نشریه علمی ***ابتکار و خلاقیت در علوم انسانی*** http://journal.bpj.ir
دورهٔ داوزدهم، شمارهٔ سه، زمستان ۱۴۰۱، صص ۲۱۹-۲۶۰. مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۲۵

بررسی خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزانِ پایه دهم با استفاده از طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته

مجید یوسفی[۱]، ابراهیم ریحانی[۲*] و محمدحسن بهزادی[۳]

چکیده

زمینه: در بحث بُروز و ارتقاء خلاقیت، قطعاً فرایندهای محرک و پرورش‌دهنده خلاقیت و همچنین اندازه‌گیریِ خلاقیت، نقش مهمی ایفا می‌کنند. به اعتقادِ بسیاری از محققان آموزشِ ریاضی، طرح مسئله ریاضی و تدریس با رویکرد بازپاسخ، فرایندهایی مهم برای تحریک، رشد و سنجشِ خلاقیتِ ریاضی به‌شمار می‌روند.

هدف: این پژوهش بررسی و اندازه‌گیریِ خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزان پایه دهم با استفاده از طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته است.

روش: پژوهش حاضر به روش توصیفی از نوع زمینه یابی انجام شده است .جامعه آماریِ در دسترس، تعداد ۱۵۸ نفر از دانش‌آموزانِ پایه دهم مدارس استعدادهای درخشانِ شهرستان‌های ورامین، قرچک و پاکدشت در جنوب‌شرقی استان تهران در سال تحصیلیِ ۱۳۹۹-۱۴۰۰ بوده‌اند. برای گردآوری داده‌ها، از یک آزمونِ محقق ساخته، شامل دو سؤالِ طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌هایی ساختاریافته (استویانوا و الرتون)، استفاده شده است. روایی آزمون توسط اساتید آموزش ریاضی و دبیران مجربِ ریاضی مورد تأیید قرار گرفت. ضریب آلفای کرونباخِ سؤالات آزمون، ۰/۷۱ و ۰/۸۲ محاسبه شدند که این مقادیر، وضعیت مناسبی را در مورد پایایی آزمون نشان می‌داد.

یافته‌ها: نتیجه آزمون، نمره خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزانِ پایه دهمِ مدارس استعدادهای درخشان عددِ ۰/۲۰۸۲ را نشان داد. نتیجه پژوهش نه تنها حاکی از آن بود که دانش‌آموزان پایه دهم از سطح خلاقیتِ ریاضیِ پایینی برخوردار هستند، بلکه بر عدم وجود یا ناکافی بودنِ موقعیت‌های مواجهه این دانش‌آموزان با فعالیت‌ها و تکالیفِ تقویت‌کننده خلاقیت ریاضی، از جمله طرح مسئله و تکالیفِ بازپاسخ، در کلاس‌های درسِ ریاضی تأکید داشت.

نتیجه‌گیری: لازم است برای دانش آموزان فرصت‌های کافیِ مواجه شدن با تکالیفِ طرح مسئله و فرایند مسائل بازپاسخ فراهم شود.

کلید واژه‌ها: خلاقیت ریاضی، دانش‌آموزان، طرح مسئله، مسئله بازپاسخ.

۱. دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران majidyousefi961355@yahoo.com
۲. دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران(نویسنده مسئول) e_reyhani@ sru.ac.ir
۳. دانشیار گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران ac.ir.behzadi@srbiau

پیشگفتار

در قرن بیست و یکم، تحولات اقتصادی ـ اجتماعی و پیشرفتِ علوم و فناوری، به افرادِ با طیفی گسترده از مهارت‌ها، برای سازگاری و زندگی در شرایطِ رقابتی و در حال تغییرِ جامعه امروز، نیاز دارد (سازمان همکاری توسعه اقتصادی[1]، ۲۰۱۵). در پاسخ به این نیاز، سازمان‌ها و بنگاه‌های اقتصادی مختلف، مجموعه «مهارت‌های قرن بیست و یکم» را معرفی کردند. در میان این مهارت‌ها، خلاقیت به‌عنوان یک مهارتِ مهم و برجسته به‌منظور آماده‌سازی و توانمند کردنِ دانش‌آموزان در برابرِ تغییرات، نه تنها در جامعه امروز بلکه برای آینده، شناسایی و مورد تأکید قرار گرفته بود (به‌عنوان مثال، NRC[2] ، ۲۰۱۲؛ یونسکو[3] ۲۰۱۶؛ مشارکت برای مهارت‌های قرن بیست و یکم[4] ۲۰۱۸). لوبارت[5] و گویگنارد[6] (۲۰۰۴)، معتقدند که به دلیل پیشرفتِ سریع در فناوری، شهروندانِ آینده باید به روش‌های خلاقانه برای مقابله با چالش‌های جدید فکر کنند. بنابراین سیستم‌های آموزشیِ کشورهای مختلف، ارتقاء و توسعه خلاقیتِ دانش‌آموزان را مورد تأکید قرار داده و در سیاست‌های آموزشی و برنامه درسیِ خود لحاظ کرده‌اند (OECD، ۲۰۱۵).

مسلماً تفکر خلاق و خلاقیت باید در نظام آموزشیِ کشورها و همچنین در تمام فرایندها و زیرساختارهای این نظام‌ها، از جمله برنامه‌های درسی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار باشد چرا که به نوعی تمامِ ابعاد و جنبه‌های دیگرِ آموزش و یادگیریِ دانش‌آموزان را دربر می‌گیرد و میزان موفقیت و دستاوردهای آموزش و یادگیریِ دانش‌آموزان را تحت تأثیر قرار می‌هد (هتزرانی[7] و همکاران، ۲۰۱۹).

به وضوح با گذر زمان، امروزه اهمیت خلاقیت غیرقابل انکار است، هم به‌عنوان وسیله‌ای برای تکمیلِ فرایندهای آموزشی و هم به‌عنوان محصول و نتیجه خودِ خلاقیت. اهمیت خلاقیت به‌عنوان

1Organisation for Economic Co – operation and Development (**OECD**)
2NRC: National Research Council.
3UNESCO: United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
4Partnership for 21St-century Skills
5Lubart
6Guignard
7Hetzroni

وسیله‌ای برای رسیدن به هدف، ریشه در اصول ویگوتسکی دارد که می‌گوید خلاقیت و تخیل از مکانیسم‌های اصلیِ هر فرایند یادگیری هستند. طبق این اصل، افراد خلاق یادگیرندگان بهتری هستند، چون آنها این توانایی را دارند که به‌طور انعطاف‌پذیر از دانشِ خود در موقعیت‌های جدید و به شیوه‌ای اصیل استفاده کنند به علاوه می‌توانند بخشی از دانش و مهارت‌هایشان را با اطلاعاتِ تازه به‌دست آمده، ارتباط دهند. بنابراین پرورش خلاقیت در جهت توسعه یادگیرندگانِ بهتر، ضروری است (لیکین[1] و الگرابلی[2]، ۲۰۲۲).

در سال‌های اخیر تعاریفِ روشن‌تری از خلاقیت ارائه شده است، تعاریفی که خلاقیت را به‌عنوان یک ابزار قدرتمند، سازنده و پیشران در حل مسائلِ علمی، در مواجهه با مشکلاتِ زندگی امروز و در فرآیندگی معرفی می‌کنند. تعدادی از این تعاریف، که خود دلایلی بر اهمیتِ بُروز و پرورشِ خلاقیت هستند، را در جدول ۱ آورده‌ایم.

خلاقیت به‌عنوان یک استعدادِ بالقوه نیازمندِ توجه و پرورش است. به‌کارگیریِ این استعداد، به خلقِ ارزنده‌ترین آثار در حوزه‌های علمی، هنری و اجتماعی می‌انجامد (وانگ[3]، ۲۰۱۸؛ نقل شده در میرزاصفی[4] و یعقوبی[5]، ۱۴۰۰).

تمامی تحقیقات و آزمون‌های مربوط به خلاقیت، روی یک ویژگی اشتراک نظر دارند و آن همگانی بودنِ توان، استعداد وخلاقیت است و همچنین اکثرِ اهل فن در این زمینه، بر اکتسابی بودن و قابلیت رشدِ آن در افراد تأکید دارند (رضازاده بهادران و اسکندری، ۱۳۹۷).

1 Leikin
2 Elgrably
3 Wang
4 Mirzasafi
5 Yaghoobi

جدول ۱. چند تعریفِ نو از خلاقیت

پژوهشگر یا پژوهشگران	تعریف
رضازاده بهادران[1] و اسکندری[2] (۱۳۹۷)	خلاقیت نگاهی نو به دنیای پیرامون برای مواجهه بهتر با مسائلی است که رویارویی با آنها قطعی و اجتناب‌ناپذیر است.
گلاونو[3] (۲۰۱۸)	خلاقیت، ابتکار و نوآوری، مرحله‌ای از رشد عقلی است که می‌تواند منجر به ساخت و ایجاد موقعیتی برای راحت زیستن شود (نقل شده در شکوهی امیرآبادی[4] و همکاران، ۱۳۹۷).
بروجردی[5] و همکاران (۱۳۹۹)	خلاقیت نوعی پتانسیل و توانایی است که در تفکر، اندیشه، قلم، رفتار و اَعمالِ انسان بُروز یافته و یکی از الزاماتِ اساسی زندگی پیچیده و مدرنِ امروزی است (نقل شده در باقری[6] و لطیفی[7] ۱۴۰۰).
سعیدی[8] و پیرخائفی[9] (۱۳۹۹)	خلاقیت نوعی توانایی در تولید ایده‌های نو از طریق ترکیب، تغییر و دوباره به‌کارگیریِ آنها و ارائه یک طرح جدید است که ظهور آن مستلزم پرورشِ درست است.
کای[10] و همکاران (۲۰۲۰)	خلاقیت ابزاری است که افراد از طریق آن ایده‌ها، محصولات و فرایندهای جدید و مفید تولید می‌کنند و همچنین خلاقیت، برای تصور و ایجاد روش‌های کاریِ جدید که ساخته می‌شوند، مورد نیاز است.

هایلوک[11] (۱۹۸۷)، دشواریِ تعریف خلاقیتِ ریاضی را مطرح کرد. به اعتقاد وی خلاقیتِ ریاضی را می‌توان به دو دسته از توانایی‌ها تقسیم کرد، یکی غلبه بر ثبات فکری و ذهنیت‌های متعارف و دیگری ارائه دادنِ پاسخ‌های خلاقِ متفاوت به مسائل ریاضی. مان[12] (۲۰۰۵)، معتقد است که خلاقیتِ ریاضی به‌عنوان یک مهارتِ اساسی باید مورد توجه قرار گیرد و در همه دانش‌آموزان تقویت شود. همچنین OECD (۲۰۱۷)، چارچوب سواد ریاضی برای برنامه بین‌المللی ارزیابی

1 Reza zade Bahadoran
2 Eskandari
3 Glaveanu
4 Shokouhi Amirabadi
5 Boroujerdi
6 Bagheri
7 Latifi
8 Saeidei
9 Pirkhaefi
10 Cai
11 Hoylock
12 Mann

دانش‌آموزان (PISA[1]، ۲۰۲۱) را با افزودنِ مهارت‌های قرن بیست و یکم از جمله خلاقیتِ ریاضی، گسترش داد. سریرامان[2] و همکاران (۲۰۱۳)، وِسِلز[3] (۲۰۱۴)، شارما[4] (۲۰۱۴)، آریکان[5] (۲۰۱۷) بیان می‌کنند که پرورشِ خلاقیتِ ریاضی باید یکی از مؤلفه‌هایِ اصلیِ آموزش ریاضی درنظر گرفته شود.

نقش ریاضیات در زندگی امروز به ویژه در حل مسائل دنیای واقعی، در پرورش نیروهای متفکر، خلاق و تأثیرگذار و همچنین در تربیت دانش‌آموزانی که در آینده به شهروندانی با خلاقیتِ بالا و توانایی بکارگیری دانشِ خود در زمینه‌های گوناگون مبدل شوند، غیرقابل انکار است. برای تحقق این امر، احتیاج به برنامه‌هایِ آموزشِ ریاضیِ حساب شده و روش‌های یاددهی و یادگیریِ خاص داریم که نتیجه آن ارتقاء خلاقیت و پرورشِ دانش‌آموزانی باشد که در غیاب معلم و کتاب درسی هم بتوانند فکر کنند، استدلال کنند، خلاقانه ایده‌ها و روش‌های قبل را تغییر داده تا قابل استفاده در مسئله‌ای دیگر باشد. در این راستا به گفته بسیاری از صاحب‌نظران، برنامه‌های آموزشِ ریاضی نیز باید به سمتی حرکت کند که اولاً دانش‌آموزان، ریاضی را تنها علم اعداد، ارقام، فرمول و محاسباتِ محض ندانند، بلکه بتوانند بین آنچه که فرا می‌گیرند و آنچه در دنیای واقعی اتفاق می‌افتد ارتباط برقرار و سعی کنند از آموخته‌هایشان به نحو مؤثر در موقعیت‌های پیش‌رو استفاده نمایند و ثانیاً محتوای این برنامه آموزشی به ارتقاء خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزان کمک کند. از این‌رو متخصصان و محققانِ آموزش ریاضی، به شناساییِ تکالیف، فعالیت‌ها و ابزارهایی پرداختند که استفاده از آنها در فرایند تدریس، به بُروز، پرورش و ارزیابیِ خلاقیتِ ریاضی کمک کند. (آمادو[6] و همکاران، ۲۰۱۸؛ لیکین و سریرامان، ۲۰۱۶؛ OECD، ۲۰۱۹).

با این حال به دلیل وجود طیف گسترده‌ای از دیدگاه‌ها در مورد خلاقیت، هنوز توافقی عام

1 PISA: The OECD Programme for International Student Assessment
2 Sriraman
3 Wessels
4 Sharma
5 Arikan
6 Amado

در مورد انواع تکالیف ریاضی که موجب رشد خلاقیت می‌شوند یا امکان ارزیابی خلاقیت را فراهم می‌کنند ویا کدام مؤلفه خلاقیت می‌تواند و باید پرورش داده شوند و مورد ارزیابی قرار گیرند، وجود ندارد (لیکین و الگرابلی، ۲۰۲۲).

لوریا[1]و همکاران (۲۰۱۷) چند عامل را در پرورش خلاقیت ریاضی مؤثر می‌دانند، راهبردهایی همچون ارائه مسائل بازپاسخ، مدل‌سازی، تشویق به ریسک‌پذیری، بحث و مناظره در مورد مفاهیم ریاضی، یادگیریِ مبتنی بر مفهوم، استراتژی‌های تفکر متفاوت در طول فعالیت‌های حل مسئله، گنجاندنِ آگاهی‌های فرهنگی، ابتکار در تنظیم برنامه درسی و محیط کلاس درس (نقل شده در سانچز[2]و همکاران، ۲۰۲۱).

علی‌رغم متفاوت بودنِ نظر پژوهشگران در مورد عوامل اصلی و تأثیرگذار در ظهور، توسعه و ارزیابی خلاقیتِ ریاضی؛ مخصوصاً پژوهش‌های نیم قرنِ اخیر، تأثیرِ مثبت فرایندهای طرح مسئله و رویکرد بازپاسخ را در این مهم تأیید می‌کنند.

یکی از ابزارهای مناسب برای تقویت و ارزیابیِ خلاقیتِ ریاضی، استفاده از «طرح مسئله ریاضی» است. سیلور[3](۱۹۹۴) بیان کرد که «اگرچه همواره خودِ مسائل مورد مطالعه و بررسی‌های دقیق قرار گرفته‌اند، اما به ایجاد تنوع در منبع مسائلی که دانش‌آموزان در مدرسه حل می‌کنند، توجهِ کمی شده است». وی همچنین می‌گوید که «اغلب از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که مسائل مطرح شده به وسیله معلم یا کتاب را حل کنند و به‌ندرت از آنها خواسته می‌شود که خودشان مسئله طرح کنند». فرایند طرح مسئله ریاضی، از جمله موضوعاتی است که توجه تعداد زیادی از محققانِ آموزش ریاضی را بیش از سه دهه، به خود جلب کرده است (کنترویچ[4]و همکاران ۲۰۱۲). فرایند طرح مسئله در آمریکا، حداقل از سال ۱۹۹۸ و در چین از سال ۲۰۰۲، به‌عنوان یکی از اهدافِ ریاضیاتِ مدرسه‌ای مورد توجه و تأکید بوده است (یوآن[5]

1Luria
2Sanchez
3Silver
4Kontorovich
5Yuan

و سریرامان، ۲۰۱۱). بونوتو[1] و دال‌سانتو[2] (۲۰۱۵)، ادعا کردند که در سال‌های اخیر، در بین پیشنهادها برای اصلاحاتِ ریاضیاتِ مدرسه‌ای در سراسر جهان، نتایج بسیاری از مطالعات نقش محوریِ طرح مسئله را تأیید کرده‌اند.

از دیگر فرایندهایِ مفید برای پرورش و ارزیابیِ خلاقیت ریاضی، می‌توان به «مسائل بازپاسخ» اشاره کرد. استفاده از مسائل بازپاسخ برای بهبود فرایند آموزشِ ریاضی، با عنوان «رویکرد بازپاسخ» از دهه هفتاد میلادی در کلاس‌های درسِ ژاپن توسعه یافت. پس از گردآوری و انتشار مباحثِ مطرح شده در هفدهمین کنفرانس روان‌شناسیِ آموزش ریاضی (PME[3]) در سال ۱۹۹۳ توسط پهکونن[4] در کتابی با عنوان «کاربرد مسائل بازپاسخ در کلاس ریاضی»، یک نگاه جهانی در مورد استفاده از مسائل بازپاسخ در کلاس‌های درس ریاضیات به‌وجود آمد. نوحدا[5] و سیلور (۱۹۹۵) ثابت کردند که هدف اصلیِ استفاده از مسائل بازپاسخ، تقویت خلاقیت و تفکر ریاضی است (به نقل از لیکین و الگرابلی، ۲۰۱۹). بکر[6] و شیمادا[7] (۱۹۹۷) و پهکونن (۱۹۹۷)، طی مطالعاتِ خود، رویکردِ بازپاسخ را برای آموزش ریاضیات و برای ارزیابیِ میزانِ یادگیریِ دانش‌آموزان مفید یافتند.

علی‌رغم اهمیتِ فراوانِ مقوله خلاقیتِ ریاضی در پژوهش‌های داخلی چندان به آن پرداخته نشده است. لذا در پاسخ به ضرورتِ انجامِ اینگونه پژوهش‌ها، هدفِ این پژوهش، بررسیِ کمیِ خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزانِ پایه دهمِ مدارسِ ایران با رویکردِ استفاده از طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته است. همچنین پژوهشِ حاضر به دنبال یافتنِ پاسخِ دو سؤال زیر است:

سؤال اول: عملکردِ (نمره خلاقیتِ ریاضیِ) دانش‌آموزان پایه دهم در آزمون طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته، چگونه (چقدر) است؟

---

1 Bonotto
2 Dal Santo
3 PME: Psychology of Mathematics Education
4 Pehkonen
5 Nohda
6 Becker
7 Shimada

سؤال دوم: عملکردِ دانش‌آموزانِ دختر و پسرِ پایه دهم در آزمون طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته، در مقایسه با یکدیگر چگونه است؟

به اعتقاد بسیاری از محققان، هیچ تعریفِ دقیق، جامع و موردِ توافقِ عام از خلاقیتِ و همچنین خلاقیتِ ریاضی، که در حالت کلی پذیرفته شده و یا در پژوهش‌ها مورد استفاده قرار گرفته باشد، وجود ندارد (هایلوک، ۱۹۸۷؛ سریرامان، ۲۰۰۵؛ مان، ۲۰۰۶). ترفینگر[1]، یانگ[2]، سِلبی[3] و شِپاردسون[4] (۲۰۰۲)، در یک مطالعه، صد تعریفِ ارائه شده از خلاقیت را شناسایی کردند. در ادامه به ذکر چند نمونه می‌پردازیم. به اعتقاد پوآنکاره[5] (۱۹۴۸ و ۱۹۵۶)، خلاقیتِ ریاضی فرایندی است که در آن ریاضی‌دانان بین پیوندها، ترکیب‌ها و ایده‌های مفید و غیرمفید انتخاب و گزینش می‌کنند. تورنس[6] (۱۹۷۴)، خلاقیت را اینگونه تعریف می‌کند: «خلاقیت عبارت است از فرایند حساس شدن به مسائل، کمبودها، شکاف در اطلاعات، عناصر یا اجزای پنهان و ناجور، شناساییِ مشکلات و موانع؛ جستجوی راه‌حل‌ها، حدس زدن و فرضیه‌سازی درباره این کمبودها؛ آزمایش و بازآزمودنِ این حدس‌ها و فرضیه‌ها در صورت لزوم اصلاح و آزمایشِ مجدد آنها و سرانجام ارائه نتایج». لی‌کوک[7] (۱۹۷۰)، خلاقیتِ ریاضی را تواناییِ تجزیه و تحلیلِ یک مسئله داده شده به شیوه‌های مختلف و انتخابِ یک روشِ مناسب برای روی آوردن به موقعیت‌های ناآشنا در ریاضیات می‌داند. به اعتقاد سریرامان (۲۰۰۵)، خلاقیت در ریاضیات نه تنها مرتبط با کار اصیل و بکرِ ریاضی‌دانان است، بلکه کشفِ بعضی مواردِ از قبل شناخته شده، توسط شخصی که این کشف برای او جدید است را نیز شامل می‌شود.

گیلفورد[8] (۱۹۵۹ و ۱۹۶۷) دو نوع تفکر را مطرح کرد: تفکر همگرا[9] و تفکر واگرا[10]: تفکر

1 Treffinger
2 Young
3 Selby
4 Shepardson
5 Poincare
6 Torrance
7 Laycock
8 Guilford
9 Convergent thinking
10 Divergent thinking

همگرا به یافتنِ یک جواب صحیح برای مسئله و تفکر واگرا بر جواب‌های چندگانه با درنظر گرفتن راه‌حل‌های مختلف تأکید دارد. وی تفکرِ واگرا را ویژگیِ مهمِ خلاقیت می‌داند. البته لازم به ذکر است که بسیاری از محققان، خلاقیت را همین تفکر واگرا می‌دانند. به اعتقاد گیلفورد (۱۹۵۹)، سیالی[1] (روانی)، انعطاف‌پذیری[2]، اصالت[3] (تازگی) و بسط[4] (گسترش)، ویژگی‌هایی مهم از تفکر واگرا هستند (که به مؤلفه‌های خلاقیتِ گیلفورد معروف‌اند). سیالی، به کمیتِ اندیشه‌های فرد یعنی به تعداد ایده‌های ارائه شده برای یک مسئله، یا به تعداد پاسخ‌های داده شده به آن مسئله در یک زمان معین، اشاره دارد. انعطاف‌پذیری، به تنوعِ راه‌حل‌ها، ایده‌ها و پاسخ‌ها و غیرتکراری بودنِ آنها اشاره دارد. اصالت، به راه‌حل‌ها، ایده‌ها و پاسخ‌هایِ بکر، نو و منحصر بفرد اشاره دارد. بسط، به توانایی ارائه مراحل دقیق برای تعمیم و گسترشِ ایده‌ها و راه‌حل‌های یک مسئله اشاره دارد. چمبرلین[5] و مون[6] (۲۰۰۵)، تفکر واگرا را به‌عنوان توصیفِ پذیرفته شده‌ای از خلاقیتِ ریاضی می‌دانند. آنها همچنین خلاقیتِ ریاضی را به‌عنوان یک توانایی غیرمعمول برای تولید جواب‌های جدید و سودمند در مسائلِ شبیه‌سازی شده یا کاربردی، از زندگی روزمره با استفاده از مدل‌سازیِ ریاضی می‌دانند. در مورد تعریف خلاقیت ریاضی (لیلجداهل[7] و سریرامان، ۲۰۰۶؛ سریرامان، ۲۰۱۱، ص ۱۲۰) سریرامان به وجودِ تفاوت بینِ خلاقیتِ ریاضی درسطح حرفه‌ای و مدرسه‌ای، اشاره می‌کند. به اعتقاد وی، خلاقیتِ ریاضی در سطح حرفه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱)توانایی تولید کار بدیع و بکر ،که بطور قابل ملاحظه ای علم را گسترش دهد (که می تواند شامل ترکیبات و بسط های قابل توجهی از ایده‌های شناخته شده باشد).

1Fluency
2Flexibility
3Orginality
4Elaboration
5Chamberlin
6Moon
10. Liljedahl

۲) راه حل هایی را برای سوالات و پرسش‌های جدید ریاضیدانان دیگر باز کند.

و خلاقیتِ ریاضی درسطح مدرسه‌ای :

۱) فرآیندی که نتیجه آن راه حل‌های غیرمعمول و متفکرانه برای یک مسئله داده شده و یا برای مسائل مشابه، و یا ؛

۲) فرموله کردن مسائل جدید و (یا) بررسیِ امکان‌پذیریِ اثبات مسائل قدیمی از روش‌ها، زوایا و منظرهای جدید.

وکسلر[1] و همکاران (۲۰۱۸)، اعتقاد دارند که در حال حاضر تفکرِ واگرایِ مطرح شده توسط گیلفورد شایع‌ترین روش برای سنجش خلاقیت است. بیسر[2] و همکاران (۲۰۲۰) خلاقیتِ ریاضی را فرایندی شامل دو جنبهٔ شناختی (یعنی روانی، انعطاف‌پذیری و اصالت) و عاطفی (مثل خودکار آمدیِ خلاق) می‌دانند که فرد را قادر به نوآوری نموده و ایده‌های ریاضی را به واقعیت تبدیل می‌کند. ایده‌های گیلفورد، الهام‌بخشِ تحقیق در زمینه خلاقیت و همچنین طرح، اجرا و گسترشِ آزمون‌هایی در جهتِ اندازه‌گیریِ میزان خلاقیتِ افراد، از جمله آزمون سنجشِ خلاقیتِ تورنس (۱۹۶۶) بوده است که بر پایه چهار مؤلفه خلاقیت گیلفورد طراحی شده است. همچنین تعداد قابل توجهی از پژوهش‌ها در آموزش ریاضی، خلاقیت را با تمرکز بر مؤلفه‌های سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالت اندازه‌گیری کرده‌اند (به‌عنوان مثال، واردانی[3] و همکاران، ۲۰۱۰؛ یوآن و سریرامان، ۲۰۱۱؛ کاتو[4] و همکاران، ۲۰۱۲ و ۲۰۱۵؛ دامایانتی[5] و سوماردی[6]، ۲۰۱۸؛ اُتگنباتار[7]، ۲۰۲۰) .

کیل پاتریک[8] (۱۹۷۸) که نخستین مطالعات رسمی را بر روی فرایند طرح مسئله انجام داده است، بر لزوم استفاده از این فعالیت در کلاس‌های درسِ ریاضی تأکید می‌کند. همچنین به اعتقاد وی مرتبط

1.Wechsler
2.Bicer
3.Wardani
4.Kattou
5.Damayunti
6.Sumardi
7.Otgonbaatar
8. Kilpartick

کردن، قیاس کردن، تعمیم دادن و نقض کردن، چهار مؤلفه مهم و تأثیرگذار در فرایند طرح مسئله هستند. شورای ملی معلمانِ ریاضیِ آمریکا (NCTM[1]، ۲۰۰۰، ص ۱۱۷)، طرح مسئله را به‌عنوان طرح سؤالات جدید در قالب یک مسئله زمینه مدار معرفی کرده و عنوان می‌کند که معلم باید مهارتِ طرح مسئله را پرورش و توسعه دهد. در جدول ۲ برخی تعاریفِ طرح مسئله از نظر پژوهشگران آموزش ریاضی ارائه شده است (برگرفته از ریحانی[2] و حق‌جو[3]، ۱۳۹۹) .

جدول ۲. برخی تعاریفِ طرح مسئله (برگرفته از ریحانی و حق‌جو، ۱۳۹۹).

پژوهشگران	تعریف
سیلور (۱۹۹۴)	طرح مسئله هم به تولید یک مسئله جدید و هم به‌صورت‌بندی مجدد یک مسئله مفروض دلالت دارد و بنابراین می‌تواند قبل از حل مسئله، طیِ آن و بعد از حل مسئله انجام شود.
استویانوا و الرتون (۱۹۹۶)	طرح مسئله را به‌عنوان فرایندی تعریف می‌کنند که در آن، دانش‌آموزان براساسِ تجارب ریاضی، تعبیرها و تفسیرهای شخصیِ خود را از موقعیت‌ها می‌سازند و آنها را به‌صورت مسائل ریاضیِ معنادار، صورت‌بندی می‌کنند.
چن[4] و همکاران (۲۰۰۷)	طرح مسئله را به‌عنوان تولید مسائل بر مبنای عبارات ریاضیِ داده شده، معرفی می‌کنند.
کویچو[5] و کونترویچ (۲۰۱۳)	طرح مسئله به‌عنوان تکالیفی است که معلمان برای دانش‌آموزان طراحی می‌کنند. طرح مسئله را به‌عنوان فعالیتِ ریاضی معتبر درنظر می‌گیرند: مسائل جدیدی که طراحی می‌شوند، نه تنها به‌عنوان تمرین‌هایی در طرح مسئله؛ بلکه به‌عنوان نیازهای ریاضیات واقعی یا پراگوژیکی درنظر گرفته می‌شوند.
کای و همکاران (۲۰۱۵)	تکالیف طرح مسئله آن چیزهایی هستند که معلمان یا دانش‌آموزان برای تولید مسائل یا سؤالاتِ جدید بر مبنای موقعیت‌های داده شده یا نمودارها یا عباراتِ ریاضی، نیاز دارند. طرح مسئله شامل سه نوع فعالیت فکری است: الف) معلمان خودشان مسائل ریاضی را بر مبنای موقعیت داده شده یا عباراتِ ریاضی یا نمودارها، طرح می‌کنند. ب) معلمان انواع مسائلی که دانش‌آموزان بر مبنای موقعیتِ داده شده یا عباراتِ ریاضی یا نمودارها، طرح می‌کنند را پیش‌بینی می‌کنند. ج) معلمان تکالیفی از طرح مسئله ریاضی را طراحی می‌کنند؛ برای این‌که دانش‌آموزان، مسائل را طرح کنند.
لیکین و الگرابلی (۲۰۱۹)	طرح مسئله از طریق بررسیِ یک فعالیتِ پیچیده ریاضی، شامل این موارد است: الف) بررسیِ شکل هندسی (از یک مسئله اثباتی) برای پیدا کردنِ حداقل دو خاصیتِ غیربدیهی از شکلِ داده شده و شکل‌های مرتبطی که به‌عنوان کمکی داده شده‌اند. ب) فرمول‌بندیِ چندین (حداقل ۲) مسئله اثباتی جدید بر مبنای بررسی‌های انجام شده و حل یا اثباتِ آنها.

1. NCTM: The National Council of Teacher Mathematics
2Reyhani
3Haghjoo
4Chen
5Koichu

طی این چند دهه، برخی پژوهش‌ها در زمینه طرح مسئله، به طراحی مدل‌ها یا چارچوب‌هایی برای مطالعه و اجرای فرایند طرح مسئله اختصاص داشته است. از جمله مهم‌ترین آنها می‌توان به دسته‌بندی سیلور (۱۹۹۴)، چارچوبِ استویانوا و الرتون (۱۹۹۶)، چارچوب انگلیش[1] (۱۹۹۷)، مدل کریستو[2] و همکاران (۲۰۰۵)، چارچوب کانتررس[3] (۲۰۰۷)، مدل نوآوری در طرح مسئله ویسترو ـ یو[4] (۲۰۰۹)، چارچوب کنترویچ و همکاران (۲۰۱۲)، اشاره کرد. به‌عنوان نمونه، استویانوا و الرتون (۱۹۹۶)، موقعیت‌های طرح مسئله را به سه دسته آزاد[5]، نیمه ساختاریافته[6] و ساختاریافته[7] تقسیم کرده‌اند:

۱) *موقعیت طرح مسئله آزاد:* موقعیتی است که در آن از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که یک مسئله را بر مبنایِ یک موقعیتِ واقعی طرح کنند، به‌عنوان مثال، یک مسئله در مورد اقتصاد بنویسند.

۲) *موقعیت طرح مسئله نیمه ساختاریافته:* موقعیتی است که در آن به دانش‌آموزان یک موقعیت باز داده می‌شود تا ساختار آن را بررسی کنند و یا آن را به پایان برسانند؛ مانند طرح مسئله بر مبنای یک شکل یا یک معادله.

۳) *موقعیت طرح مسئله ساختاریافته:* موقعیتی است که در آن یک مسئله داده می‌شود و تکلیف این است که یک مسئله جدید از آن بسازد.

مدل نوآوری در طرح مسئله ویسترو ـ یو (۲۰۰۹)، که شامل شش روشِ طرح مسئله جدید از رویِ یک مسئله داده شده است، در جدول ۳ ارائه شده است.

1English
2Christou
3Contreras
4Vistro-yu
5Free
6Semi-Structured
7Structured

جدول ۳. معرفی مدلِ نوآوری ویسترو ـ یو شاملِ شش روش برای طرح مسئله جدید (ویسترو ـ یو، ۲۰۰۹).

روش	ویژگی مسئله جدید
الف) جایگزینی[1]: طرح مسئله همانند مسئله اصلی با تغییر دادنِ مقادیر، واحدها و شکل‌ها و غیره.	یک مشق تمرینی از مسئله اصلی خواهد شد.
ب) افزایش[2]: طرح مسئله همانند مسئله اصلی با افزودن داده یا محدودیتِ جدید و یا اضافه کردنِ یک مانع.	تعمیم یافته مسئله اصلی خواهد شد و می‌تواند پیچیده‌تر از آن باشد.
پ) جرح و تعدیل[3]: طرح مسئله با استفاده از همان داده‌های مسئله اصلی ولی با اِعمال تغییراتی مانند؛ تغییر زمینه مسئله، حذف یا اضافه یا اصلاحِ متغیرهای مسئله، و تغییر دادنِ هدف نهایی مسئله.	می‌تواند جدید و متفاوت با مسئله اصلی باشد ولی درعین حال برای حلِ آن، به مسئله اصلی نیاز باشد.
ت) زمینه مدار کردنِ مسئله[4]: طرح مسئله کلامی و داستان‌گونه با هدف ارتباطِ بیش‌تر با دانش‌آموزان.	اساساً همان مسئله اصلی یا مشابه با آن خواهد بود.
ث) برگرداندن یا معکوس کردنِ مسئله[5]: طرح مسئله از روی مسئله اصلی ولی با درنظر گرفتن هدف نهایی به‌عنوان داده و داده به‌عنوان هدف نهایی.	جالب‌تر و چالش‌برانگیزتر از مسئله اصلی و کاملاً متفاوت با آن خواهد بود.
ج) صورت‌بندی مجدد[6]: استفاده از مسئله اصلی به‌عنوان زیرساخت برای طرح یک مسئله در نوعی متفاوت یا کلی‌تر یا اثبات کردنی یا گاهاً در قالبِ یک مسئله موقعیتی.	متفاوت با مسئله اصلی است ولی برای فهم و حلِ آن، به دانش، مفاهیم و مهارت‌هایی که در مسئله اصلی مورد استفاده قرار گرفتند، احتیاج داریم.

جِنسن[7] (۱۹۷۳)، اعلام کرد که توانایی دانش‌آموزان در طرح مسئله ریاضی، با خلاقیت ارتباط دارد. لیونگ[8] (۱۹۹۷)، بیان کرد که طرح مسئله می‌تواند به‌عنوان یک فعالیتِ مرتبط با خلاقیت درنظر گرفته شود. سیلور (۱۹۹۷)، اشاره کرد که طرح مسئله یک رویکرد مناسب برای شناساییِ تفکر خلاقِ دانش‌آموزان است. به‌عنوان یک نتیجه، طرح مسئله فرایندی است که محققان را قادر به شناساییِ خلاقیت ریاضی می‌کند مادامی که مؤلفه‌های سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالتِ خلاقیتِ دانش‌آموزان به‌طور همزمان در حال رشد هستند (تورنس، ۱۹۸۸؛ سیلور، ۱۹۹۷). بونوتو و

1 Replacement
2 Addition
3 Modification
4 Contextualizing
5 Turning the problem around or reversing the problem
6 Reformulation
7 Jensen
8 Leung

دال‌سانتو (۲۰۱۵)، در مورد ارتباط بین خلاقیت و طرح مسئله بیان کرده‌اند که طرح مسئله نوعی از فعالیت‌های خلاقانه است که می‌تواند در موقعیت‌های نیمه‌ساختاریافته غنی با استفاده از مصنوعات زندگیِ واقعی و تعاملات بشری نمود پیدا کند. بیسر و همکاران (۲۰۲۰) اعتقاد دارند که پرداختن به فعالیت‌های طرح مسئله در آموزش ریاضیِ دوره ابتدایی، می‌تواند خلاقیتِ ریاضی را تقویت کند.

مسائل باز-پاسخ در آموزش ریاضی، در کتابهای درسی و ادبیات پژوهشی جایگاه ویژه ای دارند و در کتاب-های جدید التالیف ریاضی مدرسه ای کشورمان این موضوع به طور نسبی مورد توجه قرار گرفته است. با این حال مطالعات محدودی در این زمینه انجام شده و به کارگیری این مسائل در کلاس درس و بررسی نتایج آن تقریبا نادیده گرفته شده است. (سلیمیان، ریحانی و بهرامی سامانی ۱۳۹۸). در طول مطالعات انجام شده بر روی مسائل بازپاسخ، تعاریفی از این مسائل توسط پژوهشگرانِ آموزش ریاضی ارائه شده است. در جدول ۴ برخی از این تعریف‌ها آورده شده است.

جدول ٤. برخی تعاریفِ مسئله بازپاسخ.

پژوهشگران	تعریف
بکر و شیمادا (۱۹۹۷)	مسئله بازپاسخ، مسئله‌ای است که برای آن چندین پاسخ احتمالی وجود دارد که می‌توان آنها را به چندین روش به‌دست آورد. در این مسائل تمرکز بر روی شیوه‌های رسیدن به پاسخ است نه بر رویِ پاسخ مسئله.
هاشیموتو[1] (۱۹۹۷)	فرایند بازپاسخ، فرایندی است که دانش‌آموزان «یافتنِ چیزِ جدیدی در آن» را تجربه می‌کنند.
پهکونن (۱۹۹۹)	یک تکلیف، بازپاسخ است هرگاه نقطه شروع و موقعیت‌هایِ هدفِ آن دقیقاً داده نشده باشد.
سیفارلی[2] و کای (۲۰۰۵)	مسئله بازپاسخ، مسئله‌ای است که بیش از یک روش برای حلِ آن وجود دارد.
ریحانی و حق‌جو (۱۳۹۹، ص ۱۵۱)	مسائل بازپاسخ، مسائلی هستند که می‌توانند راه‌حل‌های چندگانه داشته باشند و یا می‌توانند چندین پاسخِ صحیح داشته باشند.

کوآن[3] و همکاران (۲۰۰۶)، معتقدند که مسائل بازپاسخ با تحریکِ تفکر واگرا، به افزایشِ این نوع تفکر کمک می‌کنند. به گفته پهکونن (۲۰۰۷)، به‌نظر می‌رسد امروزه مسائلِ بازپاسخ

1Hashimoto
2Cifarelli
3Kwon

یک ابزار مفید در توسعه آموزش ریاضی در مدارس، به‌عنوانِ روشی تأکید کننده بر فهم و خلاقیت، پذیرفته شده است. بریگز[1] و دیویس[2] (۲۰۰۸)، ادعا کردند که می‌توان تفکر خلاق را با ارائه مسائل بازپاسخ ارتقاء داد. مورنی[3] (۲۰۱۳)، نشان داد فرایند بازپاسخ می‌تواند شهامت دانش‌آموز را در بیان استدلال و نظرات خود زیاد کند و این امر موجبِ افزایشِ توانایی تفکرِ خلاقِ آنها می‌شود. سوهرمن[4] (۲۰۱۳)، بیان می‌کند که استفاده از مسائل بازپاسخ در تدریس، به‌طور هم‌زمان توانایی حل مسئله و خلاقیتِ دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد.

در حل مسائل بازپاسخ، دانش‌آموزان در حالی‌که به دنبالِ یافتن راه‌حل‌های مختلف و انواع روش‌های مختلفِ حلِ مسئله هستند، آزادانه ایده‌های زیادی را به‌کار می‌گیرند (سیالی)، آن‌ها در حال تلاش برای ساختنِ راهبردهای جدید برای حل این مسئله هستند در حالی‌که در روش‌های قدیمی شکست می‌خورند (انعطاف‌پذیری)، و گاهی اوقات با ایده‌های غیرمنتظره، غیرمعمول و هوشمندان (اصالت) روبه‌رو می‌شوند و همه این ویژگی‌ها مؤلفه‌های مهم خلاقیت هستند (تی‌جوی[5]؛ ۲۰۱۹).

تاکنون فعالیت طرح مسئله برای ارزیابیِ خلاقیتِ ریاضی، توسط چندین محقق مورد استفاده قرار گرفته است. به‌عنوان مثال، ابوالوان[6] (۲۰۰۲) در مطالعه‌ای به بررسیِ تأثیرِ فرایند طرح مسئله بر عملکردِ حل مسئله دانشجو معلمان ریاضی پرداخت. نتایج به‌دست آمده از آن مطالعه، تأثیر مثبتِ فعالیتِ طرح مسئله را بر فرایند حل مسئله نشان داد. وی در پایانِ مطالعه خود بیان کرد در خصوصِ رابطه ی بین عملکرد حل مسئله و توانایی طرح مسئله در دانش‌آموزان در تمامی سطوح، به انجام تحقیقاتِ بیشتری است. یوآن و سریرامان (۲۰۱۱) در یک مطالعه به بررسیِ ارتباط بین خلاقیت و توانایی طرح مسئله دانش‌آموزانِ چینی و آمریکایی پرداختند. نتایج حاصل از تحلیلِ داده‌ها حاکی از این بود که در مورد دانش‌آموزان چینی، بین

1 Briggs
2 Davis
3 Murni
4 Suherman
5 Tjoe
6 Abu-Elwan

توانایی طرح مسئله و سه مؤلفه سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالتِ خلاقیت، همبستگی معنادار وجود داشت ولی در مورد دانش‌آموزانِ آمریکایی بین توانایی طرح مسئله و مؤلفه‌های ذکر شده خلاقیت، هیچ رابطه معناداری یافت نشد. مورنی (۲۰۱۳) یک تحقیق کیفی و توصیفی را به‌منظور کاربرد رویکرد بازپاسخ جهت افزایشِ تفکر خلاق و عملکرد دانش‌آموزانِ پایه هشتم در سال ۲۰۱۱ و ۲۰۱۲ انجام داد. در پایانِ تحقیقِ او، دانش‌آموزانِ گروه آزمایش در مهارتِ تفکر خلاق و عملکرد ریاضی، نتایج بهتری را نشان دادند. بونوتو و دال‌سانتو (۲۰۱۵) در یک مطالعه اکتشافی با عنوان «ارتباط بین طرح مسئله، حل مسئله و خلاقیت در مدارسِ ابتدایی»، خلاقیتِ دانش‌آموزان را تحت فعالیت‌های طرح مسئله و حل مسئله مورد ارزیابی قرار دادند. نتایج به‌دست آمده از این مطالعه نشان داد که فعالیتِ طرح مسئله می‌تواند محیطی مناسب برای پرورش تفکر خلاق باشد. دامایانتی و سوماردی (۲۰۱۸) در یک تحقیقِ کیفی و توصیفی به بررسیِ توانایی تفکر خلاقِ ریاضی از جنبه‌های سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالت در حل مسئله بازپاسخ در حوزه معادلاتِ خطیِ یک متغیره روی دانش‌آموزان پایه هفتم یک دبیرستان در سوراکارتای اندونزی پرداختند. آنها نتیجه مطالعه خود را این‌گونه بیان کردند که جنبه‌های سیالی و انعطاف‌پذیریِ خلاقیتِ ریاضی توسطِ دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی[1] و توانایی متوسطِ ریاضی[2] و جنبه اصالتِ خلاقیتِ ریاضی فقط در دانش‌آموزانِ با توانایی بالای ریاضی حاصل شد. دانش‌آموزان با توانایی پایین ریاضی[3] در دستیابی به هیچ‌یک از جنبه‌های سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالت موفق نبودند، که دلیل آن ضعف و ناتوانیِ این دانش‌آموزان در حل مسائل ذکر شد. در مطالعه‌ای دیگر، اُتگنباتار (۲۰۲۰) خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزانِ پایه نهم مغولی را با استفاده از رویکرد طرح مسئله مورد بررسی قرار داد. در این مطالعه، دانش‌آموزان در یک آزمون طرح مسئله شرکت کردند. با بررسی و نمره‌دهیِ به سه مؤلفه سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالت، خلاقیتِ ریاضی آنها مورد سنجش و ارزشیابی قرار گرفت. نمره

1High – math ability
2Moderate – math ability
3Low – math ability

آزمون، حکایت از پایین بودنِ سطحِ خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزانِ پایه نهم مغولی داشت.

در پژوهش‌های پیشین، خلاقیت یا مؤلفه‌های آن تحت تأثیر یکی از فرایندهای طرح مسئله و مسائل بازپاسخ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ما در این مطالعه، با اندکی پیشروی کردن و با دو وجه تمایز نسبت به پژوهش‌های قبلی یعنی استفاده از هر دو فرایند ذکر شده و مطالعه بر روی دانش‌آموزانِ مدارسِ استعدادهای درخشان، قصد داریم با تمرکز بر مؤلفه‌های سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالت و با رویکرد استفاده از طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته، به بررسیِ کیفیِ میزانِ خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزان پایه دهمِ مدارسِ استعدادهای درخشان بپردازیم (شکل ۱).

شکل ۱. چارچوب مفهومی

روش پژوهش

این پژوهش به روش توصیفی از نوع زمینه یابی انجام گرفته است. جامعه آماری این تحقیق، کلیه دانش‌آموزانِ سال دهمِ دبیرستان‌های استعداد درخشانِ شهرستان‌های استان تهران هستند که در سال ۱۳۹۹-۴۰۰ در رشته‌های ریاضی فیزیک و تجربی مشغول به تحصیل بودند. نمونه‌گیری از نوع نمونه‌گیریِ در دسترس است و شامل ۱۵۸ نفر از دانش‌آموزانِ پسر و دخترِ مدارس استعدادهای درخشانِ شهرستان‌های ورامین، قرچک و پاکدشت در جنوب‌شرقیِ استان تهران است. تعداد دانش‌آموزانِ در نمونه آماری، به تفکیک رشته تحصیلی و جنسیت در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵. تعداد دانش‌آموزانِ نمونه به تفکیک رشته تحصیلی و جنسیت.

	ریاضی		تجربی		
پسر	۴۵		۵۹	تعداد	درصد
				۱۰۴	۶۵/۸
دختر	۹		۴۵	تعداد	درصد
				۵۴	۳۴/۲
	تعداد	درصد	تعداد	درصد	
	۵۴	۳۴/۲	۱۰۴	۶۵/۸	

برگزاری جلسات آموزشی (طرح مسئله ـ مسئله بازپاسخ)

به منظور آشناییِ دانش‌آموزان با «طرح مسئله ریاضی» و «مسائل بازپاسخ»، طی دو جلسه آموزشی، به معرفی و ارائه مثال از این دو فرایند پرداختیم. برای برگزاریِ کلاس‌های آموزشی از نرم‌افزارِ آموزشِ آنلاینِ Adobe connect و همچنین برای اجرای آزمون، اطلاع‌رسانی و ارتباط با دانش‌آموزان از پیام‌رسانِ واتساپ استفاده شد. ما در جلسات آموزشی، برای تسهیل در فهمِ دانش‌آموزان، مفاهیم را با جرح و تعدیلِ مفهومِ نظری، به‌صورت زیر ارائه کردیم.

طرح مسئله ریاضی، تولیدِ یک مسئله جدید از یک موقعیت یا تجربه، یا صورت‌بندی تازه‌ای از مسئله داده شده است.

رایج‌ترین روش‌های طرح مسئله:

ـ طرح مسئله براساس پاسخ داده شده

ـ طرح مسئله بر مبنای زمینه داده شده

ـ طرح مسئله بر مبنای محاسبات داده شده

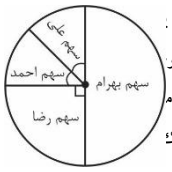
ـ طرح مسئله در موقعیت‌های ساختاریافته، نیمه ساختاریافته و آزاد

مسئله بسته پاسخ، مسئله‌ای است که یک و تنها یک جواب صحیح دارد.

مسئله بازپاسخ، مسئله‌ای است که پاسخ‌های صحیحِ متعدد دارد یا چندین راه برای حلِ آن وجود دارد.

در جدول ۶ نمونه‌هایی از طرحِ مسئله به روش‌های رایجِ ذکر شده و در جدول ۷ چند نمونه از مسائل بسته پاسخ به همراه یک مسئله بازپاسخِ مربوط به آنها که همگی در جلسات آموزشی ارائه شدند، را آورده‌ایم.

جدول ٦. نمونه‌هایی از طرح مسئله به روش‌های رایج

مسئله داده شده	مسئله طرح شده
مسئله‌ای بنویسید که پاسخ آن ۲۰ باشد. (طرح مسئله براساس پاسخ داده شده)	در یک سالن تعدادی صندلی در ۵ ردیف و در هر ردیف ۴ صندلی چیده شده‌اند. در این سالن چند صندلی وجود دارد؟
مسئله‌ای طرح کنید که به کمک تناسب حل شد. (طرح مسئله بر مبنای زمینه داده شده)	در یک کارخانه شیر پاستوریزه، در هر ۴ دقیقه، ۳۰۰ بطری شیر پر می‌شود. در این کارخانه، در هر ۱۰ دقیقه چند بطری شیر پر می‌شود؟
برای عبارت ذیل یک مسئله طرح کنید وآن را حل کنید: $۶+۳\times۲$ (طرح مسئله بر مبنای محاسبات داده شده)	در دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدرنسبتِ ۲، جمله چهارم چقدر است؟ $a_۴=a_۰+(۴-۱)\times d=۶+۳\times۲=۱۲$
یک مسئله شبیه به مسئله زیر طرح کنید: (طرح مسئله در موقعیت ساختاریافته) «برای نقاشیِ یک ساختمان، ۴ کارگر ۱۶ روز کارکردند. اگر تعداد کارگرها ۶ نفر بود، این کار چند روزه انجام می‌شد؟»	«برای نقاشی یک ساختمان، ۲ کارگر ۱۸ روز کار کردند. اگر تعداد کارگرها ۳ نفر بود، این کار چند روز انجام می‌شد؟»
در مورد شکل مقابل مسئله‌ای طرح کنید که در آن از عدد ۱۰۰ استفاده شود. (طرح مسئله در موقعیت نیمه‌ساختاریافته)	بهرام، علی، احمد و رضا در مالکیت شریک هستند. اگر سهم‌بندی آنها با تو مقابل و سهم بهرام ۱۰۰ مترمربع باشد، م زمین چند متر مربع و سهم بقیه شریک است؟ 
یک مسئله دشوار برای امتحانِ ریاضیِ خرداد ماهِ کلاسِ خود طرح کنید. (طرح مسئله در موقعیت آزاد)	در یک عدد سه رقمی بدونِ رقم صفر، احتمال اینکه لااقل دو رقمِ یکسان وجود داشته باشد چقدر است؟

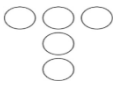
جدول ۷. نمونه‌هایی از مسائلِ بسته پاسخ و مسئله بازپاسخِ مربوط به آن‌ها، ارائه شده در بخش اولِ جلساتِ آموزشی.

مسئله بسته پاسخ	مسئله بازپاسخ
$\square + ۳ = ۵$	$\square + d = ۵$
$\frac{۱۸}{۷}$ $\square$	$\frac{\square}{۷} > ۲$
۳۰ درصدِ عددِ ۱۲۰ برابر با ..... است.	۳۰ درصدِ عددِ ..... برابر با ..... است.
تاسی را می‌اندازیم، احتمال آن‌که عدد فرد بیاید چقدر است؟	تاسی را می‌اندازیم، احتمال وقوع کدام پیشامد برابر $\frac{۱}{۲}$ است؟
$A = \{۱,۲,۳,۴\}, B = \{۳,۴,۵\} \Rightarrow A \cup B = ?$	$A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \Rightarrow A = ?, B = ?$
$\frac{(x+۲)\square}{x^۲+۳۰x+۲} = x+۴$	$\frac{(x+۲)\square}{\square} = x+۴$
دنباله حسابی با جمله اولِ ۶- و قدرنسبتِ $\frac{۵}{۳}$ ، چند جمله منفی دارد؟	دنباله‌ای حسابی بنویسید که فقط چهار جمله منفی داشته باشد.
دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{۴}{۵}$ و جمله دومِ ۱ را مشخص کنید.	دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۴}{۵}$ بنویسید.

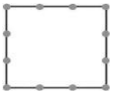
در بخشی دیگر از جلساتِ آموزشی، با خارج کردن مسائل بسته پاسخ از دستور کار، به ارائه مسائل بازپاسخ از هر دو نوعِ پاسخ‌های صحیحِ چندگانه و راه‌حل‌های چندگانه پرداخته شد. نمونه‌هایی از مسائلِ بازپاسخِ مطرح شده در این بخش در جدول ۸ ارائه شده است.

جدول ۸. نمونه‌هایی از مسائل بازپاسخِ ارائه شده در بخش دومِ جلساتِ آموزشی

مساحت یک مستطیل ۱۲ سانتی‌متر مربع است. طول و عرض این مستطیل چند سانتی‌متر است؟



اعداد ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲ را طوری در دایره‌های شکل مقابل قرار دهید که مجموع اعداد در هر جهت (عمودی و افقی) یکسان شود. (پلفری[1]، ۲۰۰۰، ص ۴۵، نقل شده در سلیمیان و همکاران ۱۳۹۸)



در شکل مقابل با ۱۲ چوب کبریت مربعی به مساحت ۹ واحد ساخته‌ایم. با استفاده از این ۱۲ چوب کبریت، چندضلعی‌ای با مساحت ۵ واحدِ مساحت بسازید. (مسئله چوب کبریت، پهکونن، ۱۹۹۷)

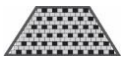
چرا $(x+۳)^۲ \neq x^۲+۹$؟ (وندی[2]، ۲۰۱۳)

1Pelfrey
2Wendy

معرفیِ مسائلِ بازپاسخ، با بازخوردهایِ مثبتی از طرفِ دانش‌آموزان همراه بود. دانش‌آموزان در حین تدریس و بعد از آن، مشتاقانه به ارائه پاسخ‌هایی برای مسائلِ بازپاسخِ مطرح شده پرداختند. اشتیاقِ دانش‌آموزانِ در مواجهه با مسائل بازپاسخ، ما را در همراهی شدنِ توسط آنها در مسیر تحقیق‌مان امیدوار کرد.

برای جمع‌آوری داده‌ها، از یک آزمونِ طرح مسئله بازپاسخ شامل دو سؤال در موقعیت‌هایی ساختاریافته، استفاده شده است (جدول ۹). سؤال‌های این آزمون، از مبحث دنباله‌های حسابی و هندسی از سرفصل‌های تدریس شده کتابِ درسیِ دانش‌آموزان، طراحی شدند.

جدول ۹. سؤالات آزمون

شماره	سؤال	منبع سؤال
۱	یک دیوار آجری به شکل (تقریبی) یک ذوزنقه است (مطابق شکل مقابل).  ارتفاع این ذوزنقه از ۱۱ ردیف آجر تشکیل شده است. همچنین ردیف اول آن شامل ۲۰ آجر و ردیف آخر آن شامل ۱۰ آجر است. مجموع آجرهای کدام دو ردیف برابر با ۳۲ است؟ مسئله را حل کرده و سپس در مورد این مسئله هر تعداد سؤال بازپاسخ که می‌توانید طرح کنید.	مفروضات سؤال برگرفته از سولیوان[1]، ۲۰۱۱، مثال ۸، صفحه ۸۰۶.
۲	رضا خود را برای شرکت در یک مسابقه دومیدانی آماده می‌کند. وی با دویدن‌های روزانه قصد دارد خود را به حداقل سطح آمادگی برای شرکت در مسابقه، که توانایی دویدنِ مسیری به مسافت ۳۲ کیلومتر است، برساند. اگر رضا در روز اول مسافت ۳ کیلومتر را بِدَوَد و پس از روز اول، هر روز مسافتی معادل با دو برابر روز قبل را بِدَوَد آن‌گاه در چندمین روز از تمرین، آمادگیِ رضا از حداقلِ سطح فراتر است؟ مسئله را حل کرده و سپس هر تعداد مسئله بازپاسخ که می‌توانید در مورد این سؤال طرح کنید.	طرح شده توسط نویسندگان مقاله

روایی مسائل توسط اساتید ریاضی و آموزشِ ریاضی مورد تأیید قرار گرفت. همچنین با برگزاریِ آزمایشیِ آزمون بر روی یک نمونه مستقل از نمونه ۱۵۸ نفره، و با استفاده از نرم‌افزار SPSS، ضریب آلفای کرونباخِ مسئله اول و دوم به‌ترتیب ۰/۷۱ و ۰/۸۲ به‌دست آمد که این

1 Sullivan

مقادیر نشان داد مسائلِ آزمون از پایاییِ مناسبی برخوردار هستند. همه دانش‌آموزانِ شرکت‌کننده در مطالعه، در یک زمانِ مشخص در آزمون شرکت کردند. پس از برگزاریِ آزمون، ابتدا پاسخ‌ها به منظور قابل قبول بودن یا غیرقابل قبول بودنِ مسائلِ بازپاسخِ مطرح شده توسط دانش‌آموزان در آزمون و سپس به منظور نمره‌دهی، مورد بررسی قرار گرفتند.

معیار بررسی پاسخ‌ها

چارچوب نظری این تحقیق در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالاتِ آزمون، مدلِ نوآوری در طرح مسئله ویسترو ـ یو (۲۰۰۹) بوده است.

پاسخ‌های قابل قبول، مسائلِ بازپاسخی بودند که به یکی از روش‌های شش‌گانه ویسترو ـ یو یا ترکیبی از این روش‌ها و یا خارج از چارچوبِ مدل ویسترو ـ یو، با توجه به مسائل آزمون، توسط دانش‌آموزان طرح شده بودند. عمده‌ترین دلایل غیرقابل قبول بودنِ برخی پاسخ‌های دانش‌آموزان در آزمون و همچنین نمونه‌هایی از این پاسخ‌ها در جدول ۱۰ آورده شده است.

جدول ۱۰. عمده‌ترین دلایلِ غیرقابل قبول بودن برخی پاسخ‌ها

دلایل عدم پذیرش	نمونه‌هایی از پاسخ‌های نادرستِ ارائه شده توسط دانش‌آموزان
بسته پاسخ است.	ـ تعداد آجرهای کدام ردیف عددی فرد است؟ ـ مجموع همه آجرها به چه عددهایی بخش‌پذیر است؟ ـ در کدام روزها عدد مسافت طی شده زوج است؟ ـ رضا در روز هشتم چند کیلومتر دویده است؟
با مسئله داده شده یا نوع دنباله متناظر با مسئله سازگار نبوده یا به آن ارتباطی ندارد.	ـ تعداد آجرهای سیاه رنگ و سفید رنگ در کدام ردیف‌ها دقیقاً برابر است؟ ـ در کدام ردیف تعداد آجرهای سیاه رنگ فرد است؟ ـ هدف رضا از شرکت در مسابقه چیست؟ ـ اگر رضا هر روز ۴ کیلومتر از روز قبل بیشتر بدود، پس از چند روز به آمادگی می‌رسد؟ ـ اگر رضا پس از هر هفته تمرین، ۱ کیلوگرم وزن کم کند و با کم کردن هر ۵ کیلوگرم بتواند ۱ کیلومتر بیشتر بدود، او پس از ۲ ماه تمرین، چه مسافت‌هایی را می‌پیماید؟ ـ اگر نقی و تقی مشغول بازی مارپله باشند و مارپله آنها به‌صورت دیوار ذوزنقه شکلِ مسئله اول باشد که در ردیف چهارم و هفتم مار وجود داشته باشد، برای رسیدن به ردیف آخر چند مسیر مشخص کنید. ـ ردیف‌هایی که تشکیل مجموعه بدهند و حداقل یکی از عضوهای این مجموعه دهگانش فرد باشد؟
نامفهوم است.	ـ در کدام ردیف‌ها نمی‌توان مجموع اعداد و ارقام موجود در یک پلاک ماشین را یافت؟ ـ در کدام روز ۲ عدد متوالی زوج وجود دارد؟ ـ مسافت طی شده رضا در کدام روزها به سهمی $y = ۴ - ۲\alpha - ۲\alpha^{۲}$ شباهت ندارد؟ ـ اگر مسابقه یک روز به جلو بیوفتد یعنی فقط ۴ روز مهلت تمرین داشته باشد، او به چه حالتی می‌تواند خود را آماده کند؟ ـ مجموع تمام آجرها را حساب کرده و به دلخواه به ۳ گروه تقسیم کنید. (بی‌ربط ـ نامفهوم) ـ اگر ماشینی با ۱۰ لیتر بنزین ۵۰ کیلومتر را طی کند و هر روز ۳۰ لیتر بنزین به باک آن افزایش یابد در کدام روز رضا نمی‌تواند بیشتر از این ماشین حرکت کند؟ (بی‌ربط ـ نامفهوم)
با اطلاعات مسئله داده شده قابل حل نیست یا پاسخ‌های سلیقه‌ایِ غیرمنطقی دارد.	ـ تعداد آجرهای کدام ردیف از ارتفاع دیوار بیشتر است؟ ـ ذوزنقه‌ای متشکل از ۱۱ ردیف آجر که ردیف اول ۲۰ آجر و ردیف آخر ۱۰ آجر دارد. ردیف چندم متفاوت‌تر از بقیه است؟ ـ اگر تعداد آجرهای هر ردیف را به انگلیسی بنویسیم کدام ردیف‌ها دارای پرکاربردترین حرف الفبای انگلیسی است؟ ـ جمع کدام دو ردیف برابر با تعداد روزهای یک ماه گرم سال است؟ ـ اگر محسن بهترین بازیکن این مسابقه باشد و توانایی دویدنِ ۹۶ کیلومتر را داشته باشد، رضا در چندمین روز تمرین می‌تواند نفر اول شود؟ ـ مجموع کدام دو ردیف برابر با ۱۵ است؟ ـ مجموع کدام دو ردیف یک سوم ضرب ردیف پنجم و هفتم است؟
بدون جواب یا نادرست است.	ـ در کدام روز از تمرین رضا، عددی اول و دو رقمی وجود دارد؟ ـ اگر رضا ۱۵ سال سن داشته باشد و میانگین سالی ۱ ماه تمرین کند، او در چه سنی توانایی دویدن مسیر ۳۰۰ کیلومتری را دارد؟ ـ مسافت دویده شده در کدام روز ضرب آن زوج و فرد است؟

معیارها و قوانینِ نمره‌دهیِ ما در این پژوهش، همان روشِ استفاده شده اُتگنباتار (۲۰۲۰)، برگرفته از روش کاتو و همکاران (۲۰۱۲)، است. این معیارها و قوانین به شرح زیر هستند:

۱- برای هر دانش‌آموز در هر سوال، سه نمره درنظر گرفته می‌شود؛ نمره سیالی[1] نمره انعطاف‌پذیری[2] و نمره اصالت.[3] این نمره‌ها که اعدادی در بازهٔ $[۰,۱]$ هستند، به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

نمره سیالی؛ برابر است با «نسبت تعداد پاسخ‌های ارائه شده توسط دانش‌آموز، به بیش‌ترین تعداد پاسخ‌های ارائه شده توسط یک دانش‌آموز در نمونه».

نمره انعطاف‌پذیری؛ برابر است با «نسبت تعداد ایده‌های مختلف در پاسخ‌هایِ ارائه شده توسط دانش‌آموز، به بیش‌ترین تعداد ایده‌های مختلف در پاسخ‌های ارائه شده توسط یک دانش‌آموز در نمونه».

ایده به معنای فکر و اندیشه است .زمانی می توان ادعا کرد که ایده ی جدیدی خلق شده است که رویکرد و روشی متفاوت نسبت به رویکرد های قبلی ارائه شود .(فلاح[3] و همکاران ،۱۴۰۰)

نمره اصالت؛ که به بکر، نادر و منحصر بفرد بودنِ پاسخ‌های دانش‌آموزان داده می‌شود، برابر با «میانگین نمره‌هایی است که با توجه به جدول ۱۱، به هر پاسخِ دانش‌آموز داده می‌شود».

جدول ۱۱. معیار تعیین نمره اصالت برای هر پاسخ (اُتگنبارتار، ۲۰۲۰ و کاتو و همکاران، ۲۰۱۲)

معیار	نمره
اگر پاسخِ دانش‌آموز در بین کمتر از ٪۲ پاسخ‌های ارائه شده در نمونه باشد	۱
اگر پاسخِ دانش‌آموز در بین ٪۲ تا کمتر از ٪۶ پاسخ‌های ارائه شده در نمونه باشد	۰/۸
اگر پاسخِ دانش‌آموز در بین ٪۶ تا کمتر از ٪۱۱ پاسخ‌های ارائه شده در نمونه باشد	۰/۶
اگر پاسخِ دانش‌آموز در بین ٪۱۱ تا ٪۲۰ پاسخ‌های ارائه شده در نمونه باشد	۰/۴
اگر پاسخِ دانش‌آموز در بین بیشتر از ٪۲۰ پاسخ‌های ارائه شده در نمونه باشد	۰/۲

1Fluency Score
2Flexibility Score
3Originality Score
3. Fallah

۲- میانگین نمره‌های سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالت در یک سؤال، نمره دانش‌آموز در آن سؤال را مشخص می‌کند.

۳- نمره آزمونِ هر دانش‌آموز برابر است با میانگینِ نمره سؤال‌های اول و دومِ آن دانش‌آموز.

۴- میانگینِ نمره سیالیِ همه دانش‌آموزان در سؤال اول، نمره سیالیِ سؤالِ اولِ آزمون را مشخص می‌کند و به همین ترتیب، نمره مؤلفه‌های خلاقیتِ ریاضی در سؤال‌های اول و دوم تعیین می‌شود.

۵- نمره سیالیِ آزمون برابر است با میانگینِ نمره سیالیِ سؤال‌های اول و دومِ آزمون و به همین ترتیب، نمره‌های انعطاف‌پذیری و اصالتِ آزمون محاسبه می‌شود.

۶- نمره آزمون برابر است با «میانگین نمره آزمونِ همه دانش‌آموزان» یا «میانگین نمراتِ سیالی، انعطاف‌پذیری و اصالتِ آزمون».

یافته‌های پژوهش

پس از برگزاریِ آزمون، کار کنترل و بررسیِ پاسخ‌ها در دو مرحله انجام شد. نتایج مرحله اول در جدول‌های ۱۲ و ۱۳ ارائه شده است. در جدول ۱۲، تعداد پاسخ‌های دانش‌آموزان و همچنین تعداد و درصدِ پاسخ‌های قابل قبول و غیرقابل قبول آورده شده است. در جدول ۱۳، تعداد و درصدِ پاسخ‌های قابل قبول و غیرقابل قبول به تفکیکِ مسئله‌هایِ آزمون و به تفکیکِ جنسیتِ دانش‌آموزان آورده شده است.

جدول ۱۲. تعداد پاسخ‌ها، تعداد و درصدِ پاسخ‌های قابل قبول و غیرقابل قبول

پیش‌آزمون			
تعداد پاسخ‌ها ۱۱۰۳			
قابل قبول		غیرقابل قبول	
تعداد	درصد	تعداد	درصد
۴۹۵	۴۴/۹	۶۰۸	۵۵/۱

جدول ۱۳. تعداد پاسخ‌های قابل قبول و غیرقابل قبول و درصد آنها به تفکیک مسئله‌های آزمون و به تفکیک جنسیتِ دانش‌آموزان.

	مسئله ۱				مسئله ۲							
	قابل قبول		غیرقابل قبول		قابل قبول		غیرقابل قبول		قابل قبول		غیرقابل قبول	
پسر	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد
	۱۹۱	۵۱	۱۸۷	۴۹	۹۴	۳۵	۱۷۶	۶۵	۲۸۵	۲۵/۸	۳۶۳	۳۳
	قابل قبول		غیرقابل قبول		قابل قبول		غیرقابل قبول		قابل قبول		غیرقابل قبول	
دختر	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد
	۱۱۰	۴۶	۱۳۱	۵۴	۱۰۰	۴۷	۱۱۴	۵۳	۲۱۰	۱۹/۱	۲۴۵	۲۲/۱
	قابل قبول		غیرقابل قبول		قابل قبول		غیرقابل قبول					
	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد	تعداد	درصد				
	۳۰۱	۲۷/۳	۳۱۸	۲۸/۸	۱۹۴	۱۷/۶	۲۹۰	۲۶/۳				

با بررسی‌های دقیقِ جواب‌های قابل قبول، با توجه به معیار بررسی پاسخ‌ها، مسائل بازپاسخِ طرح شده برای هر یک از سؤال‌های آزمون، در ایده‌های مختلف دسته‌بندی شدند. عملکرد دانش‌آموزان در تعداد پاسخ‌های قابل قبول و در تعداد انواعِ ایده‌ها در پاسخ‌های مطرح شده در آزمون، به تفکیکِ سؤالات آزمون در جدول ۱۴ آورده شده است. لازم به ذکر است که بعد از این تا پایانِ مقاله، هر جا صحبت از پاسخ‌های دانش‌آموزان به میان می‌آید منظور پاسخ‌های قابل قبولِ ارائه شده توسط دانش‌آموزان است.

جدول ۱۴. عملکرد قابل قبول و تعداد انواعِ مختلف پاسخ‌ها در آزمون.

سؤال	تعداد کل پاسخ‌ها	تعداد انواع ایده‌های به‌کار رفته در پاسخ‌ها
۱	۳۰۱	۱۰ ایده
۲	۱۹۴	۷ ایده

انواع ایده‌های به‌کار رفته در پاسخ‌های داده شده به سؤالاتِ اول و دومِ آزمون، و همچنین

جدول ۱۵. انواع ایده‌های به‌کار رفته در پاسخ به مسئله اول، تعداد و نمونه‌هایی از پاسخ‌های قابل قبول در هر ایده.

انواع ایده‌ها	تعداد	نمونه‌هایی از پاسخ‌های قابل قبولِ ارائه شده توسط دانش‌آموزان
اول: جایگزینی	۱۱۴	ـ مجموع تعداد آجرهای کدام دو ردیف برابر با ۳۰ است؟ ـ مجموع تعداد آجرهای کدام دو ردیف برابر ۳۴ است؟ ـ مجموع تعداد آجرهای کدام دو ردیف بیش‌تر از ۲۲ است؟ ـ اختلاف تعداد آجرهای کدام دو ردیف برابر ۱۴ ست؟
دوم: افزایش ۱	۲۳	ـ مجموع تعداد آجرهای کدام سه ردیف برابر با ۴۸ می‌شود؟ ـ مجموع تعداد آجرهای کدام چهار ردیف برابر با ۶۰ است؟ ـ میانگین تعداد آجرهای کدام سه ردیف ۱۴ می‌شود؟ ـ مجموع آجرهای کدام سه ردیف عددی فرد است؟
سوم: افزایش ۲	۹۹	ـ حاصلضرب تعداد آجرهای کدام ردیف‌ها عددی زوج است؟ ـ مجموع تعداد آجرهای کدام سه ردیف عددی زوج است؟ ـ حاصل‌جمع تعداد آجرهای کدام دو ردیف با شماره‌های زوج، بر ۳ بخش‌پذیر است؟
چهارم: افزایش ۳	۷	ـ مجموع تعداد آجرهای کدام دو ردیف با شماره‌های فرد، برابر با ۳۲ است؟ ـ مجموع آجرهای کدام ردیف‌ها مکعب کامل است؟ ـ تعداد آجرهای کدام دو ردیف نسبت به هم اول هستند؟
پنجم: صورت‌بندی مجدد ۱	۹	ـ در کدام دو ردیف تعداد آجرهای یکی $\frac{۲}{۳}$ برابر دیگری است؟ ـ تفاضل یکان‌های کدام دو ردیف برابر با عددی اول است؟
ششم: صورت‌بندی مجدد ۲	۳۳	ـ تعداد آجرهای کدام ردیف مضرب ۴ است؟ ـ تعداد آجرهای کدام ردیف عددی اول است؟ ـ تعداد آجرهای کدام ردیف شمارنده‌ای از ۲۴ است؟ ـ تعداد آجرهای کدام ردیف عدد مثلثی نیست؟
هفتم: صورت‌بندی مجدد ۳	۵	ـ ریشه دوم تعداد آجرهای کدام ردیف عددی بین ۳ و ۴ است؟ ـ اگر تعداد آجرهای هر ردیف را به فارسی بنویسیم، کدام ردیف بیش‌تر از ۲ نقطه دارد؟
هشتم: صورت‌بندی مجدد ۴	۳	ـ در کدام ردیف، تعداد آجرها مضربی از شماره (اندیسِ) ردیف است؟ ـ در کدام ردیف، حاصلضرب یکان و دهگانِ تعداد آجرها، عددی اول می‌شود؟ ـ تعداد آجرهای کدام دو ردیف، حاصلضربِ دو عدد اول است؟
نهم: صورت‌بندی مجدد ۵	۳	ـ واسطه حسابی کدام دو جمله برابر با ۱۵ است؟ (۲ بار) ـ واسطه حسابی بین کدام دو ردیف عددی زوج است؟
دهم: ترکیب زمینه‌مدار کردن و صورت‌بندی مجدد	۵	ـ اگر مورچه‌خواری در پایین دیوار باشد و طول زبان و اندازه قد مورچه‌خوار به‌ترتیب به اندازه ارتفاع ۱ و ۳ آجر باشند، یک مورچه روی کدام ردیفِ دیوار باشد تا از دستِ مورچه‌خوار در امان باشد؟ ـ اگر قورباغه‌ای بتواند با پرش‌هایی به اندازه ارتفاع ۲ یا ۳ آجر بپرد؟ برای رسیدن به بالای دیوار، چگونه می‌تواند بپرد؟ ـ اگر کودکی بخواهد آنسوی دیوار را ببیند و قد کودک به اندازه ارتفاع ۴ آجر باشد، اندازه چهارپایه‌ای که زیرِ پایِ خود می‌گذارد به ارتفاع چند آجر باشد تا بتواند آنسوی دیوار را ببیند؟ (چهارپایه نباید از دیوار بلندتر باشد.)

نمونه‌هایی از این پاسخ‌ها، در جدول‌های ۱۵ و ۱۶ دیده می‌شود.

جدول ۱۶. انواع ایده‌های به‌کار رفته در پاسخ به مسئله دوم، تعداد و نمونه‌هایی از پاسخ‌های قابل قبول در هر ایده.

انواع ایده‌ها	تعداد	نمونه‌هایی از پاسخ‌های قابل قبولِ ارائه شده توسط دانش‌آموزان
اول: جایگزینی	۸۷	ـ در چندمین روز از تمرین، آمادگی رضا از سطح آمادگی دویدن حداقل ۱۲۰ کیلومتری فراتر می‌رود؟ ـ در چندمین روز از تمرین، مسافت دویده شده از ۳۲۰ کیلومتر فراتر می‌رود؟ ـ در چندمین روز، رضا به سطح آمادگیِ دویدنِ ۹۰ کیلومتر رسیده است؟
دوم: افزایش ۱	۲۹	ـ در چندمین روز از تمرین، مسافتی که رضا دویده است، ۳ برابر یک مربع کامل است؟ ـ در کدام روز، مسافتی که رضا می‌دود عدد اول نیست؟ ـ در چندمین روز، مسافت طی شده بر عدد ۸ بخش‌پذیر است؟
سوم: افزایش ۲	۳۷	ـ حاصل‌جمع مسافت‌های دویده شده در کدام دو روز بر ۵ بخش‌پذیر است؟ ـ میانگین مسافت‌های دویده شده رضا در کدام ۳ روز برابر مضرب ۷ است؟ ـ در چندمین روز مجموع مسافت‌های دویده شده توسط رضا بیش‌تر از ۱۳۰ کیلومتر است؟
چهارم: افزایش ۳	۲۰	ـ در ۸ روز تمرین، مجموع مسافت کدام دو روز بر ۳۰ بخش‌پذیر است؟ ـ مجموع مسافت‌های کدام دو روز متوالی تا روز ششم، مربع کامل است؟ ـ در کدام روز، مسافت دویده شده توسط رضا از ۳ برابر حداقل سطح آمادگی بیش‌تر بوده و بر ۶ نیز بخش‌پذیر است؟
پنجم: جرح و تعدیل	۱	ـ اگر یکی از رقیبان رضا، در روز اولِ تمرین خود ۳ کیلومتر دویده باشد و در هر روز ۳ برابر روز قبل بدود، رضا در چندمین روز، از آمادگی روز پنجم رقیبش بیش‌تر می‌دود؟
ششم: صورت‌بندی مجدد	۱۸	ـ در چندمین روز از تمرین، مجموع ارقامِ مسافت طی شده از ۶ بیش‌تر است؟ ـ در کدام روز نسبت دهگان به یکانِ مسافت دویده شده برابر با ۰/۵ است؟ ـ در چندمین روز از تمرین، مجموع ارقام حاصلضربِ یکان در صدگانِ مسافت دویده شده توسط رضا برابر با عددی اول است؟
هفتم: خارج از حوزه ریاضی	۲	ـ در چه روزی از تمرین، مسافت دودیده شده، ساعتی از ساعات شبانه‌روز نیست؟ ـ عدد مسافت دویده شده در کدام روز ساعتی از ساعت‌های شبانه‌روز است؟

لازم به ذکر است که در دسته‌بندیِ ایده‌ها، مثلاً دلیلِ تفاوتِ ایده‌هایِ افزایش ۱، افزایش ۲ و افزایش ۳ (که هر سه با عنوان افزایش آورده شده‌اند)، نوع و پیچیدگیِ ابتکار بکار رفته در طرح مسئله جدید به روش افزایش، از روی مسئله اولیه است. دلیلِ وجودِ بقیه ایده‌هایِ هم عنوان با شماره‌های متفاوت، نیز همین امر است.

ماکزیممِ تعداد پاسخ‌های ارائه شده توسط یک دانش‌آموز و ماکزیممِ تعداد ایده‌های

مختلف پاسخ ارائه شده توسط یک دانش‌آموز در آزمون، به تفکیکِ سؤالات آزمون در جدول ۱۷ آورده شده است.

جدول ۱۷. ماکزیمم تعداد پاسخ‌ها و ماکزیمم تعداد ایده‌های مختلف در پاسخ‌های یک دانش‌آموز در آزمون.

سؤال	ماکزیمم تعداد پاسخ ارائه شده توسط یک دانش‌آموز	ماکزیمم تعداد ایده‌های مختلف ارائه شده توسط یک دانش‌آموز
۱	۱۷	۴ نوع
۲	۸	۴ نوع

پس از نمره‌دهی به دانش‌آموزان، با توجه به معیارها و قوانینِ ذکر شده برای نمره‌دهی (۲-۵-۳)، نمرات مربوط به مؤلفه‌های خلاقیتِ ریاضیِ آزمون (جدول ۱۸)، نمره آزمون (نمره خلاقیتِ ریاضی دانش‌آموزان پایه دهم) و همچنین عملکرد دانش‌آموزان به تفکیک جنسیت (جدول ۱۹) استخراج شد.

$$\text{نمره آزمون (نمره خلاقیتِ ریاضی)} = \frac{۰/۱۳۳۳ + ۰/۲۶۴۲ + ۰/۲۲۷۳}{۳} = ۰/۲۰۸۲$$

جدول ۱۸. نمرات مربوط به مؤلفه‌های خلاقیتِ ریاضیِ آزمون.

نمره مؤلفه‌های خلاقیت مربوط به مسئله ۱			نمره مسئله ۱	نمره مؤلفه‌های خلاقیت مربوط به مسئله ۲			نمره مسئله ۲	نمره مؤلفه‌های خلاقیت مربوط به آزمون			نمره آزمون
سیالی	انعطاف‌پذیری	اصالت		سیالی	انعطاف‌پذیری	اصالت		سیالی	انعطاف‌پذیری	اصالت	
۰/۱۱۴۹	۰/۳۰۵۳	۰/۲۵۵۳	۰/۲۲۵۲	۰/۱۵۱۷	۰/۲۲۳۱	۰/۱۹۹۲	۰/۱۹۱۳	۰/۱۳۳۳	۰/۲۶۴۲	۰/۲۲۷۳	۰/۲۰۸۲

$$\text{نمره آزمون (نمره خلاقیتِ ریاضی)} = \frac{۰/۲۲۵۲ + ۰/۱۹۱۳}{۲} = ۰/۲۰۸۲$$

جدول ۱۹. عملکرد دانش‌آموزان در آزمون به تفکیک جنسیت.

جنس	نمره مؤلفه‌های خلاقیت مربوط به مسئله ۱			نمره مسئله ۱	نمره مؤلفه‌های خلاقیت مربوط به مسئله ۲			نمره مسئله ۲	نمره مؤلفه‌های خلاقیت مربوط به آزمون			نمره آزمون
	سیالی	انعطاف‌پذیری	اصالت		سیالی	انعطاف‌پذیری	اصالت		سیالی	انعطاف‌پذیری	اصالت	
پسر	۰/۱۱	۰/۲۹	۰/۲۲	۰/۲۱	۰/۱۱	۰/۱۷	۰/۱۵	۰/۱٤	۰/۱۱	۰/۲۳	۰/۱۹	۰/۱۷
دختر	۰/۱۲	۰/۳۳	۰/۳۱	۰/۲۵	۰/۲۳	۰/۳۳	۰/۲۹	۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۳۳	۰/۳۰	۰/۲۷

پاسخ به پرسش‌های پژوهش

سؤال اول: عملکردِ (نمره خلاقیتِ ریاضیِ)، دانش‌آموزان پایه دهم در آزمونِ طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته، چگونه (چقدر) است؟

نتیجه این پژوهش نشان می‌دهد که نمره خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزانِ پایه دهمِ مدارس استعدادهای درخشان، با استناد به آزمونی که با محتوای طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته از مبحثِ دنباله‌های حسابی و هندسی برگزار شد، عدد ۰/۲۰۸۲ به‌دست آمد. با دقت در تنوعِ مسائلِ بازپاسخِ طرح شده توسط دانش‌آموزان، می‌بینیم که تعداد مسائل مربوط به روش‌های جایگزینی و افزایش، سهم بسیار زیادی در مقابل تعدادِ اندکِ مسائل طرح شده به روش‌های شش‌گانه ویسترو ـ یو دارند.

سؤال دوم: عملکردِ دانش‌آموزانِ دختر و پسرِ پایه دهم، در آزمونِ طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته، در مقایسه با یکدیگر چگونه است؟

با مقایسه نمره دانش‌آموزان دختر (۰/۲۶۹۲) و نمره دانش‌آموزان پسر (۰/۱۷۶۶)، واضح است که عملکرد خلاقانه دختران در طرح مسائل بازپاسخِ ریاضی در موقعیت‌های ساختاریافته (در کلِ آزمون و در هر دو مسئله آزمون)، بهتر از عملکرد پسران است. البته در مسئله اول (مربوط به دنباله حسابی) و به ویژه در مؤلفه‌های سیالی و انعطاف‌پذیریِ خلاقیت، علمکردِ پسران نزدیک به عملکردِ دختران بوده است.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف این پژوهش بررسیِ خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزان پایه دهم با استفاده از طرح مسئله بازپاسخ در موقعیت‌های ساختاریافته بود. نتیجه نهاییِ آزمون نشان داد که نمره خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزانِ پایه دهمِ مدارسِ استعدادهای درخشان برابر با ۰/۲۰۲۸ است و از آنجایی که محدوده تغییراتِ نمره خلاقیتِ ریاضی، بازه [۰,۱] است، به نظر می‌رسد دانش‌آموزانِ شرکت‌کننده در آزمون، از سطح خلاقیتِ ریاضیِ پایینی برخوردار هستند. با نگاهی به یافته‌های ازمون و با توجه به اعداد و ارقام به‌دست آمده، توجه به چند نکته قابل تأمل است. در بین پاسخ‌های استخراج شده، تعداد پاسخ‌های غیرقابل قبول (۶۰۸)، بیشتر از تعداد پاسخ‌های قابل قبول (۴۹۵)، بود. این موضوع می‌تواند اساساً به دلیلِ ضعف در فرایند طرح مسئله، یا دشواریِ طرح مسئله بازپاسخ و یا حاکی از ضعف علمیِ دانش‌آموزان باشد. در هر حال با وجود آنکه در کتاب های جدید ریاضی مدرسه ای تا حدی به موضوع طرح مسئله پرداخته شده است، اما پیاده سازی آن در کلاس های درس نیاز به فراهم شدن شرایطی مانند آموزش معلمان و انجام اصلاحات در برنامه‌های درسی دوره‌های کارشناسی آموزش ریاضی است. دوره‌های ضمن خدمت معلمان، نیازمند بازنگری و بهبود هستند. در این راستا لازم است استفاده از آموزشگرانی خبره که با ایده‌ها و رویکردهای نوین آموزشی- به ویژه آنهایی که در کتاب های درسی گنجانده شده اند- آشنا باشند به غنی تر شدن این دوره‌ها کمک شایانی خواهد کرد.

درصدِ پاسخ‌های قابل قبول در پسران (٪۴۴) و درصد پاسخ‌های قابل قبول در دختران (٪۴۶)، است که تقریباً یکسان به نظر می‌رسد، بنابراین درصدِ پاسخ‌های غیرقابل قبولِ پسران و دختران نیز تقریباً یکسان خواهد بود. این مطلب می‌تواند نشانه درکِ یکسان پسران و دختران از موقعیتی که در آن قرار گرفته‌اند باشد، به عبارتی دیگر، نشان می‌دهد که عمقِ فهمِ فرایندِ ترکیبیِ طرح مسئله بازپاسخ در هر دو گروه به یک اندازه بوده است.

سهمِ هر دختر در تولید پاسخ، به‌طور متوسط ۸/۴۳ پاسخ (۳/۹ پاسخِ قابل قبول و ۴/۵۴ پاسخِ غیرقابل قبول) و سهمِ هر پسر ۶/۲۳ پاسخ (۲/۷۴ پاسخِ قابل قبول و ۳/۴۹ پاسخِ غیرقابل قبول) است. این

وضعیت حاکی از آن است که دانش‌آموزانِ دختر در زمانِ درنظر گرفته شده برای آزمون، عملکرد بهتری از خود نشان داده‌اند و در انتقال محتویات ذهنیِ خود به عنوان پاسخ، سرعت عمل و جسارت بیشتری داشته‌اند. قضاوت دقیق تر در این زمینه مستلزم انجام پژوهش های بیشتری است. به هر حال بخشی از این نتایج ممکن است ناشی از دقت و اهتمام بیشتری باشد که دختران نسبت به انجام تکلیف مورد نظر داشته‌اند. نتایج پژوهش‌های باقرزاده و همکاران(۱۳۹۴) و سیدان و شبانی(۱۳۹۹) نشان داد که بین نمرات دختران و پسران تفاوت معنا داری وجود ندارد. لازم به ذکر است که پژوهش های فوق به صورت عام به موضوع خلاقیت پرداخته بودند و لی تمرکز پژوهش حاضر بر خلاقیت ریاضی است. تست‌های خلاقیت تورنس و عابدی(۱۳۷۲) که برای سنجش و اندازه‌گیری خلاقیت رایج هستند، برای اندازه‌گیریِ خلاقیت ریاضی کاربرد ندارند، معیارِ کاتو و همکاران (۲۰۱۲) برای نمره‌دهی به خلاقیت، کارِ اندازه‌گیریِ خلاقیتِ ریاضی را میسر می‌کند. در زمینه بررسیِ کمیِ خلاقیت ریاضی، مطالعات اندکی صورت گرفته است. نمره خلاقیت ریاضیِ دانش‌آموزانِ مورد مطالعه ما، نزدیک به نمره به‌دست آمده در مطالعه اُتگنباتار (۲۰۲۰) ،نمره ی خلاقیت ریاضی ۰/۲۸ ، است که هر دو حاکی از سطحِ پایینِ خلاقیت ریاضی نمونه مورد بررسی است. البته با انتخاب نمونه دیگری از دانش‌آموزان، نمره خلاقیتِ ریاضی ممکن است بالاتر یا پایین‌تر به‌دست آید. به علاوه اظهار نظر بیشتر در این مورد نیاز به انجام پژوهش در مدارس دیگر -به ویژه مدارس عادی- را هم دارد. در مورد مقایسه عملکرد دانش‌آموزان به تفکیک رشته تحصیلی و همچنین به تفکیک جنسیت، مطالعه مشابهی با پژوهش حاضر مشاهده نشد.

به اعتقادِ ما سطحِ پایینِ خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزان در این آزمون، می‌تواند به دلایل زیر باشد:

۱) مهیا نبودن فرصت‌های کافیِ مواجه شدن با تکالیفِ طرح مسئله و فرایند مسائل بازپاسخ برای دانش‌آموزان.

ممکن است دانش‌آموزان فرصت روبه‌رو شدن با تکالیف طرح مسئله را به‌قدر کافی نداشته‌اند

که این امر می‌تواند به چند دلیل اتفاق افتاده باشد. یک دلیل این‌که در کتاب‌های درسی، تکالیف غنی از موقعیت‌های طرح مسئله و تکالیف بازپاسخ برای دانش‌آموزان تدارک دیده نشده است. این امر هم به نوبه خود طبیعی است. زیرا کتاب های درسی به شکل تدریجی به امر ورود کرده اند ولی در مقابل برنامه‌های آماده سازی معلمان در دانشگاه‌ها و مراکز آموزش عالی به چنین تغییراتی واکنش های مناسبی نداشته اند و در برخی موارد شاهد تاکیدات دهه‌های گذشته مبنی بر توجه صرف به دروس تخصصی محتوایی بوده ایم. دلیل دیگر این‌که معلمان در استفاده از فرایندهای طرح مسئله وبهره بردن از مسائل بازپاسخ در تدریس، آموزش ندیده‌اند، لذا با تأکید بر تکالیف معمولی و روتین، به سختی ممکن است زمینه امکان بروز و شکوفایی تفکرِ خلاقِ در دانش‌آموزان فراهم شود. به‌عنوان دلیلی دیگر می‌توان به نحوه ارزشیابی دانش‌آموزان اشاره کرد که سنجشِ خلاقیتِ آنها، جایگاهی در آزمون‌های دانش‌آموزان ندارد. آزمون های مختلفی که بسیاری از آنها به خارج از فضای مدرسه مربوط است مسیر وجهت گیری مناسبی را برای رشد و پرورش خلاقیت ترسیم نمی کنند. بدون وجود ضوابطی دقیق و روشن در مورد آزمون ها - با در نظر گرفتن گردش مالی عظیمی که از این رهگذر در جریان است- به سختی امکان تحولی جدی در این زمینه فراهم است. تجربه کنکور در سال های اخیر نشان می دهد که طراحان با وجود تغییر تحولات اساسی در کتاب‌های درسی، شیوه‌های جدید را در طراحی آزمون ها به کار نگرفته اند.

لازم به توضیح است که رویکرد کتاب‌های درسی، در بحثِ تدریجی مطرح کردنِ فعالیت‌های طرح مسئله و پرداختن به مسائل بازپاسخ، از جهاتی می‌تواند قابل توجیه باشد. با در نظر گرفتن مقدار ساعاتِ هفتگیِ اختصاص داده شده به دروس ریاضی در برنامه درسی وهفتگیِ مدارس و نیز با در نظر گرفتن حمایت اندک از دبیران ریاضی برای پیاده سازی ایده‌های جدید، امکان تغییرات شدید در کتب درسی به سختی قابل تصور است.

۲) مفاهیمِ ریاضیِ مورد بحث در پژوهش

مفاهیمی از کتابِ درسیِ دانش‌آموزانِ پایه دهم که در این مطالعه مورد بحث قرار گرفتند

(دنباله‌های حسابی و هندسی)، به گواه کارشناسانِ امر، از نظر طرح مسئله و تولید مسائل بازپاسخ، مفاهیمِ تخصصی و گاهاً به سختی قابل دستیابی هستند. لذا اگر مفاهیمِ دیگری مورد بحث قرار می‌گرفتند، این امکان وجود داشت که سطحِ خلاقیتِ ریاضیِ دانش‌آموزان نیز دچار تغییر شود. طراحی پژوهش هایی مشابه با دیگر موضوعات و در پایه‌های مختلف به خوبی قابل درک است.

برای تربیت دانش آموزانی شایسته که در زندگی معمول خود یا در زندگی حرفه ای خود در آینده – به عنوان شهروندان یا آینده سازان و مدیران کشور- با تکیه بر خلاقیت توانایی غلبه بر مشکلات و حل مسائل را داشته باشند، ناگزیر به اصلاح روش ها و رویکردهای آموزشی هستیم. در بین چالش های موجود به نظر می رسد آموزش معلمان از اولویت بالایی برخوردار است. به همین دلیل پژوهش در این زمینه نیز ضرورت خود را به نشان می دهد. از جمله پژوهش های ضروری دیگر در این زمینه بررسی تأثیرِ آموزش بر خلاقیتِ ریاضی دانش‌آموزان است. پژوهش حاضر می تواند یک نقطه شروع در زمینه خلاقیت ریاضی باشد.

منابع و مآخذ

اسکندری، مجتبی. (۱۳۹۲). بررسی تأثیر پرورش مهارت‌های طرح مسئله ریاضی بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان سوم راهنمایی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.

اسکندری، مجتبی و ریحانی، ابراهیم. (۱۳۹۳). بررسی فرایند طرح مسئله در آموزش ریاضی. *دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی*، ۲(۳)، بهار و تابستان ۱۳۹۳، ۱۴۰-۱۱۷.

باقرزاده گل مکانی، ز.، و بنی جمالی، ش.، و سیف، ع. (۱۳۹۴). مقایسه روند تحول خلاقیت دانش آموزان دختر و پسر دوره متوسطه در مناطق بالا و پایین. *ابتکار و خلاقیت در علوم انسانی*،۵(۳)، ۳۳-۵۸.

بروجردی، مینا؛ اسدزاده، حسن؛ حجازی، مسعود؛ انتصار فومنی، غلام‌حسین. (۱۳۹۹). تأثیر موسیقی

و نقاشی در افزایش خلاقیت و کاهش پرخاشگری کودکان پیش‌دبستانی شهر همدان. *نشریه علمی ابتکار و خلاقیت در علوم انسانی*، ۱۰ (۱)، ۱-۲۶.

ریحانی، ابراهیم و حق‌جو، سعید. (۱۳۹۹). *حل مسئله ریاضی، از نظریه تا عمل* (چاپ اول). تهران: انتشارات دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

سعیدی، الهه؛ پیرخائفی، علیرضا. (۱۳۹۹). مقایسه خلاقیت و حافظه دانش‌آموزان دارا و بدون ناتوانی یادگیری ریاضی. *فصلنامه پژوهش در یادگیری آموزشگاهی و مجازی*، ۷ (۴)، ۲۱-۳۰.

سلیمیان، فاطمه؛ ریحانی، ابراهیم و بهرامی سامانی، احسان.(۱۳۹۸). بررسی تأثیر رویکرد آموزشی مبتنی بر مسئله باز-پاسخ بر توانایی حل‌مسئله دانش‌آموزان پایه هفتم. پژوهش‌های آموزش و یادگیری، ۱۶(۲)،پاییز و زمستان.

سیدان، سیدابوالقاسم و شبانی، ناهید.(۱۳۹۹). مقایسه خلاقیت دانش آموزان دختر و پسر متوسطه اول،ششمین کنفرانس بین المللی روانشناسی، علوم تربیتی و سبک زندگی

شکوهی امیرآبادی، لیلا؛ دلاور، علی؛ عباسی سروک، لطف‌اله؛ کوشکی، شیرین. (۱۳۹۷). تحلیل محتوای سند تحول بنیادین آموزش و پرورش براساس خلاقیت و شادکامی. *ابتکار و خلاقیت در علوم انسانی*، ۸ (۳)، ۱۶۵-۱۹۲.

رضازاده بهادران، حمیدرضا؛ اسکندری، مهتاب. (۱۳۹۷). بررسی محتوای کتاب ریاضی یک پایه دهم دوره متوسطه براساس الگوی خلاقیت گیلفورد. *فصلنامه علمی پژوهشی ابتکار و خلاقیت در علوم انسانی*، ۸ (۱)، ۱۴۳-۱۶۴.

عابدی، جمال. (۱۳۷۲). خلاقیت و شیوه‌ای نو در اندازه‌گیری آن، *پژوهشهای روان شناختی*. ۲(۲-۱) ۴۶-۵۴.

فلاح نسیمی، محمد. (۱۳۹۵). بررسی میزان توانایی طرح مسئله معلمان ابتدایی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.

فلاح نسیمی، محمد؛ ریحانی، ابراهیم؛ اسلام‌پور، محمدجواد. (۱۴۰۰). جست و جوی عناصر اصلی خلاقیت در عملکرد معلمان دوره ابتدایی در فرایند طرح مسئله. *مجله پژوهش در آموزش ریاضی*،

۲(۱)، ۴۱-۶۲.

نجفی، هادی. (۱۳۹۳). بررسی تفکر واگرای دانش‌آموزان پایه هفتم در حل مسائل بازپاسخ. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.

یافتیان، نرگس. (۱۳۹۷). شناسایی مدلی برای فعالیت‌های خلاقانه دانشجویان ریاضی: یک تحقیق کیفی. *مجله علمی پژوهشی «پژوهش‌های برنامه درسی»*، ۸(۲)، پیاپی ۱۶، پاییز و زمستان ۱۳۹۷، ۱۷۲-۱۹۸.

Abu-Elwan. R. (2002). Effectiveness of Problem Posing Strategies on Prospective Mathematics Teachers' Problem-Solving Performance. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 25(1), 56-69.

Amado, N., Carreira, S., & Jones, K. (Eds.). (2018). Broadening the scope of research on mathematical problem solving: *A focus on technology, creativity and affect.* Springer.

Arikan, E. E. (2017). Is There a Relationship between Creativity and Mathematical Creativity? *Journal of Education and Learning*, 6(4), 239.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). The open-ended approach: A New proposal for teaching Mathematics. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Bicer, A., Lee, y., Perihan, C., Capraro, M., & Capraro, R. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educational Studies in Mathematics*.
https: // doi.org / 10.1007 / S16049-020-09995-8

Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. In F.M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing. From research to effective Practice
(pp. 103-123). Springer.

Briggs, M., & Davis, S. (2008). Creative Teaching Mathematics in the Early Years and Primary Classrooms. *New York: Madison Ave*.

Cai, W., Khapova, S., Bossink, B., Lysova, E., & yuan, J. (2020). Optimizing employee creativity in the digital era: Uncovering the interactional effects

of abilities, motivations, and opportunities. *International Journal of environmental research and public health, 17 (3), 10-38.*

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Edcuation*, 17(1), 37-47.

Christou, C., Mosoulides, N., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes. ZDM, 37(3), 1-10.

Cifarelli, V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended Problem-solving situations. In paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Roanoke, VA: *Virginia Tech University Center*.

Contveras, J. (2007). Unraveling the Mystery of the Origin of Mathematical Problem: Using a Problem-Posing Framework with Prospective Mathematics Teachers. *The Mathematics Educator*, 17(2), 15-23.

Crespo, S., & Harper, F. K. (2019). Learning to Pose collaborative mathematics problems with secondary prospective teachers. *International Journal of Educational Research. Advance Online Publication*.

Damayanti, H. T., & Sumardi, S. (2018). Mathematical Creative Thinking Ability of Junior High School Student in Solving Open-Ended Problem. JRAMathEdu (*Journal of Research and Advances in Mathematics Education*), 3(1), 36-45.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*,34(3), 183-217.

Guilford, J. P. (1959). Traits of Creativity. In H. H. Anderson (Ed.), *Creativity and its Cultivation New York: Harper & Brothers Publishers*, 142-161.

Glaveanu, V.P. (2018). Educating which creativity? Thinking Skills and Creativity, 27, 25-32.

Guilford, J.P. (1967). The nature of human intelligence. *New York: MCGraw-Hill*.

Hashimoto, Y. (1997). The methods of fostering creativity through

mathematical problem solving. ZDM, 29(3), 86-87.
Haylock, D. W. (1987): A framework for assessing mathematical creativity in school children. In: *Educational Studies in Mathematics*. 18(1), 59-74.
Hetzroni, O., Agada, H., & Leikin, M. (2019). Creativity in autism: an examination of general a mathematical creative thinking among children with autism spectrum disorder and children with typical development. *Journal of autism and development disorders,* 49 (9), 3833-3844.
Jensen, L. R. (1973). The Relationships Among Mathematical Creativity, Numerical Aptitude, and Mathematical Achievement. *Journal of Creative Behavior*, 25(2), 154-161.
Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2012). Connecting Mathematical Creativity to Mathematical ability, ZDM, 45(2), 167-181.
Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity? *In Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematical Education* (pp. 1016-1023). Prague, Czech Rpublie.
Kilpatick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems Come frome? In: A.H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education
(pp. 123-147). Hillsdale, NJ: *Lawrence Erlbaum*.
Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting Success Stories on Mathematical Problem Posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics,*83, 71-86.
Kontrovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149-161.
Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathmatics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51-61.
Laycock, M. (1970). Creative Mathematics at Nueva. Arithmetic Teacher, 17, 325-328.
Leikin, R., & Sriraman, B. (Eds). (2016). Creativity and giftedness:

Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond (pp.1-3). Springer.

Leikin, R., & Elgrably, H. (2019). Problem through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*.

Leikin, R., & Elgrably, H., (2022). Strategy creativity and outcome creativity when solving open tasks: focusing on problem posing through investigations. *ZSM-Mathematics Education* 54, 35-49.

Leung, S. K. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. ZDM, 29(3), 81-85.

Liljedahl, P, & Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. For *The Learning of Mathematics*, 26(1),20-23.

Lubart, T., & Guignard, J. H. (2004). The generatlity-specificity of creativity: A multivariate approach, In R. J. Sternberg, E. L. Grigornko, & J. L. Singer (Eds.), Creativity: From potential to realization (pp. 43-56). *Washington, D.C: American Psychological Association*.

Lurai, S. R., Sriraman, B., & Kaufman, J.C. (2017). Enhancing equity in the classroom by teaching for mathematical creativity. *ZDM*, 49, 1033-1039. https:// doi.org / 10.1007/ s11858-017-0892-2.

Mann, E. L. (2005). Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.

Murni. (2013). Open ended approach in learning to improve students thinking skill in Banda Aceh. *International Journal of Independent Research and Studies*, 2(2), 95-101.

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. *Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics, Inc*.

OECD. (2019). Framework for the assessment of creative thinking in PISA 2021. Accessed Nov 2020. https: // www. oecd.org/pisa/publications/PISA-2021-ceative-thinking-framework.pdf

Otgonbaatar, K. (2020). Examining Mathematical Creativity Among Mongolian Ninth-Grade Students Using Problem-Posing Approach. *Journal of Education and Practice*, 11 (27), 69-75.

Pehkonen, E. (1997). Use of Open-Ended Problem in Mathematics Classroom. *Finland: University (Finland). Dept. of teacher Education*.

Pehkonen, E. (1999). Open-Ended Problems: A method for an educational change. *In International Symposium on Elementary Maths Teaching (SEMT99)*. Prague: Charles University.

Pehkonen, E. (2007). Problem Solving in mathematics education in Finland. WG2, Topic, 8,9.

Poincaré, H. (1948). Scince and method. *New York: Dover*.

Poincaré, H. (1956): Mathematical Creation. In: J. R. Newman (ed.): The world of mathematics, V4, *New York: Simon and Schuster*, pp. 2041-2050.

Sanchez, A., Font, V., & Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Mathematics Education Research Journal*. https:// doi.org / 1007 / S13394-021-00367-w.

Sharma, Y. (2014). The Effects of Strategy Mathematics Anxiety on Mathematical Creativity of School Students. *Mathematics Education*, 9(1), 25-37.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28

Sliver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing, Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematic, 29 (3), 75-80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms. *The Journal of Secondary Gifted Edcuation*, 17, 20-36.

Sriraman, B.&Lee, K. (2011). The Elements of Creativity and Giftedness (Vol.1). *Sense Publishers*.

Sriraman, B., Haavold, P., & Lee, K. (2013). Mathematical creativity and giftedness: a commentary on and review of theory, new operational views, and ways forward. ZDM, 1-11.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education*

(pp.518-525). *Melbourn: Mathematics Education Research Group of*

Australasia.

Suherman. (2013). Kiat Pendidikan Mathematika di Indonesia: Konstatasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan. *Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan Nasional*.

Sullivan, M. (2011). *Precalculus*. Ninth edition, Pearson Education.

Tjoe, H. (2019). Looking Back to Solve Differently: Familiarity, Fluency, and Flexibility. In Mathematical Problem Solving (PP. 3-20). *Springer, Cham*.

Torrance, E. P. (1966). Torrance Test of creative Thinking: Norms technical manual, Princeton, *NJ: Personnel Press*.

Torrance, E. P. (1974). Norms technical manual: Torrance Tests of Creative Thinking. Lexington, *Mass: Ginn and Co*.

Torrance, E. P. (1988). The nature of creativity as manifest in its testing, In R.J. Sternberg (Ed.), The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives (PP. 43-75). *New York: Cambridge University Press*.

Treffinger, D., Young, G., Selby, E., & Shepardson, C. (2002). Assessing Creativity: A guide for educators. Storrs, *CT: The National Research Center on the Gifted and Talented*.

Vistro – yu, C.P. (2009). Using innovation techniques to generate new problems. In Mathematical Problem Solving: *Yearbook 2009, association of mathematics educators, PP. 185-207*.

Wardani, S. B., Sumarmo, U., & Nishitoni, I. (2011). Mathematical Creativity and Disposition: Experiment with grade-10 students using silver inquiry approach.

Wechsler, S. M., Saiz, C., Rivas, S. F., Vendromini, M. C., & Franco, A. (2018). Creative and Critical Thinking: Independent or Overlapping Components. *Thinking Skills and Creativity*, 27(1), 114-122.

Wendy, B. Sanchez. (2013). Open-ended Questions and process Standards. *National Concil of Teachers of Mathematics*, 107 (3), 206-211.

Wessles, H. M. (2014). Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(9), 22-40.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships

between students' creativity and mathematical problem posing abilities: comparing chines and u.s. students. In B. Sriraman, K. Lee (Eds.), *The Elements of Creativity and Giftedness* (pp. 5-28). *Rotterdom, Netherlands: Sense Publisher.*