فصلنامه علمی پژوهشی زمین شناسی محیط زیست
سال سیزدهم، شماره ۴۷، تابستان ۹۸

مبانی استفاده از تئوری آشوب و هندسهٔ فرکتال برای تعیین متغیرهای طراحی و برنامه‌ریزی معادن روباز برای دستیابی به توسعهٔ پایدار

امید محمّدی[۱]، افشین اکبری دهخوارقانی*[۲] و سید مصلح افتخاری[۳]

۱- دانشجوی دکترای تخصصی مهندسی معدن، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران
۲- گروه مهندسی نفت، معدن و مواد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، afshinkr@gmail.com
۳- گروه مهندسی معدن، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران

چکیده

از آنجا که تمام پروژه‌های معدنی، شرایطی همراه با عدم‌قطعیت دارند، بررسی و تحلیل ریسک در این پروژه‌ها ضروری است. همچنین اطلاع از رقم دقیق ذخیرهٔ قابل استحصال معدنی، به دلیل قرار گرفتن در دل زمین و محدودیت‌های اجرایی، هنگامی میسر می‌شود که کل ذخیره استخراج گردد. لذا متغیرهای مؤثر در ارزیابی فنی و اقتصادی پروژه‌های معدنی دارای تنوع فراوان بوده و همگی آن‌ها دامنهٔ تغییرات وسیعی با در نظر گرفتن اندازهٔ ارقام از بعد کمّی و کیفی دارند، این فرآیند معلول علت‌های خارج از اختیار بشر است و گاهی، هر اندازه هزینه گردد دستیابی به اطلاعات کامل ممکن نیست. از این جهت در همهٔ پروژه‌های معدنی، در تصحیح ارقام درآمدها و هزینه‌ها و به طبع آن محاسبات اقتصادی، ناچار به احتساب حاشیهٔ اطمینان بوده و ملزم به محاسبهٔ ریسک‌پذیری هستند. به نظر می‌رسد منطقی‌تر باشد که در تحلیل اقتصادی پروژه‌های معدنی دامنهٔ تغییرات احتمالی متغیرهای مؤثر در نظر گرفته شود و کمترین و بیشترین احتمال وقوع هر ردیف را لحاظ کرد. وقتی‌که یکی از مهمترین مسائل دارای عدم‌قطعیت، قیمت فلز است پس در تعیین محدودهٔ نهایی معدن نیز عدم‌قطعیت قیمت مطرح می‌شود. با توجه به این‌که پیش‌بینی قیمت فلز دارای عدم‌قطعیت است، می‌توان با استفاده از تئوری آشوب و هندسهٔ فرکتال برای پیش‌بینی قیمت فلز بهره برد. در این تحقیق از تئوری آشوب و هندسهٔ فرکتال استفاده شده است تا بتوان قیمت فلز را مورد تخمین درست قرار داد، چرا که تغییرات قیمت فلز از رفتار فرکتالی و آشوب‌گونه پیروی می‌کند. لذا اگر تخمین درستی از قیمت فلز حاصل شود محدودهٔ نهایی معدن نزدیک به واقعیت حاصل می‌شود و می‌توان بر اساس آن محدودهٔ نهایی بهینهٔ معدن را بدست آورد که با توجه به اصول توسعهٔ پایدار منجر به استخراج فلز با قیمت پایین‌تر و محدودهٔ نهایی پایدارتر شده و حفاظت از مسائل زیست محیطی بهتر رعایت می‌گردد.

واژگان کلیدی: محدودهٔ نهایی معدن، عدم‌قطعیت، تئوری آشوب، هندسهٔ فرکتال، قیمت فلز (محصول نهایی)، توسعهٔ پایدار.

مقدمه

پروژه‌های معدنی تحت تأثیر ریسک‌ها و عدم‌قطعیت‌های متعدد قرار می‌گیرند، زیرا ارزیابی پروژهٔ معدنی بدون در نظر گرفتن ریسک‌ها و عدم‌قطعیت‌ها منجر به نتایج نامعتبر خواهد شد. در نتیجه، مدیران و سهامداران شرکت معدنی یک تصمیم مبتنی بر اطلاعات نامناسب می‌گیرند. عدم‌قطعیت اقتصادی یکی از مهمترین منابع مهم از عدم‌قطعیت است که تأثیر بحرانی بر ارزیابی پروژهٔ معدنی دارد. از نقطه نظر اقتصادی، قیمت فلزات و هزینه‌های عملیاتی آینده مهمترین عوامل از عدم‌قطعیت هستند. در صنعت معدن، وضعیت بسیار پیچیده‌تر از سناریو ساده‌ای است که در اکثر پیشینه‌های فعلی مفروض واقع شده است. به عنوان مثال، علی‌رغم پیشرفت‌های اخیر در زمینهٔ روش‌های اکتشاف و ارزیابی مادهٔ معدنی، مقدار کل

واحدهای فلزی درون ذخیره هرگز با قطعیت شناخته نمی شود.علاوه بر این، از آنجا که کیفیت مادهٔ معدنی در سراسر ذخیره به طور قابل توجهی متفاوت است، فرض بر این است که واحدهای فلزی با نرخ ثابت در طول عمر معدن جریان می‌یابنددر واقع، مقدار واحدهای فلزی تولید شده در سال بسیار متغیر و نامطمئن است. همان طور که (مانخاوس و همکاران ، ۲۰۰۵) توضیح داده شده است، نادیده گرفتن چنین عدم‌قطعیت و اجرای ارزیابی‌ها با استفاده از یک مجموعه‌ای از مفروضات در مورد تناژها و عیارهای مادهٔ معدنی، منجر به تخمین اشتباه از ارزش پروژه می‌شود . علاوه بر عدم‌قطعیت زمین‌شناسی، یکی دیگر از مهمترین تأثیر ریسک بر سودآوری عملیات استخراج معادن مربوط به عدم‌قطعیت نرخ‌های ارز خارجی است. این منبع از ریسک برای کشورهای عمدهٔ تولید فلز مانند استرالیا، آفریقای جنوبی و کانادا اهمیت خاصی دارد. بنابراین، اگر یک پروژهٔ معدنی تنها یک کالا تولید کند، حداقل سه نوع ریسک وجود دارد که بر سودآوری آن تأثیر می‌گذارد: ریسک زمین‌شناسی، ریسک قیمت فلز و ریسک ارز خارجی. اکنون مسئلهٔ کلیدی بررسی اینکه آیا تکنیک‌های فعلی برای ارزیابی گزینه‌های واقعی برای مقابله با چالش‌های فوق الذکر مناسب هستند یا نه. اولین و شاید معروف‌ترین مدل برای ارزش‌گذاری گزینه‌ها (بلک و اسکولز ،۱۹۷۳) برای گزینه‌های مالی اروپا توسعه داده شد. با این حال، همانطور که (بریج و شوماخر ،۲۰۰۴) توضیح داده شده است، مدل بلک–اسکولز برای ارزش‌گذاری گزینه‌های سبک آمریکایی مناسب نیست. بر این اساس، مدل بلک–اسکولز برای ارزیابی پروژه‌های واقعی که شامل گزینه‌های واقعی سبک آمریکایی ترکیب شده، عدم‌قطعیت‌های چندگانه و مدل‌های تصادفی پیچیده‌تر از مدل حرکت سادهٔ هندسی براونیان (GBM) است، قابل اجرا نمی‌باشد دومین تکنیک محبوب برای ارزیابی گزینه‌ها، "روش شبکه" است که توسط (کاکس و همکاران ،۱۹۷۹) پیشنهاد شده است. مهمترین مشخصهٔ تکنیک شبکه، محدود کردن کاربرد عملی آن است که سطح پیچیدگی با تعداد عدم‌قطعیت‌ها بسیار سریع رشد می‌کند . آخرین روش برای ارزیابی گزینه‌های واقعی بر اساس شبیه‌سازی است. روش مونت کارلو برای ارزیابی گزینه‌های اروپایی (بویل ،۱۹۷۷) پیشنهاد شده است. یک نسخهٔ بهبود یافته که می‌تواند گزینه‌های مالی آمریکا را ارزیابی کند توسط توسعه داده شد. به طور کلی، مزایای تکنیک‌های مبتنی بر شبیه‌سازی عبارتند از: عدم‌قطعیت‌های چندگانه که توسط مدل‌های تصادفی پیچیده توصیف می‌شود. (کورتازار و همکاران ،۲۰۰۱) تلاش کردند تا با برچیدن عدم‌قطعیت‌های قیمت، زمین‌شناسی و فنی به یک مدل GBM یک فاکتوره، به منظور کاهش ابعاد مشکل به یک بعد برسد . این ساده‌سازی مستلزم آن است که بین دو متغیر کاملاً مستقل نظیر قیمت مس و عیار ذخیرهٔ مس، یک همبستگی کامل و عالی وجود داشته باشد. بر اساس این همبستگی فرض شده، برنامه‌ریز معدن باید انتظار داشته باشد که عیار ذخیره در طی دوره‌های قیمت بالا، بالا خواهد بود و در طی دوره‌های قیمت پایین، پایین باشد. از آنجا که قیمت بازار فلز و عیار ذخیره در زمین کاملاً مستقل است، چنین فرضیه‌ای غلط است. همین مشکل در استفاده از تعادل فلزی برای کاهش ابعاد مشکل به یک بعد در هنگام ارزیابی معادن چندفلزی وجود دارد. رویکردهای مبتنی بر شبیه‌سازی (صبور ،۲۰۱۱) مطرح شده است و یک روش‌شناسی برای سنجیدن اثر عدم‌قطعیت قیمت در تخمین ذخایر (ایوات و همکاران ،۲۰۱۲) بیان شده است. یک گراف بر اساس الگوریتم

حداکثر جریان متغیریک برای توسعهٔ محدودهٔ نهایی پیت و طراحی فازها تحت عدم‌قطعیت مالی و قیمت فلز، (اسد و دیمیتراکوپولوس ،۲۰۱۳) ارائه شده اس. منابع اصلی عدم‌قطعیت از پروژهٔ معدنی آغاز می‌شود که به سه گروه دسته‌بندی شده باشد. عدم‌قطعیت‌های اکتشافی، عدم‌قطعیت‌های فنی–مهندسی وعدم‌قطعیت‌های اقتصادی. عدم‌قطعیت‌های اقتصادی در طی مراحل ارزیابی منبع مانند عدم‌قطعیت زمین‌شناسی، مجموعه داده‌ها، تفسیر داده‌ها، مدلسازی، طبقه‌بندی ذخیره، گزارش‌های مربوطه و غیره رخ خواهد داد. بسیاری از محققان مانند(داود ،۱۹۹۷)، (دیمیتراکوپولوس و همکاران ،۲۰۰۲)، (گودی و دیمیتراکوپولوس،۲۰۰۴)، (لیت‌ودیمیتراکوپولوس ،۲۰۰۷)، انواع عدم‌قطعیت‌ها را مورد مطالعه قرار دادند. عدم‌قطعیت‌های فنی شامل تعیین ارتفاع پله، کنترل عیار برنامه‌ریزی شده، حداقل عرض توقفگاه‌ها و پله‌ها، انتخاب نحوهٔ توقف، عوامل ترقیق، متغیرهای هیدرولوژی و ژئوتکنیکی، عوامل بازیابی معدنکاری و متالوژی می‌باشند. عدم‌قطعیت‌های اقتصادی، منبع مهم دیگری از عدم‌قطعیت است که تأثیر بسازی بر ارزیابی پروژه‌های معدنی دارد. از نقطه نظر اقتصادی، قیمت‌های آیندهٔ فلز و هزینه‌های عملیاتی مهمترین فاکتورهای عدم‌قطعیت هستند. درصورتی که قیمت فلز، بیش از حد مورد نظر، خوش‌بینانه در نظر گرفته شوند، ممکن است از نظر نرخ بازگشت سرمایه برای پروژه، مطلوب باشد ولی این موضوع غیرقطعی و دارای تردید است، برعکس، اگر قیمت فلز کمتر از حد مورد نظر، تعیین شود، ممکن است نتایج غیرمطلوبی از بازگشت سرمایهٔ پروژه ارائه دهد درحالی که ممکن بود پروژه سودبخش باشد. (هوچبام ۲۰۰۱) دید وسعی از هر دو الگوریتم لرچ و گروسمن و حداکثر جریان را تهیه کرد، و نشان داد که الگوریتم لرچ و گروسمن زاتاً از الگوریتم حداکثر جریان بسیار پیچیده‌تر است . به هر حال، این روش‌های مرسوم تنها محدودیت‌های منبع را نادیده نگرفته بودند، بلکه هر عدم‌قطعیت وابسته به متغیرهای ورودی را هم نادیده گرفته بودند.(میقروهمکاران، ۲۰۱۰) محدودیت‌های نظری استفاده از الگوریتم حداقل برش را برای محدودهٔ نهایی بهینهٔ معدن با عدم‌قطعیت‌های زمین‌شناسی و قیمت کالا مطرح کردند. به طور مشابه، (اسد و دیمیتراکوپولوس، ۲۰۱۳) لاگرانژ سست‌سازی محدودیت‌های منابع را برای طراحی فاز تولید و محدودهٔ نهایی معدن تحت عدم‌قطعیت‌های زمین‌شناسی و قیمت کالا بکار بستند. هر دو بر میانگین قیمت برگشتی یا ارزش مدل برای تولید شبیه‌سازی قیمت تکیه کرده، و پیرو ویژگی‌های مارکوف بودند، و ارزش حاضر را به عنوان اساس محاسبات احتمالات شرطی از قیمت آیندهٔ کالا در نظر گرفته بودند . به هر حال، شبیه به سایر روش‌های سری زمانی، قیمت آینده نیز وابسته به ارزش‌های قیمت کالا در گذشته می‌باشد. ارزش زمانی پول را در طراحی پیت در نظر گرفتند. سایر اهداف گستردهٔ تحقیق به عدم‌قطعیت قیمت‌های بازار و منابع آن معطوف می‌باشد . با افزایش آگاهی از توسعهٔ پایدار، صنایع معدنی مجاب به عملیاتی کردن معادن، نه فقط بر اساس اصول فنی و اقتصادی، بلکه مطابق با اصول پایداری، می‌شوند. قوانین وضع شده در کشورهای مختلف نیازمند وضع شدن ارزیابی تأثیر زیست محیطی و برنامهٔ بازسازی برای پروژه‌های معدنکاری است. تلاش‌های تحقیق‌های آکادمیک، وابستگی مسائل زیست محیطی را با معدنکاری نشان داد. ارزیابی چرخهٔ عمر معدن، یکی از رویکردهای وسیع استفاده شده برای ارزیابی تأثیر زیست محیطی، معدنکاری، فرآوری مواد معدنی، تصفیه و ساخت

می‌باشد. در مطالعات انجام شده در ارزیابی چرخهٔ عمر معدن، سیستم‌های معدنکاری تا حدود زیادی ساده‌سازی شده و جزئیات فرآیند معدنکاری مؤثر بر تأثیرات زیست محیطی به ندرت در نظر گرفته می‌شوند. مدل ارزیابی چرخهٔ عمر معدن که نشان دهندهٔ سیستم عمر معدنکاری به روش جزئی و کلی بود، ارائه کردند. مطالعات زیادی با دامنهٔ گسترده وجود دارد که فقط محیط زیست را پوشش نمی‌دهد بلکه مسائل اجتماعی مرتبط با معدنکاری را شامل می‌شود. موضوع اثرات اکولوژیکی وابسته به طراحی معدن پروژه‌های معدنکاری خاصی می‌باشند. عملیات معدنکاری روباز، در تغییرات اندازهٔ حد نهایی پیت، میانگین نرخ باطله‌برداری و عمر معدن تأثیرگذار است .

تئوری آشوب

واژه Chaos به طور سنتی به عنوان بی‌نظمی و آشوب و فقدان هر گونه ساختار یا نظم تعریف می‌شود. تعریف جدید آشوب اشاره بر آن دارد که بی‌نظمی ممکن است صرفاً سطح بالایی از پیچیدگی باشد که شاید از فرایندهای قطعی ناشی شود. (هیلز ،۱۹۹۰) آشوب یا بی‌نظمی را این‌گونه تعریف می‌کند: بی‌نظمی و آشوب نوعی نظم در بی‌نظمی است. بی‌نظم از آن رو که نتایج آن بی‌نظمی منظم غیرقابل پیش‌بینی است و منظم بدان جهت که از نوعی قطعیت برخوردار است. آدامز آشفتگی را این‌گونه تعریف می‌کند: از آشفتگی زندگی زائیده می‌شود درحالی‌که ازنظم عادت به وجود می‌آید. نظریهٔ آشوب پس از انتشار مقالات شاخص لی و یورک و همچنین میی مورد توجه قرار گرفت. معانی متفاوتی به کلمهٔ آشوب اطلاق می‌شود: برای گروهی رفتار به ظاهر خیلی پیچیده معنی می‌شود. در حالی که گروه دیگری تأثیر بال زدن یک پروانه را موجب آشوب می‌دانند. در مقالهٔ شاخص لی و یورک، آشوب به معنی وجود همزمان دور (سیکل) از هر طول تعبیر شده است. خواص دیگری که بعضی به آن علاقه‌مند هستند عبارتست از اینکه مسیرهای آشوبی به هر نقطه‌ای در فضا نزدیک شده ولی با وجود این در طول مسیر آشوبی شاخص‌هایی وجود دارد که پایا هستند. چند خاصیّت مهم یک پدیدهٔ آشوبی عباتست از:

۱- وجود دور (سیکل) از هر طول،
۲- وابستگی حساس به شرایط اولیه،
۳- وجود مسیرهای نامنظم غیرتناوبی ولی کراندار،
۴- برای هر مجموعهٔ باز A و B، نقطهٔ $x_0 \in A$ و عدد صحیح $k \in N$ وجود دارد، به طوری که $f^{(k)}(x_0) \in B$.

وابستگی حساس سیستم‌های آشوبی به شرایط اولیه به این معنی است که صرف نظر از این که مسیرهای مختلف در شروع چگونه باشند، نهایتاً بسیار دور از هم می‌شوند .

ویژگی‌های تئوری آشوب

- خودمانایی: در تئوری آشوب، نوعی شباهت بین اجزاء و کل، قابل تشخیص است. بدین ترتیب که هر جزئی از الگو همانند و مشابه کل می‌باشند. خاصیّت خودمانایی در رفتار اعضای سازمان نیز می‌تواند نوعی وحدت ایجاد کند، همهٔ افراد به یکسو و یک جهت و هدف واحدی نظر دارند. در معادلات آشوبی، الگوهای ترسیمی، نشانگر نوعی شباهت بین اجزا و کل می‌باشند، به این ترتیب که هر جزئی از الگو همانند و مشابه کل هستند.

- تأثیر پروانه‌ای: این تئوری به گونه‌ای است که یک تغییر جزئی در ابتدا منجر به یک دگرگونی بسیار بزرگ در پایان کار خواهد شد، لورنس می‌نویسد، اگر پروانه‌ای در "پکن" پر بزند

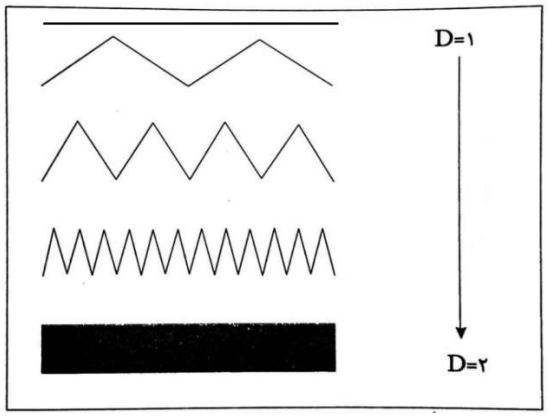
ممکن است بر اثر این پر زدن ابری حرکت کرده و در نیویورک طوفانی ایجاد شود،

۱-سازگاری پویا: سیستم‌های بی‌نظم در ارتباط با محیط‌شان مانند موجودات زنده عمل می‌کنند و نوعی تطابق و سازگاری پویا بین خود و محیط پیرامون‌شان ایجاد می‌کنند. از ویژگی‌های این سیستم خود کنترلی، هم‌افزایی اجزا، عناصر خود یاد گیرنده، انعطاف‌پذیری سیستم است. "والدراپ" نیز از این سازمان‌ها به عنوان "سیستم‌های پیچیده سازگار شونده" نام می‌برد،

۲-جاذبه‌های غریب: جاذبه‌های غریب در همه جا حضور دارند، همهٔ آنچه را که ما در نظر اول بی‌نظم وآشوبناک می‌یابیم در دراز مدت و با تکرار، الگویی منظم از خود نشان می‌دهند. جاذبه‌های غریب از الگویی پیروی می‌کنند که این الگو به آنان معنی مفهوم می‌بخشند .

هندسهٔ فرکتال

در هندسهٔ فرکتالی بیشترین توجه معطوف به ساختار زیرمجموعه‌های مختلف از هندسهٔ فضایی است. این فضا جایی است که فرکتال‌ها در آن زندگی می‌کنند. با اینکه فضای مورد نظر بسیار ساده است، امّا یک زیرمجموعهٔ فرکتالی ممکن است از نظر هندسی بسیار پیچیده باشد. مثال‌های فراوانی از مجموعه‌ها وجود دارند که عموماً فرکتال نامیده می‌شوند. فرکتال از کلمهٔ لاتین فرکتوسمشتق شده و به معنای شکسته است. این واژه برای توصیف اشیاء و اشکالی استفاده می‌شود که به دلیل بی‌نظمی زیاد قابل انطباق با مجموعه‌های هندسی کلاسیک نمی‌باشند. در طبیعت پدیده‌هایی وجود دارند که به علّت نامنظم بودن شکل‌شان، آن‌ها را نمی‌توان با هندسهٔ رایج (اقلیدسی) دقیقاً توصیف و اندازه‌گیری کرد. به عنوان مثال، دانهٔ کانی‌ها، پاره سنگ‌ها، جزیره‌ها، کوه‌ها، دریاها، قارّه‌ها و صفحات پوستهٔ زمین از این دسته‌اند. لازم به ذکر است که در هندسهٔ اقلیدسی فقط ابعاد عدد صحیح وجود دارند، خط یک‌بعدی، صفحه دوبعدی و مکعب سه‌بعدی است .بنابراین برای هر خط شکسته یا سطح ناهمواری می‌توان بعدی را بدست آورد که عدد صحیح نیست. به طور کلی، شکل ظاهری به میزان فاصلهٔ مشاهده شده بستگی دارد. لذا این سوال مطرح می‌گردد که چگونه می‌توان شکل پدیده‌ای را توصیف کرد که با چشم هموار، ولی به وسیلهٔ میکروسکوپ ناهموار به نظر می‌رسد. نظیر این سوال را می‌توان در مورد سطوح طبیعی زمین‌شناسی نیز مطرح کرد. برخی از سطوح در اثر فرآیند رسوب‌گذاری به وجود می‌آیند، برخی دیگر در اثر فرسایش یا پوسیدگی به وجود می‌آیند، برخی نیز به دلیل نوع محیط تشکیل به صورت ناهمگون توسعه پیدا می‌کنند. بدیهی است که مورفولوژی این سطوح با هم متفاوت می‌باشند. شکل ۱ نحوهٔ تغییرات بعد از یک تا دو مدل شده است .



شکل ۱- افزایش بعد فرکتال از یک تا دو

بنابراین می‌توان بیان نمود که بسیاری از ساختارهای زمین‌شناسی، مانند توپوگرافی، تغییرات عیار یک کانسار، تغییرات و نوسانات قیمت فلز با ارزش، از آمار فرکتالی پیروی می‌کنند. برای مطالعهٔ ساختارهای فرکتالی باید بعد فرکتال ساختارها اندازه‌گیری و محاسبه شوند. بدین ترتیب یک ابزار کمّی بدست خواهد آمد که به وسیلهٔ آن می‌توان بین

ساختارهای مختلف تمایز قایل شد.

محاسبهٔ بعد فرکتال

بعد فرکتال به روش‌های مختلفی محاسبه می‌شود که در ادامه به برخی از روش‌های محاسبهٔ بعد فرکتال اشاره می‌شود:

روش خودتشابهی

برای تمامی اشکال خودمتشابه، رابطهٔ نمایی ۱ برقرار است:

$$a = S^D \qquad (۱)$$

که در آن a تعداد اجزاء، S ضریب کوچک‌نمایی و D بعد فرکتال است .

روش آنالیز دامنهٔ مقیاس‌بندی مجدد

این روش در سال ۱۹۷۶ توسط ادوین هورسا برای محاسبهٔ ضریب هرست ارائه شد. بعدها که رابطهٔ ضریب هرست و بُعد فرکتال مشخص شد، استفاده از آن برای محاسبهٔ بُعد فرکتال نیز متداول شد. این روش بر این حقیقت استوار است که در سری‌های خودمتشابه، انحراف معیار اندازه‌گیری شده در یک پنجره، تابعی از ابعاد پنجره است. در این روش ضریب هرست به صورت تابعی از میانگین مجذور مربعات نوسانات در هر پنجره تعریف شده است. همچنین رابطهٔ ارائه شده در این روش در حوزه‌های مختلف علوم مانند ژئوفیزیک، اقتصاد، هواشناسی و متالورژی، برای محاسبهٔ ضریب هرست مورد استفاده قرار گرفته است. در روش آنالیز دامنهٔ مقیاس‌بندی مجدد، دو فاکتور مهم زیر برای آنالیز سری‌های زمانی مورد توجه قرار می‌گیرند.

الف- دامنه (R) که برای اختلاف بین حداقل و حداکثر مقادیر در یک پنجره مشخص است،

ب- انحراف معیار (S) که در هر پنجره‌ای قابل محاسبه است.

هرست نسبت R/S را محاسبه نمود و تعدادی رابطهٔ تجربی ارائه کرد که برای تشریح وقایع قابل استفاده بود. وی مشاهده کرد که برای بسیار از پدیده‌ها رابطهٔ ۲ بر قرار است:

$$\frac{R}{S} = (cs)^H \qquad (۲)$$

که در آن c ضریب ثابت، s پهنای پنجره و R و S نیز به ترتیب دامنه و انحراف معیار هستند. H نیز به عنوان ضریب هرست نام‌گذاری شد. رابطهٔ ۲ را می‌توان به صورت رابطهٔ ۳ نوشت:

$$\log\left(\frac{R}{S}\right) = H\log(s) + H\log(c) \qquad (۳)$$

نحوهٔ یافتن ضریب هرست بسیار ساده است. کای است نمودار لگاریتمی- لگاریتمی R/S بر حسب s ترسیم شود. شیب خط راست رگرسیون، همان نمای هرست خواهد بود. بعدها اثبات شد که بین ضریب هرست و بعد فرکتال رابطهٔ ۴ بر قرار است.

$$D = 2 - H \qquad (۴)$$

که در آن D بعد فرکتال است {۴، ۱۲}.

روش تجزیهٔ طیف توانی

یک سری زمانی را می‌توان در باند فرکانسی محدود با استفاده از روش طیف توانی تحلیل کرد. روش‌های زیادی برای محاسبهٔ طیف توانی وجود دارند که از آن جمله می‌توان به تبدیل فوریهٔ سریع و بیشینهٔ آنتروپی اشاره کرد که در ادامه توضیح مختصری ارائه شده و کاربردشان در محاسبهٔ بعد فرکتال شرح داده شده است.

روش تبدیل فوریهٔ سریع

فرکتال‌های خودمتشابه (که شبیه سیگنال‌های پایا) هستند در دامنهٔ فوریه با رابطهٔ ۵ نشان داده می‌شود .

$$P(f) = Af^{\beta} \qquad (۵)$$

که در آن $P(f)$ طیف توانی، A عدد ثابت، f فرکانس و β توان مقیاس است. در این حالت تابع خودمتشابه با رابطهٔ ۶ قابل تعریف است.

$$c(s) = \langle f_k\, f_{k+s} \rangle \approx S^{-\gamma} \qquad (۶)$$

که در آن S مقیاس و γ نمای همبستگی است. در فرکتال‌های خود متناسب (که شبیه سیگنال‌های ناپایا هستند) نمای همبستگی و مقیاس طیف توانی از رابطهٔ از رابطهٔ ۷ محاسبه می‌شوند.

$$\gamma = -2H \quad \& \quad \beta = 2H + 1 \qquad (۷)$$

نحوهٔ عملی محاسبهٔ نمای همبستگی و مقیاس طیف توانی در این روش به این صورت است که تغییرات طیف توانی نسبت به فرکانس در یک مقیاس لگاریتمی ترسیم شده و بهترین خط بر آن‌ها برازش داده می‌شود. بر اساس شیب خط و روابط ۵ تا ۷ می‌توان متغیرهای مورد نیاز را محاسبه کرد. همچنین بر اساس این متغیرها می‌توان ضریب هرست را نیز محاسبه نمود.

روش بیشینهٔ آنتروپی

روش تبدیل فوریهٔ سریع محدودیت‌هایی دارد که باری در سال ۱۹۷۵ سعی کرده با روش بیشینهٔ آنتروپی، آن‌ها را بر طرف سازد. روش باری مزایایی به شرح زیر دارد :

- با روش باری به شکل ساده‌تری می‌توان طیف توانی یک سری زمانی را بدست آورد،
- از این روش برای بدست آوردن چگالی طیف توانی سیگنال‌ها نیز می‌توان استفاده کرد،
- این روش خطای محاسباتی کمتری دارد،
- نتایج حاصل از این روش یکنواخت‌تر هستند.

عملیات این روش مشابه روش آنالیز دامنهٔ مقیاس‌بندی مجدد بوده و نتایج آن برای داده‌های پایا قابل اعتماد است. البته روش بیشینهٔ آنتروپی به دلیل رعایت بعضی جزئیات، ضریب هرست را با دقت بیشتری محاسبه می‌کند.

کاربرد فرکتال در تحلیل سری‌های زمانی

سری‌های زمانی، تجمع متغیرهایی هستند که در طول زمان قابل مشاهده می‌باشند. بعضی از داده‌های تجربی دارای آمارهای فرکتالی هستند. تحلیل و مدل‌سازی این آمارها به کمک روش‌های فرکتالی قابل انجام است. یکی از روندهای مورد انتظار از تحلیل فرکتال مطالعهٔ بعد فرکتالی می‌باشد. تحلیل فرکتالی سری زمانی (قیمت) در بررسی رفتار سیستم در طول تغییرات، از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. برای سری زمانی فرکتالی در فاصلهٔ یک دورهٔ تناوب $t_0 < t < T$، دامنهٔ متغیر تغییرات (R)، بستگی توانی به t دارد. به عبارت دیگر (رابطهٔ ۸):

$$R(t) = R(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2-D} \qquad (۸)$$

در رابطهٔ ۸ توان D بعد فرکتال سری زمانی است و طبق آن می‌توان اندازهٔ احتمال متغیر مورد سوال در تناوب‌های بعد را پیش‌بینی کرد. از بعد فرکتالی با مقدار مشخص می‌تواند به عنوان یک شاخص یا علامت بحران استفاده کرد. تحلیل داده‌های تجربی نشان می‌دهد که خط روند سری‌های زمانی با رابطهٔ ۹ قابل بیان می‌باشد:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(t_0) + \frac{k_f(t_0)(t-t_0)}{(D-D_0)^{\beta}} \qquad (۹)$$

$\bar{y}(t_0)$: میانگین تغییرات متغیر برای تناوب قبل از پیش‌بینی،

β و k_f: ضرائب t_0 تناوب زمانی قبل از تناوب پیش‌بینی،

t: تناوب زمانی که برای آن پیش‌بینی صورت می‌گیرد،

D_0: بعد فرکتالی برای تناوب قبل از پیش‌بینی.

پیش‌بینی سری زمانی

یکی از ویژگی‌های مهم سری‌های آشوبی این است که در یک سری زمانی وقتی دنباله‌ای از بردارهای حالت $y(k)$ به وجود می‌آید، این بردارها روی تمام جاذب غیرخطی، چگال بوده و رفتار $y(k)$های در نظر گرفته شده از بقیهٔ بردارها خیلی دورتر نخواهد بود. به عبارت دیگر یک سری زمانی در حالت مجانبی روی حالت به وجود آمده پافشاری می‌کند. بنابراین تقریباً تمام بردارهای حالت در حالت مجانبی رفتاری مشابه از خود نشان می‌دهند. لذا انتخاب نمونه‌ای از داده‌های سری زمانی تخمین صحیح متغیرها را در پیش‌بینی تضمین می‌کند. به عبارتی در یک سیستم آشوبی با داده‌های موجود متناهی می‌توان برآورد مناسبی از تابع پیش‌بینی داشت. در فضای حالت بازسازی شده، مجموعه‌ای از بردارهای حالت $y(k)$ حرکت تدریجی سیستم را در طول زمان بیان می‌کنند، بنابراین اگر τ را فاصلهٔ زمانی بین مشاهدات متوالی سری زمانی در نظر گرفت، با فرض این‌که در زمان $n\tau$ در حالت $y(n)$ باشد، پیش‌بینی سیستم عبارت از مشخص کردن حالت سیستم در زمان $(n+1)\tau$، یعنی $y(k+1)$ می‌باشد. بنابراین پس از بازسازی فضای پیشامد سیستم دینامیکی در قالب بردارهای سری زمانی، به منظور به دست آوردن تابع پیش‌بینی، بردارهای مختصات محاطی d بعدی به دست آمده را در یک نمودار رسم می‌شود. پس از رسم نمودار فضای پیشامد با داشتن سری زمانی $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ هدف پیش‌بینی مقدار x_{n+1} خواهد بود. به عبارت دیگر با توجه به بردار $y(k) = \left[x_{t_k-\tau}, \cdots, x_{t_k-(d-1)\tau}\right]$، پیش‌بینی عبارت از تعیین تابعی مانند f است به گونه‌ای که:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ y(k+1) = f(y(k)) \end{cases}$$

خطای پیش‌بینی نرمالیزه شدهٔ e روی نمونه‌ای از داده‌ها با N عنصر به صورت زیر قابل تعریف است:

$$e = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_x}$$

که σ_δ میانگین مربعات خطای پیش‌بینی و σ_x انحراف معیار نمونه، به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_\delta^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y(i) - \bar{f}(y(i-1))\right]$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

که $\bar{x}$ میانگین مقادیر مشاهدات می‌باشد. در رابطهٔ بالا هرگاه $e = 0$ شود، پیش‌بینی مناسبی صورت گرفته است و اگر $e = 1$ باشد میانگین داده‌ها به عنوان پیش‌بینی زمان بعد در نظر گرفته می‌شود. برای تعیین تابع پیش‌بینی $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$: این روش پیشنهاد می‌شود که ابتدا تابع $\bar{f}$ طوری تعیین می‌شود که رابطهٔ ۱۰ بر قرار باشد:

$$\begin{cases} \bar{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x(k+1) = x_{t_s} = \bar{f}(y(k)) \end{cases} \qquad (۱۰)$$

آن‌گاه مقدار $y(k+1)$، برای زمان بعد را به کمک تابع $\bar{f}$ به صورت زیر در فضای محاطی d بعدی محاسبه می‌شود:

$$y(k+1) = \left[f(y(k)), x_{t_k-\tau}, \cdots, x_{t_k-(d-2)\tau}\right]$$

ارائهٔ تکنیک محاسباتی مناسب برای پیش‌بینی سری زمانی قیمت

برای اعمال روش ارائه شده روی داده‌های واقعی، از آنجا که برآورد تابع $g(y(n), y(k))$ با اعمال روش کمترین مربعات در بسیاری از موارد با هزینهٔ محاسباتی بالایی همراه است، لذا برای اعمال روش محاسباتی در تقریب تابع $f: \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ فضای پیشامد حاصل از تمام بردارهای حالت در فضای L بعدی رسم می‌شوند. سپس تعداد k نزدیکترین همسایه از بردارهای L بعدی را به صورت تابع ارائه شدهٔ

$y(i) = [x_{t_i-\tau}, \cdots, x_{t_i-(L-1)\tau}]$ به ازای $i = 0, \cdots, k-1$ انتخاب کرده و با درون‌یابی این k تعداد بردار پیشامد از فضای محاطی L بعدی، مقدار $f(y(k))$ مربوط به مقدار آیندهٔ بردار $[x_{t_k-\tau}, \cdots, x_{t_k-(L-1)\tau}]$ پیش‌بینی می‌شود. در ساده‌ترین حالت، تکنیک محاسباتی درون‌یابی منجر به حل دستگاه $Az = b$ می‌شود که در آن A و b به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \begin{bmatrix} x_{t_1-\tau} & \cdots & x_{t_1-(L-1)\tau} \\ x_{t_2-\tau} & \cdots & x_{t_2-(L-1)\tau} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{t_k-\tau} & \cdots & x_{t_k-(L-1)\tau} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} x_{t_0} \\ x_{t_1} \\ \vdots \\ x_{t_{k-1}} \end{bmatrix}$$

به این ترتیب برای پیش‌بینی مقدار $f(y(k+1))$ عبارت زیر موجود خواهد بود:

$$f\big(y(k+1)\big) = [x_{t_{k+1}-\tau}, \cdots, x_{t_{k+1}-(L-1)\tau}] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_t \end{bmatrix}$$

روشن است که برای به دست آوردن تابع پیش‌بینی در روش فوق، با توجه به رفتار فرکتالی سری زمانی، مسئلهٔ مهم و مجهول تخمین بعد محاطی و یا تعداد مناسب نزدیکترین همسایگی یعنی l می‌باشد.

تخمین بهینهٔ نزدیک‌ترین همسایگی

برای تخمین بهینهٔ متغیر l_{opt} یکی از روش‌های پیشنهادی، تقسیم مجموعهٔ داده‌های موجود به دو قسمت می‌باشد. با اعمال روش پیش‌بینی روی قسمت اول به ازای l مفروض نتایج به دست آمده با مقدار واقعی یعنی داده‌های قسمت دوم مقایسه می‌شوند. مقدار خطای پیش‌بینی را محاسبه کرده و نهایتاً مقداری برای l انتخاب می‌شود که در مقایسهٔ مقدار پیش‌بینی شده با مقدار واقعی، خطای کمتری داشته باشد. اما این روش به دلیل این که به ازای هر مقدار l تمام مراحل پیش‌بینی را تکرار می‌کند دارای هزینهٔ بالایی است، به همین دلیل از روش دیگری برای تخمین بهینهٔ l استفاده می‌شود. روشن است که حداقل نقاط زوج مرتب لازم برای نمایش یک سری زمانی با بعد فرکتالی d برابر با $d+1$ است. به این ترتیب تعداد نقاط بهینهٔ نزدیک‌ترین همسایگی به صورت خطی با بعد فرکتالی سری زمانی ارتباط دارد، یعنی $l_{opt} = O(d)$. حال با توجه به قضیهٔ محاطی تیکن و با در نظر گرفتن نویزهای احتمالی می‌توان برای درون‌یابی بهتر، تعداد نقاط بهینه را به صورت $l_{opt} = 2d+1$ در نظر گرفت. این مقدار l هم از لحاظ دقت مقدار پیش‌بینی و هم از جهت هزینهٔ زمانی نسبت به روش‌های دیگر دارای مزیّت می‌باشد. به این ترتیب با تعیین بعد فرکتالی یک سری زمانی مطابق قضیهٔ تیکن با انتخاب $l_{opt} = 2d+1$ دادهٔ پیشین، مقدار آینده را با درون‌یابی مناسب به کمک روش حداقل‌سازی مربعات خطا از طریق تابع چندجمله‌ای مناسب و یا توابع کسری s شکل به دست می‌آید.

قضیهٔ محاطی تیکن: هرگاه M یک منیفلد فشرده با بعد m و $f: M \to M$ یک تابع هموار و معکوس‌پذیر روی M و $y: M \to R$ یک تابع اندازه‌گیری (مشاهده) با مقدار حقیقی باشد، آن‌گاه برای $x \in M$ مجموعهٔ $X = \big(y(x), y(f(x)), \cdots, y(f^{2m}(x))\big)$ یک محاط از منیفلد M می‌باشد.

تعریف منیفلد: یک منیفلد مانند M با بعد m، فضای توپولوژیکی هاسدورف تفکیک‌پذیری است که به طور موضعی مشابه R^m می‌باشد. به این معنی که هر نقطهٔ آن دارای همسایگی باز است که با یک زیرمجموعهٔ باز از R^m هم‌ریخت می‌باشد.

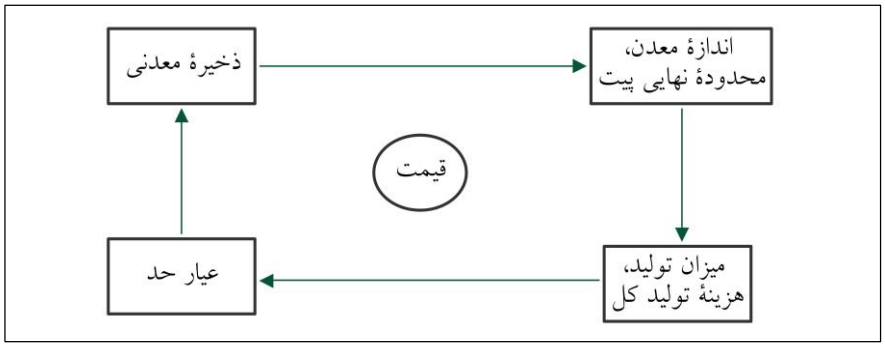
تعریف فاصلهٔ هاسدورف: مفروض است (X,d) یک فضای متری کامل و $A,B \in H(X)$ باشد، آنگاه فاصلهٔ هاسدورف بین نقاط A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A)$$

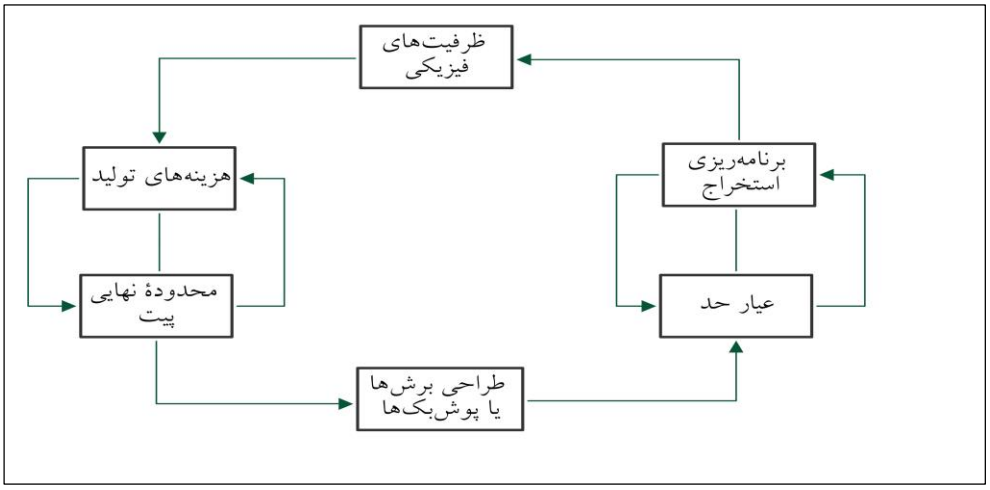
نتیجه‌گیری

عیار حد به منظو تشخیص کانسنگ از باطله تعریف می‌شود. عیار حد خیلی بالا میزان استخراج از ذخیره و عمر معدن را کاهش و عیار حد خیلی کم باعث کاهش متوسط عیار و تقلیل سود می‌گردد. عیار حد بالا، زمان دسترسی به سود و ارزش خالص فعلی پروژه را کوتاه و در نتیجه امکان دریافت سود بیشتر از سوی سهامداران را در زمان کوتاه افزایش می‌دهد، همچنین عیار حد بالا اطمینان از بازگشت سرمایه در دورهٔ کوتاه را افزایش و ریسک سیاسی را کاهش می‌دهد، مخصوصاً زمانی که قیمت فلز بالا است انتخاب عیار حد بالا موفقیت شرکت معدنی را از نظر درآمدزایی قوی و ریسک کاهش احتمالی قیمت فلز را که ممکن است به وقوع بپیوندد کاهش می‌دهد، ضمن اینکه به هنگام بالا بودن قیمت فلز ممکن است از عیار حد کم استفاده کرد تا عمر معدن را افزایش و مواد پر عیار را انبار و برای زمانی که قیمت کاهش پیدا می‌کند استفاده کرد تا با هزینهٔ کمتر سود کافی حاصل نمود. عیار حد بالا علاوه بر کاهش عمر معدن می‌تواند موجب از دست فتن فرصت‌هایی شود که قیمت فلز به ازای هر سیکل زمانی مشخص، افزایش پیدا می‌کند. از طرفی میزان تولید با مقدار هزینه ارتباط دارد. تولید کم باعث افزایش هزینهٔ کل تولید اعم از هزینه‌های سرمایه‌گذاری و عملیاتی می‌شود. در تولید کم هزینهٔ سرمایه‌گذاری کم اما هزینهٔ عملیاتی تا نقطه‌ای کاهش پیدا می‌کند که کمترین هزینهٔ عملیاتی اتفاق خواهد افتاد بعد از این نقطه، مجدداً هزینه‌های سرمایه‌گذاری و عملیاتی افزایش پیدا خواهند کرد. در نقطه‌ای که هزینهٔ عملیاتی از کمترین مقدار برخوردار است میزان تولید در معدن روباز از نظر هندسهٔ کل بهینه خواهد بود. اگر هدف کمینه کردن عمر معدن باشد در این صورت باید هزینهٔ کل (عملیاتی و سرمایه‌گذاری) افزایش یابد. همچنین در صورتی که عمر معدن طولانی در نظر گرفته شود، هزینهٔ عملیاتی به دلیل پایین بودن تولید، زیاد خواهد بود. بالا بودن قیمت فلز اجازه می‌دهد تا ذخایری که از پیچیدگی زیادتر و عمق بیشتر برخوردارند استخراج شوند. عیار حد به طور مستقیم بر جریان‌های نقدینگی عملیات استخراج اثر می‌گذارد، بر این اساس عیارهای حد بالاتر در هر تن مادهٔ معدنی، عیارهای متوسط بالاتری را به دست می‌دهد، لذا درآمدها در هر ذخیره بستگی به پراکندگی عیار/تناژ در ذخیره دارد. یکی از دشواری‌های اصلی در تعیین عیار حد، محاسبهٔ درست هزینه‌ها در مرحله‌های گوناگون فرآیند معدن‌کاری است. این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که بیشتر هزینه‌های معدن‌کاری به شرایط ویژهٔ هر معدن بستگی دارد. در عملیات معدن‌کاری برای محاسبهٔ عیار حد بیشتر متغیرهای هزینهٔ استخراج، هزینهٔ فرآوری، هزینهٔ بازاریابی و فروش، قیمت فلز (محصول نهایی) و بازیابی فلز یا کانی در مرحلهٔ فرآوری به کار می‌رود. در تعیین محدودهٔ نهایی بهینهٔ پیت، یکی از عوامل مؤثر در دقت تعیین ارزش اقتصادی بلوک‌ها، تعیین دقیق عیار حد است و بدون آن امکان محاسبهٔ دقیق ذخیرهٔ قابل استخراج (Minable ore reserve) وجود ندارد. امروزه عامل قیمت به عنوان مهمترین عامل در طراحی معادن روباز و تعیین محدودهٔ نهایی معدن شناخته شده است. در طراحی معادن روباز که منجر به تعیین محدودهٔ نهایی معدن می‌گردد به اطلاعات اکتشافی، هیدرولوژی و اقتصادی نیاز است تا بتوان با محاسبهٔ انواع نسبت‌های باطله‌برداری به مادهٔ معدنی، عیار حد، ارزش اقتصادی بلوک و شیب معدن، محدودهٔ نهایی پیت را تعیین کرد. لازم به ذکر است که برای تعیین محدودهٔ نهایی پیت باید

هزینه‌های تواید در اختیار باشد، از طرف دیگر هزینه‌های تولید خود وابسته به محدودهٔ نهایی پیت است. ارتباط بین عوامل مختلف در طراحی معدن روباز طی شکل ۲ و ۳ ارائه شده است. لازم به ذکر است که اصول توسعهٔ پایدار شامل مباحث اجتماعی، اقتصادی و زیست محیطی است لذا تعیین عیار حد درست می‌تواند منجر به تخمین درستی از قیمت فلز شده که در طراحی و برنامه‌ریزی معادن متغیرهای مهمی به شمار می‌روند. به طور کلی تقاضا برای مواد معدنی، از تقاضا برای محصول نهایی نشأت می‌گیرد و در بسیاری موارد خود مادهٔ معدنی سهم نسبتاً کمی از کل هزینهٔ تولید را شامل می‌گردد. تقاضا برای محصولات معدنی تحت کنترل سبک‌ها، تغییرات تکنولوژیکی در بازارهای نهایی، مقررات دولتی و در یک کلام قیمت‌های نسبی است. اگر بتوان با استفاده از روابط و فرمولاسیون ارائه شده در این تحقیق، تخمین درستی از قیمت فلز حاصل شود و همچنین بتوان عیار حد فلز مورد نظر (مس) را از ۰/۱۵ درصد به ۰/۱ درصد رساند، با توجه به اصول توسعهٔ پایدار، محدودهٔ نهایی معدن پایدارتر شده و حوزهٔ دست‌خوردگی زمین مشخص‌تر می‌شود. به این ترتیب حمایت و حفاظت از مسائل زیست محیطی بهتر رعایت می‌گردد.



شکل ۱- ارتباط عیار حد و سایر عوامل مؤثر در تعیین محدودهٔ نهایی پیت



شکل ۳-متغیرهای مرتبط با تعیین محدودهٔ نهایی پیت

منابع

- **A. K. Evans ،(1998)**. "The Fourier dimension and the fractal dimensions". Chaos, Solitons and Fractals, 9(12).

- **Abdel Sabour, S.A., Dimitrakopoulos, R., (2011)**. "Incorporating geological and market uncertainties and operational exibility into open pit mine design". J. Min. Sci. 47 (2), 191–201.

- **Asad, M.W.A., Dimirakopoulos, R., (2013).** "Implementing maximum flow algorithm for optimal open pit mine design under uncertain supply and demand". Journal of Operational Research Society, 64, 185-197.

- **Aue A., Horavath L. and Steinebach L., (2007)**, "Rescaled Range Analysis in the Presence of Scochastic Trend", Statistic & Probability Letters, pp. 1165-1175.

- **Barral J. and Mandelbort B.B., (2001),** "Multifractal Stationary Random Measures and Multifractal Random Walks with Log Infinitely Divisible Sealing Laws", Cowles Foundation Discussion Paper, N 1887.

- **Barraquand, J., Martineau, D., (1995).** "Numerical valuation of high dimensional multivariate American securities". J. Financial Quant. Anal. 30 (3), 383–405.

- **Berridge, S., Schumacher, J.M., (2004).** "An irregular grid method for high dimensional free-boundary problems in finance". Future Gener. Comput. Syst. 20, 353–362.

- **Black, F., Scholes, M., (1973).** "The pricing of options and corporate liabilities". J. Political Econom. 81 (3), 637–654.

- **Boeing (2015)**. "Chaos Theory and the Logistic Map". Retrieved 2015-07-16.

- **Boeing, G. (2016).** "Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction". Retrieved 2016-12-02.

- **Broadie, M., Glasserman, P., (1997).** "Pricing American-style securities using simulation". J. Econom. Dyn. Control 21, 1323–1352.

- **Chamboli A., Bansal A.R. and Dimiri V.P., (2007)**, "Wavelet and Rescaled Range Approach for the Hurst Coefficient for Short and Long Time Series", Computer and Geosciences, pp. 83-93.

- **Cortazar, G., Schwartz, E.S., Casassus, J., (2001)**." Optimal exploration investments under price and geological–technical uncertainty: a real options model". R&D Manage. 31 (2), 181–189.

- **Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M., (1979).** "Option pricing: a simplified approach". J. Financial Econom. 7 (3), 229–263.

- **Dimitrakopoulos, R., Martinez, L.S., Ramazan, S., (2007).** "A maximum upside/ minimum downside approach to the traditional optimization of open pit mine design". Journal of Mining Science 43, 73–82.

- **Dimitrakopoulos, R., Farrelly, C.T., Godoy, M., (2002).** "Moving forward from traditional optimization—Grade uncertainty and risk effects in open pit design, Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy". Mining Technology 111, 82–88.

- **Dimitrakopoulos, R., Godoy, M., Chou, C.L., (2009).** "Resource/reserve classification with integrated geometric and local grade variability measures". Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, 207–214.

- **Dowd, P. (1997).** "Risk in minerals projects: Analysis, perception and management". Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, 106, A9–A18.

- **Durucan S, Korre A, Munoz-Melendez G،(2006).** "Mining life cycle modeling: A cradle-to-gate approach to environmental management in the minerals industry" [J]. Journal of Cleaner Production, , 14 (12): 1057−1070.

- **Evatt, G.W., Soltan, M.O., Johnson, P.V., (2012**). "Mineral reserves under price uncertainty". Resour. Policy 37, 340–345.

- **Godoy, M.C., Dimitrakopoulos, R., (2004).** "Managing risk and waste mining in long term production scheduling." SME Transactions 316, 43–50.

- **Heidelberg Mandelbort B.B., (1982),** "The Fractal Geometry of Nature", Freeman & Company, San Francisco.

- **Hochbaum, D. S. (2001).** "A new-old algorithm for minimum-cut and maximum-flow in closure graphs". Networks, 37(4), 171–193.

- **Kuchta, M., (1990),** "Improved mine planning using geostatistical and fractal geometry for geologic modeling", PhD thesis, Lulea, Sweden.

- **Latorre E, Golonsiski T S.(2011)**,"Definition of economic limits taking into consideration of time value of money" [J]. Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum (CIM) Journal, 2 (3): 162−170.

- Lamghari, A., Dimitrakopoulos, R., & Ferland, J. A. (2014). "A variable neighbourhood descent algorithm for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty". Journal of the Operational Research Society, 65, 1305–1314.

- Latorre E, Golonsiski T S. ،(2011) ".Definition of economic limits taking into consideration of time value of money." [J]. Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum (CIM) Journal, , 2 (3): 162−170.

- Leite, A., Dimitrakopoulos, R., (2007). "A stochastic optimization model for open pit mine planning—Application and risk analysis at a copper deposit". Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section A—Mining Technology 116, 109–118.

- Lin A. and Liu L.,(2009), "Chaotic SVD Metod for Minimizing the Effect of Exponential Trends in Determined Fluctuation Analysis", Physica A, pp. 720-726.

-Longstaff, F.A., Schwartz, E.S., (2001). "Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. Rev". Financial Stud. 14 (1), 113–147.

- Meagher, C., Abdel Sabour, S.A., Dimitrakopoulos, R., (2010). "Pushback design of open pit mines under geological and market uncertainties". Advances in Orebody Modeling and Strategic Mine Planning I, 477 AusIMM Spectrum Series, 17, 297-304.

- Monkhouse, P.H.L., Yeates, G., (2005). "Beyond naive optimization, in Orebody modelling and strategic mine planning", 14. The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Melbourne, pp. 3–8.

- Walter S. Whyte and Paul R.E., (1997), "Basic Surveying, Elsevier Science & Technology", 355 p.

Fundamentals of Chaos Theory and Fractal Geometry for Determination of Open Pit Mines' Planning and Design Parameters regarding Sustainable Development

OMid Mohammadi[1], Afshin Akbari Dehkhorani[2*] & Seyed Mosleh Eftekhari[3]

1-PhD student in Mining Engineering, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran
2-Department of Petroleum, Mining and Materials Engineering, Islamic Azad University, Central Tehran Branch
3-Mining Engineering Department, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran

Abstract

Since all mining projects are subjected to uncertainty, risk analysis of these projects is essential. It is also possible to know the exact amount of minable reserve, due to its location in the underground and the operating limitations, when the entire reserve is extracted. Therefore, the effective parameters in the technical and economic evaluation of mining projects are highly diverse and all of them are subject to wide variations with respect to the quantitative and qualitative dimensions of the data. This process is caused by causes beyond human control, and sometimes, no matter how much it costs, full information is not possible. Hence, in all mining projects, in calculating income and expenditure figures and therefore economic calculations, they have to take into account the margin of confidence and are required to calculate risk. It would make more logical to consider the probabilistic changes of effective parameters in the economic analysis of mining projects. And taking into account the least and most likely occurrence of each row. When one of the most important issues with uncertainty is the price of metal, then uncertainty in the ultimate pit limit determination is raised. Since metal price prediction is uncertain, chaos theory and fractal geometry can be used to predict metal price. In this study, chaos theory and fractal geometry have been used to estimate the metal price correctly, since the metal price changes follow fractal and chaotic behavior. Therefore, if a correct estimate of the metal price is obtained, the ultimate pit limit will be close to reality and based on that the optimal pit limit can be obtained, which according to the principles of sustainable development leads to the metal mining at a lower price and the ultimate pit limit is more sustainable and has better environmental protection.

Keywords: Ultimate pit limit, Uncertainty, Chaos theory, Fractal Geometry, Metal price, Sustainable development.