواص مکانیکی لایه

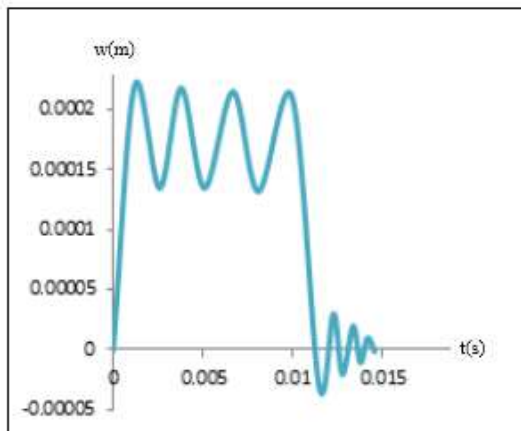
کامپوزیت و خواص ماده پیزو الکتریک	
مشخصات هندسی تیر	$b = 381/0 \text{ L} = 4 \text{ mm}$
ضخامت هر لایه	$h = 25 \text{ mm}$
	$h_a = h_s = 0/25 \times 10^3 \text{ m}$
خواص ماده پیزو الکتریک PZT-5H	$e_{31} = -6/5 \text{ coulomb/m}^2$
	$c_{11} = 126 \times 10^{-3}$
	$E_{33} = 1/302 \times 10^{-8} \text{ c/(volt.m)}$
	$P = 7500 \text{ kg/m}^3$

پیزوالکتریک تحت بار گسترده 100 KN و فرکانس تحریک $\Omega = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ مقایسه شده است.

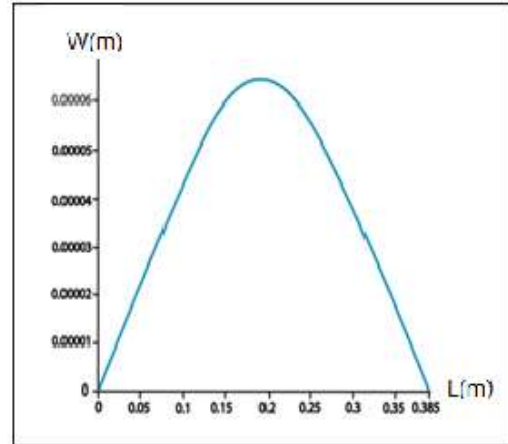


شکل (۳) مقایسه خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت بدون لایه های پیزوالکتریک با خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت با لایه های پیزوالکتریک

شکل (۳) مقایسه خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت با لایه های پیزوالکتریک تحت بار پله ای گذرا با $p_0 = 100 \text{KN}$ که در زمان $t = 0/011 \text{s}$ بار برداشته شده است در شکل (۴) نمایش داده شده است ملاحظه می شود که تا قبل از زمان $0/011 \text{s}$ دامنه نوسان ثابت بوده و پس از آن ارتعاش آزاد میرا شده است. فرکانس ارتعاش مرحله اول همان فرکانس تحریک بوده و فرکانس ارتعاش دوم همان فرکانس طبیعی تیر با لایه های پیزوالکتریک می باشد.

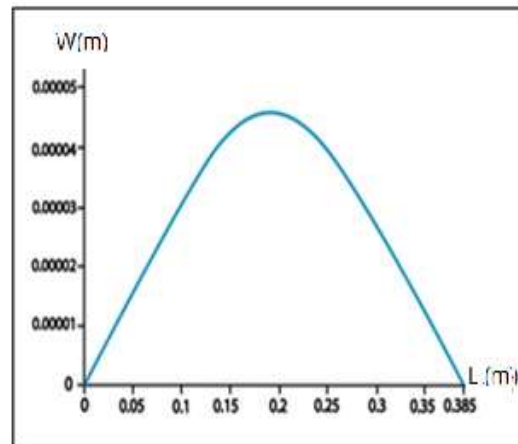


شکل (۴) خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت با لایه های پیزوالکتریک تحت بار پله ای گذرا



شکل (۱) خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت بدون لایه های پیزوالکتریک

بار گسترده با دامنه ثابت $p_0 = 100 \text{KN}$ و تحریک هارمونیک $\Omega = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در $t = 0,00015708 \text{s}$ به تیر تیموشینکو کامپوزیت با لایه های پیزوالکتریک وارد شده است نمودار خیز تیر در راستای طول تیر در شکل (۲) آمده است.



شکل (۲) خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت با لایه های پیزوالکتریک

نتیجه می گیریم وقتی لایه های پیزوالکتریک به تیر اضافه می شوند خیز تیر در راستای طول تیر کاهش می یابد مطابق شکل نمود اول می باشد.

در شکل (۳) خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت بدون لایه های پیزوالکتریک با خیز تیر تیموشینکو کامپوزیت با لایه های

- [3] Teboub,Y.and Hajela,p,,"A neural Network Based Damage Analysis of Smart Composite beams, "AIAA, Paper92-4685,Fourth AIAA/USAF/NASA/OAI Symposium on Multidisciplinary Analysis And optimization September 21-23,1992, cleveland,OH.

۱۰- پیوست

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{i=1}^{NL} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{Q}_{11}^{-i} dz + \left(\bar{Q}_{11}^s + \frac{e_{31}^s{}^2}{\epsilon_{33}^s} \right) \\
 &h_s + \left(\bar{Q}_{11}^a - \frac{e_{31}^a e_{31}^s h_s G}{h_a \epsilon_{33}^s} \right) h_a \\
 A_2 &= \sum_{i=1}^{NL} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{Q}_{11}^i z dz + \left(\bar{Q}_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \\
 &\left(\frac{z_1^2 + z_s^2 - z_0^2 - z_{NL}^2}{2} \right) - \frac{e_{31}^a e_{31}^s}{\epsilon_{33}^s} \\
 &\left(\frac{h_s}{h_a} G h_m^s + h_m^a \right) h_a \\
 A_3 &= \sum_{i=1}^{NL} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{Q}_{11}^{-i} z dz + \left(\bar{Q}_{11}^a - \frac{e_{31}^a h_s G}{h_a \epsilon_{33}^a} \right) \\
 &\left(\frac{z_1^2 - z_0^2}{2} \right) + \left(\bar{Q}_{11}^s + \frac{e_{31}^s{}^2}{\epsilon_{33}^s} \right) \left(\frac{z_s^2 - z_{NL}^2}{2} \right) \\
 A_4 &= \sum_{i=1}^{NL} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{Q}_{11}^{-i} z^2 dz + \left(\bar{Q}_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \\
 &\left(\frac{z_1^3 + z_s^3 - z_0^3 - z_{NL}^3}{3} \right) - \frac{e_{31}^a e_{31}^s}{\epsilon_{33}^s} \\
 &\left(\frac{h_s}{h_a} G h_m^s + h_m^a \right) \left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2} \right) \\
 A_5 &= \sum_{i=1}^{NL} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{Q}_{55}^{-i} dz \\
 &\left(I_1^* \text{ و } I_2^* \text{ و } I_3^* \right) = \int_{z_0}^{z_s} \rho (1 + z + z^2) dz \\
 I_1^* &= \rho_a h_a + \rho_s h_s + \int_{z_1}^{z_{NL}} \rho dz \\
 I_2^* &= \rho_a \frac{z_1^2 - z_0^2}{2} + \rho_s \frac{z_s^2 - z_{NL}^2}{2} + \int_{z_1}^{z_{NL}} \rho z dz \\
 I_3^* &= \rho_a \frac{z_1^3 - z_0^3}{3} + \rho_s \frac{z_s^3 - z_{NL}^3}{3} + \int_{z_1}^{z_{NL}} \rho z^2 dz
 \end{aligned}$$

۱۱- مراجع

- [1] Lijun, HuaHongxing, shen Rongying, Dynamic finite element method for generally Laminated composite beams with piezoelectric layers. International of Mechanical Sciences 50 (2008) ; 466-480.
- [2] NageshBabu,Gl.andHanagud,s.,1990:"Delaminations" In smart composite structures:A parametric Study on vibrations,"AIAA paper90-1173-cp,31stAIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC SDM conference part4, pp, 2417-2426 Hanagud, S., Nagesh Babu,G.L And won, c, c., 1990 : "Delaminationsin smart composite" structures," proceedings,The1990SEM Springconferenceon Experimental Mechanics, Bethel, CT; Societyfor Experimental Mechanics,Inc.,pp.776-781.