



## تعیین ضریب شدت تنش در ورق با ترک میانی با استفاده از روش هم‌هندسی براساس عملگر بی‌زیبر تحت بارگذاری کوپله حرارتی و مکانیکی

محمد مهدی شهیب<sup>۱\*</sup>، پیمان یوسفی<sup>۲</sup>

۱. هسته پژوهشی محاسبات پیشرفته، گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران.

۲. گروه مهندسی مکانیک، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران.

\*نویسنده مسئول: m\_m\_shoheib@iauhvaz.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۰۹

### چکیده

در این تحقیق، هدف تعیین ضریب شدت تنش در یک ورق ترک‌دار تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی است. برای این منظور به کمک کدنویسی در نرم افزار متلب یک ورق با ترک میانی به روش هم‌هندسی بر اساس عملگر بی‌زیبر، مدل‌سازی و المان‌بندی گردید. در این روش توابع پایه نیز با استفاده از عملگر بی‌زیبر به صورت یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های برنشتاین تولید می‌شوند. استفاده از این عملگر موجب تولید المان‌های بی‌زیبر با پیوستگی  $C^0$  شده که چند جمله‌ای‌های برنشتاین بر روی این المان‌ها تعریف می‌شوند. جهت مدل‌سازی ترک از روش هم‌هندسی توسعه یافته استفاده شد. در این روش به کمک تعریف تابع مجموعه تراز مناسب، نقاط کنترلی که در طول ترک و نوک ترک وجود دارند شناسایی و استخراج شده‌اند. با غنی‌سازی نقاط کنترلی استخراج شده با توابع غنی‌ساز مناسب و اعمال شرایط مرزی، فرآیند تحلیل انجام شده و کرنش‌ها و تنش‌ها محاسبه گردیدند. در نهایت مقدار ضریب شدت تنش مد اول بر اساس روش انتگرال اندرکنش به دست آمد. برای بررسی صحت نتایج به دست آمده، تحلیل مشابهی به روش اجزا محدود انجام شد و نتایج حاصل از هر دو روش مقایسه شد.

**کلمات کلیدی:** روش هم‌هندسی توسعه یافته، عملگر بی‌زیبر، چند جمله‌ای برنشتاین، ترک، ضریب شدت تنش.

### مقدمه

مطالعه و کاربرد مکانیک شکست از نظر مهندسی بسیار مهم است، زیرا ترک‌ها و عیوب ترک مانند در قطعات صنعتی زیاد رخ می‌دهند [۱]. از آنجا که تحلیل شکست در پیشرفت طراحی بسیاری از سازه‌های مهندسی اهمیت دارد، پیش‌بینی و تحلیل ترک، یکی از موضوعات تحقیقاتی مورد استقبال محققان در دو دهه اخیر مبدل شده است. راجو و نیومن [۲] معادلات تحلیلی را برای به دست آوردن ضریب شدت تنش حالت‌های سه بعدی پیچیده، از جمله ترک نیم بیضوی در اجسام ساده تحت تأثیر تنش یکنواخت ارائه نمودند. سپس روابطی برای به دست آوردن ضریب شدت تنش نیم بیضوی ارائه کردند. شاهانی و حبیبی [۳] مسئله ترک در لوله‌ها با ترک سطحی نیم بیضوی تحت اعمال هم‌زمان بارهای استاتیکی کششی، گشتاور خمشی و پیچشی را مورد بررسی قرار داد. آن‌ها مشاهده نمودند که در صورت اعمال هم‌زمان بارهای ایستا هر سه مود مکانیک شکست به وجود خواهد آمد و مقدار مود اول از دو مود دیگر بیشتر است.

در اکثر مواردی که حل معادلات به روش‌های تحلیلی و آزمایشگاهی مقدور نیست از روش‌های عددی استفاده می‌گردد، اخیراً روش‌های جدید عددی برای برطرف کردن این مشکلات ارائه شده است. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها روش تحلیل هم‌هندسی<sup>۱</sup> است. روش هم‌هندسی توسط هیوز و همکاران [۴] ارائه شده است و به طور گسترده و موفقیت آمیزی در مسائل مهندسی به کار رفته است. توسعه روش هم‌هندسی به طوری که در مسائل گسترش ترک، نیازی به المان‌بندی جدید نباشد، این روش را به

<sup>1</sup>Isogeometric



یک روش بسیار کارآمد در تحلیل مسائل ناپیوسته تبدیل می‌کند. گانگ و همکاران [۵] روش هم‌هندسی و روش المان مرزی را کوپل کرده و روش جدیدی را برای حل مسائل سه‌بعدی انرژی ارائه نمودند. هوآ و همکاران [۶] روش هم‌هندسی را برای تحلیل کمانش در کامپوزیت‌های سختی متغیر به‌کار گرفتند. در این نوع کامپوزیت، عدم پیوستگی المان‌ها به دلیل متغیر بودن سختی در روش اجزاء محدود مطرح گردیده است. سپس از روش هم‌هندسی در تحلیل کمانش ورق کامپوزیتی استفاده شده و دقت خوب نتایج نسبت به روش اجزاء محدود نشان داده شده است.

برای ایجاد هندسه داری ترک در مسائل مکانیک شکست و تحلیل آن با روش هم‌هندسی، باید از روش هم‌هندسی توسعه یافته<sup>۱</sup> (XIGA) استفاده می‌شود. در این روش ایجاد هندسه با استفاده از بردار گرهی و نقاط کنترلی بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها صورت می‌گیرد و با کمک گرفتن از برخی توابع کمکی خاص (توابع مجموعه تراز<sup>۲</sup> و توابع غنی ساز) ناپیوستگی‌ها مدل می‌شوند. استفاده از عملگر بی‌زیرو<sup>۳</sup> بر این اساس است که هر تابع پایه بی‌اسپیلاین یا نریز را می‌توان از نظر ریاضی به صورت یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای برنشتاین<sup>۴</sup> نوشت. در واقع این عملگر تابع چند جمله‌ای برنشتاین را به تابع بی‌اسپیلاین نگاشت می‌کند. یک المان بی‌زیرو در هر بعد بر اساس یک بردار گرهی با مقادیر [۰، ۱] و بدون مقادیر داخلی ساخته می‌شود. تابعی که روی این بردار گرهی ساخته می‌شود چند جمله‌ای برنشتاین نام دارد. برای تجزیه توابع پایه نریز و ایجاد المان‌های بی‌زیرو مربوطه که فرآیند تجزیه بی‌زیرو<sup>۵</sup> نامیده می‌شود، همه گره‌های داخلی یک بردار گرهی به تعداد  $p$  بار تکرار می‌شوند. هوانگ و همکاران [۷] از آنالیز هم‌هندسی بر اساس عملگر بی‌زیرو برای آنالیز کمانش ورق استفاده کردند. آن‌ها با بررسی شرایط مختلف هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی و مقایسه نتایج با نتایج تحقیقات قبلی در خصوص کمانش ورق‌ها، نشان دادند. روش دیگری برای اصلاح محلی المان‌بندی با اعمال عملگر بی‌زیرو برای توابع پایه تی-اسپیلاین توسط بورست و چن [۸] ارائه شد. آن‌ها برای نشان دادن صحت، دقت و کارایی روش خود، آن را روی چند مدل مختلف اعمال کردند. نوین و همکاران [۹] یک روش تحلیل عددی (روش هم‌هندسی بر اساس عملگر بی‌زیرو) برای سازه‌های تحت تاثیر نیروهای چندگانه و با شرایط خاص ارائه دادند. نتایج نشان داد که این روش دارای نتایج با دقت بیشتر و با همگرایی سریع‌تر نسبت به سایر روش‌ها از جمله روش اجزاء محدود است. فرایند و توابع غنی‌سازی استفاده شده برای میدان دما می‌تواند با موارد استفاده شده برای میدان جابجایی در غیاب گرادیان دما و تنش‌های ناشی از آن یکسان باشد. جابجایی و کرنش در وجود بارهای ترمومکانیکی شامل دو بخش است که یک بخش آن مربوط به بارگذاری مکانیکی و بخش دیگر ناشی از بار حرارتی است که از مجموع این دو بخش، میدان جابجایی و کرنش به دست خواهد آمد. مور و همکاران [۱۰] یک مدل برای پیش‌بینی ترک و شکست مویی در لایه‌های لمینت‌های متقارن تحت بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه دادند. نتایج برای شرایط مختلف بارگذاری و جنس‌ها و لایه‌های مختلف لمینت محاسبه و با نتایج مطالعات قبلی مقایسه و تائید شد. در نهایت موارد ویژه و نتایج خاص در هر حالت مورد بحث و بررسی قرار گرفت. ناراسیمهاچاری و همکاران [۱۱] رفتار رشد ترک تحت شرایط خزش-خستگی و ترمو مکانیک-خستگی را در مدل با ناپیوستگی لبه‌ای مورد بررسی، محاسبه و مقایسه قرار دادند.

در این پژوهش سعی بر آن است با استفاده از روش هم‌هندسی توسعه یافته به بررسی توزیع تنش و محاسبه مقدار ضریب شدت تنش در اجسام دو بعدی و در مودهای شکست پیش‌بینی شده پرداخته شود. به این منظور از یک ورق دارای ترک میانی که تحت تاثیر بارگذاری حرارتی و مکانیکی قرار دارد جهت بررسی روش مورد نظر استفاده می‌شود و نتایج حاصل شده با نتایج به دست آمده از روش اجزاء محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌گیرد.

<sup>1</sup> Extended Isogeometric Analysis Method

<sup>2</sup> Level Set

<sup>3</sup> Bézier extraction operator

<sup>4</sup> Bernstein polynomial

<sup>5</sup> Bézier decomposition



## روش هم‌هندسی

بی‌اسپیلاین‌ها از توابع چندجمله‌ای قطعه قطعه ساخته شده‌اند. بردار گره‌ای  $\xi$  با مجموعه‌ای از مختصات نقاط یا گره‌ها تعریف می‌شود.  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  مختصات واقعی هستند که هندسه را در فضای پارامتری نشان می‌دهد، جایی که  $\xi_i$  برابر  $\xi_{i+1}$  گره می‌باشد،  $p$  مرتبه چندجمله‌ای است و  $n$  تعداد توابع پایه‌ای است که برای ساخت منحنی بی‌اسپیلاین استفاده می‌شود. توابع پایه بی‌اسپیلاین به صورت مجزا با شروع از  $p=0$  به صورت روابط (۱) و (۲) تعریف می‌شوند [۱۲]:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

مشتقات توابع پایه بی‌اسپیلاین برای یک مرتبه خاص از چندجمله‌ای و بردار گره‌ی را می‌توان با رابطه (۳) محاسبه کرد:

$$\frac{dN_{i,p}(\xi)}{d\xi} = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

یک منحنی بی‌اسپیلاین غیریکنواخت نسبتی (نرئز) با  $n+1$  نقاط کنترلی به وسیله رابطه (۴) به دست می‌آید:

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^n B_i R_{i,p}(\xi) \quad (4)$$

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{w_i N_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} = \frac{w_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(\xi)} \quad (5)$$

در جایی که  $R_{i,p}(\xi)$  توابع پایه نرئز هستند و  $W$  وزن مربوط به نقاط کنترلی و تابع پایه بی‌اسپیلاین از مرتبه  $p$  ساخته شده از بردار گره  $\xi$  می‌باشند. مشتق تابع پایه نرئز می‌تواند از رابطه (۶) محاسبه گردد:

$$\frac{dR_{i,p}(\xi)}{d\xi} = w_i \frac{W(\xi) N_{i,p}(\xi) - W(\xi) N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (6)$$

## روش هم‌هندسی بر اساس عملگر بیزیبر

در تحلیل هم‌هندسی، عملگر بیزیبر با تجزیه توابع پایه به ترکیب خطی از چندجمله‌ای برنشتاین، آن‌ها را شبیه به چند جمله‌ای لاگرانژ نموده و اجازه می‌دهد که روی المان‌های پیوسته بیزیبر تولید شوند. توابع پایه برنشتاین از درجه  $p$  در بازه گره‌ی  $[0,1]$  با استفاده از رابطه بازگشتی (۷) محاسبه می‌شوند:

$$B_{i,p}(\xi) = (1 - \xi) B_{i,p-1}(\xi) + \xi B_{i-1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

که در آن

$$B_{0,p}(0) = B_{p,p}(1) = 1 \quad (8)$$

$$B_{i,p}(\xi) = 0 \quad \text{if } i < 0, \quad i > p$$

مشتق توابع برنشتاین (توابع پایه بیزیبر) طبق رابطه (۹) به دست می‌آیند.

$$\frac{dB_{i,p}(\xi)}{d\xi} = p[B_{i-1,p-1}(\xi) - B_{i,p-1}(\xi)] \quad (9)$$



$$B_{-1,p-1}(\xi) = B_{p,p-1}(\xi) = 0$$

به دست آوردن عملگر بیزیبر به این صورت است که اگر یک گره جدید ( $k > p$ )،  $\bar{\xi} = [\xi_k, \xi_{k+1}]$  به بردار گره‌ای (با تعداد  $n$  گره) اضافه شود تعداد توابع پایه و نقاط کنترلی به همین نسبت افزایش می‌یابد. توابع پایه جدید از روابط موجود و نقاط کنترلی جدید مطابق با رابطه (۱۰) با استفاده از نقاط کنترلی قبلی محاسبه می‌شوند:

$$\bar{P}_i = \begin{cases} P_1 & i = 1 \\ \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} & 1 < i < m, \quad m = n + 1 \\ P_n & i = m \end{cases} \quad (10)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq K - P \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_k}{\xi_{i+p} - \xi_i} & K - P + 1 \leq i \leq K \\ 0 & i \geq K + 1 \end{cases}$$

به این ترتیب برای هر گره جدید عملگر بیزیبر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{(n+j-1)}(1 - \alpha_{(n+j)}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

پس از محاسبه عملگر بیزیبر برای تمام نقاط جدید عملگر بیزیبر کل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C^T = (C_m)^T (C_{m-1})^T \dots (C_1)^T \quad (12)$$

و در نهایت:

$$\bar{P} = C^T P \quad (13)$$

پس رابطه منحنی را بر اساس توابع پایه بی اسپیلاین و توابع پایه برنشتاین بر اساس عملگر بیزیبر می‌توان به صورت رابطه (۱۳) نوشت:

$$C(\xi) = (\bar{P})^T B(\xi) = (C^T P)^T B(\xi) = P^T C B(\xi) = P^T N(\xi) \quad (14)$$

که در آن:

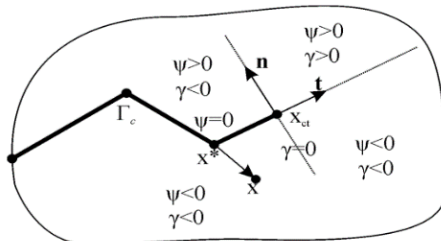
$$N(\xi) = C B(\xi) \quad (15)$$

### روش هم‌هندسی توسعه یافته

با توجه به پیشرفت روش هم‌هندسی، اخیراً محققین با معرفی روش هم‌هندسی توسعه یافته در مسائل مکانیک شکست و ترک، به نتایج مطلوبی در تحلیل رشد ترک رسیده‌اند. در این روش ایجاد هندسه دقیق با استفاده از بردارهای گرهی و نقاط کنترلی بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها صورت می‌گیرد، سپس با کمک گرفتن از برخی توابع کمکی، ناپیوستگی‌ها مدل می‌شود. در این روش ناپیوستگی‌ها به صورت مجموعه‌ای از توابع پیوسته و ناپیوسته به نام توابع غنی‌ساز مدل می‌شوند. برای مدل‌سازی ترک دو بخش



غنی‌سازی نقاط کنترلی نوک ترک و غنی‌سازی نقاط کنترلی بدنه ترک قطع وجود دارد. یک روش مرسوم برای شناسایی نقاط کنترلی مربوط به نوک ترک و بدنه ترک استفاده از تابع ریاضی مجموعه تراز می‌باشد، که در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱: نحوه شناسایی نقاط کنترلی اطراف ترک با روش مجموعه تراز

بر اساس شکل نشان داده شده برای نقطه‌ای در نوک ترک در دو راستای مماسی (t) و عمودی (n) می‌توان توابعی تعریف نمود. لذا برای شناسایی نقاط کنترلی که در طول ترک قرار دارند می‌توان تابعی ریاضی به صورت رابطه (۱۶) تعریف کرد:

$$\psi(X) = \text{sign}[n \cdot (X - X^*)] \min_{X \in \Gamma_c} |X - X^*| \quad (16)$$

همچنین برای شناسایی نقاط کنترلی که در نوک ترک قرار دارند می‌توان تابعی ریاضی به صورت رابطه (۱۷) تعریف نمود:

$$\gamma(X) = (X - X_{CT}) \cdot t \quad (17)$$

بنابراین تابع مجموعه تراز به صورت رابطه (۱۸) تعریف شود:

$$\Gamma_c = \{X : \psi(X, t) = 0 \wedge \gamma(X, t) \leq 0\} \quad (18)$$

پس از شناسایی نقاط کنترلی مربوطه، نقاط کنترلی مربوط به المان‌هایی که توسط ترک بریده شده‌اند و همچنین نقاط کنترلی مربوط به المان‌هایی که در نوک ترک هستند، با توابع غنی‌ساز، مطابق شکل (۲) غنی‌سازی می‌گردند. در این صورت تقریب جابجایی به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌گردد:

$$u^h = u^{IGA} + u^{XIGA} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) u_i + u^{\text{enrichment}} \quad (19)$$

که در آن  $u^h$  تقریب جابجایی کل و  $u^{IGA}$  تقریب جابجایی در روش هم‌هندسی برای کل نقاط کنترلی و  $u^{XIGA}$  تقریب جابجایی در روش هم‌هندسی توسعه یافته برای نقاط کنترلی غنی‌سازی شده، می‌باشد.

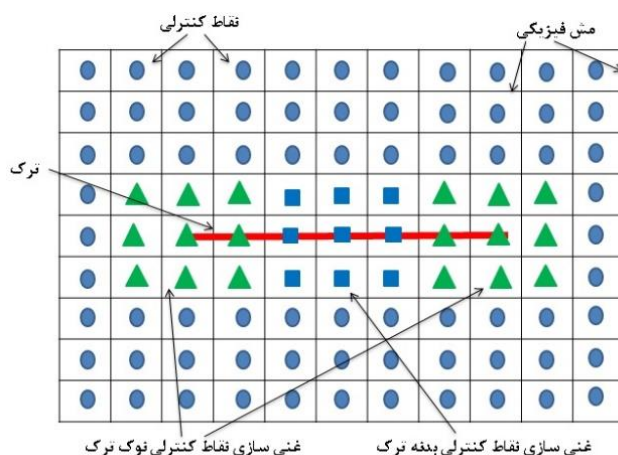
### ضریب شدت تنش

ضریب شدت تنش پارامتری است که به کمک آن می‌توان تاثیر میدان تنش‌های اطراف نوک ترک را مشخص نمود. ضریب شدت تنش برای یک ترک مشخص از رابطه (۲۰) به دست می‌آید:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (20)$$

که  $\sigma$  تنش کششی وارد بر عضو و  $a$  طول ترک است. فرم عمومی ضریب شدت تنش که تابع هندسه قطعه و ترک است به صورت رابطه (۲۱) بیان می‌شود [۱۳].

$$K_I = F(g) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (21)$$



شکل ۲: شناسایی نقاط کنترلی در طول ترک و نوک ترک با استفاده از تابع مجموعه تراز

### محاسبه ضریب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال اندرکنش

یکی از روش‌های محاسبه ضریب شدت تنش بخصوص در مسائل با مود ترکیبی روش انتگرال اندرکنش می‌باشد. انتگرال  $M$  از انتگرال مستقل از مسیر  $J$  برای یک جسم حاوی ترک به دست می‌آید. انتگرال  $J$  به صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W n_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X} \right) ds \quad (22)$$

مسیر انتگرال گیری  $\Gamma$  در شکل (۳) نشان داده شده است. چگالی انرژی کرنشی برابر مقدار زیر تعریف می‌شود:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (23)$$

در این رابطه  $n_i$  بردار نرمال بیرونی بر مسیر انتگرال گیری،  $T_i$  بردار نیروهای گسترده،  $u_i$  بردار جابجایی و  $ds$  جزء دیفرانسیلی در امتداد مسیر انتگرال گیری هستند [۱۴]. در روش انتگرال اندرکنش از یک میدان کمکی استفاده می‌شود. بدین ترتیب که مسئله در دو حالت در نظر گرفته می‌شود. حالت اول مربوط به فضای اصلی مسئله و حالت دوم مربوط به میدان کمکی بوده که با استفاده از میدان‌های تغییر مکان، تنش و کرنش مود  $I$  یا مود  $II$  تعیین می‌شود. پس انتگرال اندرکنش از رابطه زیر محاسبه خواهد شد [۱۵]:

$$M = \int_{\Gamma} \left[ W \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{pres} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial X_1} - \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i^{pres}}{\partial X_1} \right] n_j d\Gamma \quad (24)$$

که در آن:

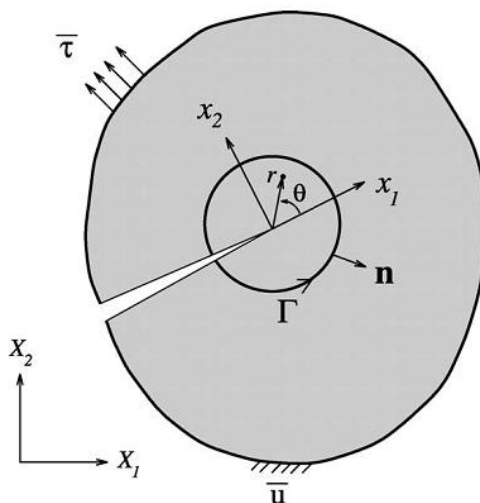
$$W = \sigma_{ij}^{pres} \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^{pres} \quad (25)$$

انتگرال اندرکنش به صورت زیر با ضرایب شدت تنش رابطه دارد [۱۵]:

$$M = \frac{2}{E^*} (K_I^{pres} K_I^{aux} + K_{II}^{pres} K_{II}^{aux}) \quad (26)$$

کافی است برای تعیین ضریب شدت تنش مود  $I$ ، ضریب شدت تنش در فضای کمکی مود  $I$  خالص در نظر گرفته شود. در این صورت  $K_I^{aux} = 1$  و  $K_{II}^{aux} = 0$  خواهد بود. بنابراین ضریب شدت تنش در مود  $I$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_I^{pres} = \frac{E^*}{2} M^{mode I} \quad (27)$$

شکل ۳: جسم حاوی ترک، مختصات قطبی نوک ترک و مسیر انتگرال‌گیری در محاسبه انتگرال  $J$ 

### بارگذاری حرارتی - مکانیکی

در مسائل دارای بارگذاری حرارتی - مکانیکی کرنش از دو قسمت تشکیل می‌شود [۱۶].

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad (28)$$

در رابطه فوق  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ ،  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$  و  $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$  به ترتیب کرنش کل، کرنش مکانیکی و کرنش حرارتی هستند. کرنش حرارتی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{th} \\ \varepsilon_{22}^{th} \\ 2\varepsilon_{12}^{th} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (29)$$

در این رابطه  $\alpha_{ij}$  و  $\Delta T$  به ترتیب ضریب انبساط حرارتی و توزیع دما هستند. کرنش مکانیکی نیز بر اساس قانون هوک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^m \\ \varepsilon_{22}^m \\ 2\varepsilon_{12}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

با محاسبه کرنش‌های حرارتی و مکانیکی بر اساس شرایط و روابط روش و مدل مورد نظر و جمع آن‌ها کرنش کل به دست می‌آید. سپس با استفاده از مقادیر محاسبه شده به ترتیب تنش و ضریب شدت تنش و عمر خستگی محاسبه خواهد شد.

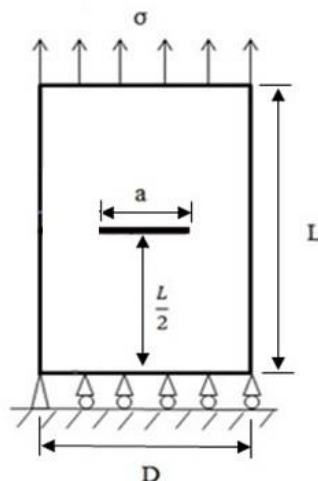
### نتایج تحلیل هم‌هندسی

جهت مدل‌سازی و تحلیل هندسه دو بعدی، یک ورق مستطیل شکل با ترک میانی مطابق شکل (۴) در نظر گرفته شده و ابعاد و شرایط آن در جدول (۱) ارائه شده است.



جدول ۱: ابعاد و مشخصات ورق با ترک میانی

| مشخصات                | مقادیر                |
|-----------------------|-----------------------|
| طول ورق               | ۴۰۰ mm                |
| عرض ورق               | ۲۰۰ mm                |
| طول ترک               | ۹۵ mm                 |
| تنش وارد شده          | ۱۰۰۰ KPa              |
| مدول یانگ             | ۲۰۷ GPa               |
| ضریب پواسون           | ۰/۳                   |
| لبه بالا (شار حرارتی) | ۱۰۰۰ W/m <sup>2</sup> |
| لبه پایین (دما ثابت)  | ۶۰°C                  |
| لبه راست              | عایق                  |
| لبه چپ                | عایق                  |
| ضریب هدایت حرارتی     | ۵۰ W/m <sup>۲</sup> K |



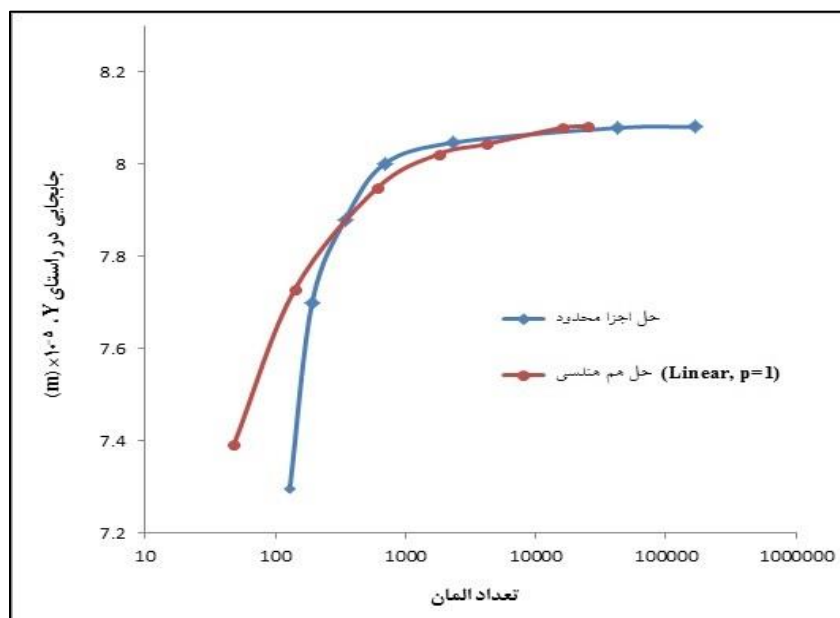
شکل ۴: ورق با ترک میانی

ابتدا با استفاده از توابع پایه برنشتاین و نقاط کنترلی مناسب، هندسه ورق تشکیل شده و سپس ترک میانی به طول ۹/۵ سانتی‌متر در موقعیت مورد نظر ایجاد می‌شود. در کد نوشته شده در نرم افزار متلب می‌توان با استفاده از بردارهای گرهی و نقاط کنترلی مختلف، المان‌بندی‌های مختلفی ایجاد نمود. برای تحلیل ورق ترک‌دار، پس از غنی‌سازی نقاط کنترلی در طول و نوک ترک و استخراج ماتریس سختی کل، اعمال شرایط مرزی و اعمال نیرو، مقدار جابجایی و در نتیجه مقادیر کرنش و تنش در هر المان و نقطه کنترلی مربوط به آن به دست خواهد آمد. جهت اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از کدنویسی در نرم افزار متلب، حل اجزاء محدود مسئله در نرم‌افزار انسیس نیز انجام شده است. نتایج به دست آمده، بررسی همگرایی و مقایسه دو روش هم‌هندسی توسعه‌یافته و اجزاء محدود همچنین نتایج حاصل از دو روش هم‌هندسی مرسوم و هم‌هندسی بر اساس عملگر بی‌زیتر در جدول (۲) نشان داده شده است. بر اساس نتایج به دست آمده، بررسی همگرایی و مقایسه دو روش هم‌هندسی توسعه‌یافته و اجزاء محدود در شکل‌های (۵) و (۶) نشان داده شده است.

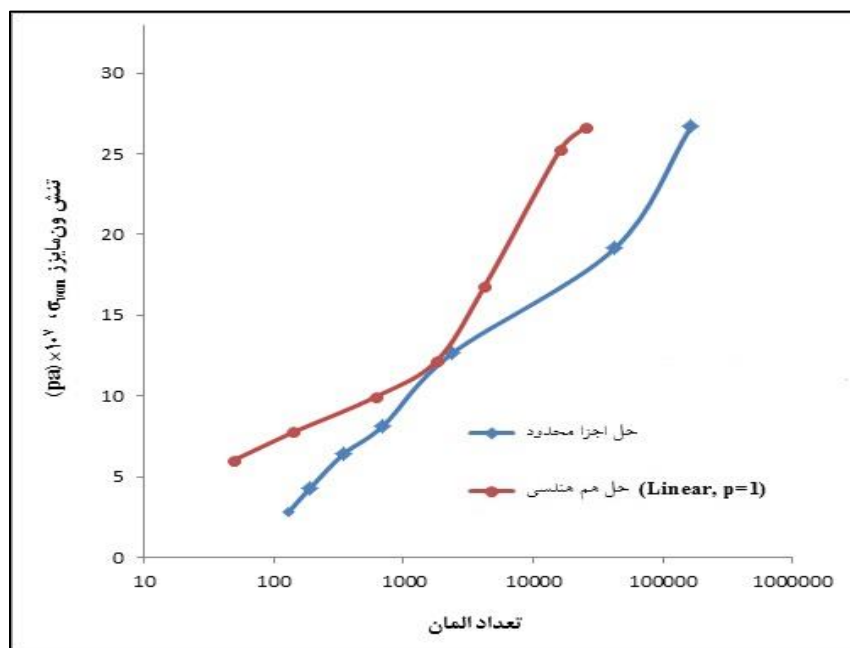
جدول ۲: بیشینه جابجایی در راستای Y،  $\times 10^{-5}$  (m) و بیشینه تنش فن‌مایز  $\sigma_{von}$ ،  $\times 10^7$  (pa)

| تعداد المان | FEM          |                       | Bezier XIGA  |                       | XIGA         |                       | تعداد المان |
|-------------|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|-------------|
|             | $U_y^{\max}$ | $\sigma_{von}^{\max}$ | $U_y^{\max}$ | $\sigma_{von}^{\max}$ | $U_y^{\max}$ | $\sigma_{von}^{\max}$ |             |
| ۱۲۹         | ۷/۲۶۸        | ۳/۷۱۶                 | ۷/۰۰۳        | ۶/۷۲۵                 | ۷/۲۷۴        | ۶/۹۱۸                 | ۴۸          |
| ۱۹۱         | ۷/۶۴۷        | ۵/۲۹۱                 | ۷/۳۵۸        | ۱۱/۴۹۲                | ۷/۶۵۲        | ۷/۸۵۷                 | ۱۴۰         |
| ۳۴۴         | ۷/۸۶۳        | ۷/۳۸۹                 | ۷/۷۴۱        | ۹/۸۷۳                 | ۷/۸۴۷        | ۹/۱۲۶                 | ۶۰۰         |
| ۶۳۹         | ۷/۹۰۶        | ۹/۰۹۸                 | ۷/۹۰۴        | ۱۲/۱۱۲                | ۸/۰۰۶        | ۱۲/۴۱۲                | ۱۸۰۰        |
| ۲۳۵۶        | ۷/۹۹۴        | ۱۴/۴۲۸                | ۸/۰۱۳        | ۱۶/۵۲۷                | ۸/۰۴۱        | ۱۶/۰۱۲                | ۴۲۰۰        |
| ۴۲۴۷۴       | ۸/۰۶۲        | ۲۱/۹۸۱                | ۸/۰۶۸        | ۲۵/۱۰۴                | ۸/۰۷۲        | ۲۵/۳۸۹                | ۱۶۲۰۰       |
| ۱۶۶۲۱۶      | ۸/۰۷۱        | ۲۶/۶۹۸                | ۸/۰۷۹        | ۲۶/۵۹۳                | ۸/۰۸۶        | ۲۶/۶۱۷                | ۲۵۲۰۰       |





شکل ۵: بررسی همگرایی و مقایسه بیشینه جابجایی در راستای Y



شکل ۶: مقایسه بیشینه تنش ون‌مایز σ\_von

پس از به‌دست آوردن نتایج، مقدار ضریب شدت تنش در نوک ترک با استفاده از انتگرال اندرکنش محاسبه می‌شود. حل تحلیلی برای محاسبه ضریب شدت تنش مد اول برای یک ورق با ترک میانی با استفاده از رابطه (۳۱) به دست خواهد آمد [۱]:

$$K_I = \left[ \left( 1 - 0.5 \left( \frac{a}{b} \right) + 0.326 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right) / \left( 1 - \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \sigma \sqrt{\pi a} \quad (31)$$

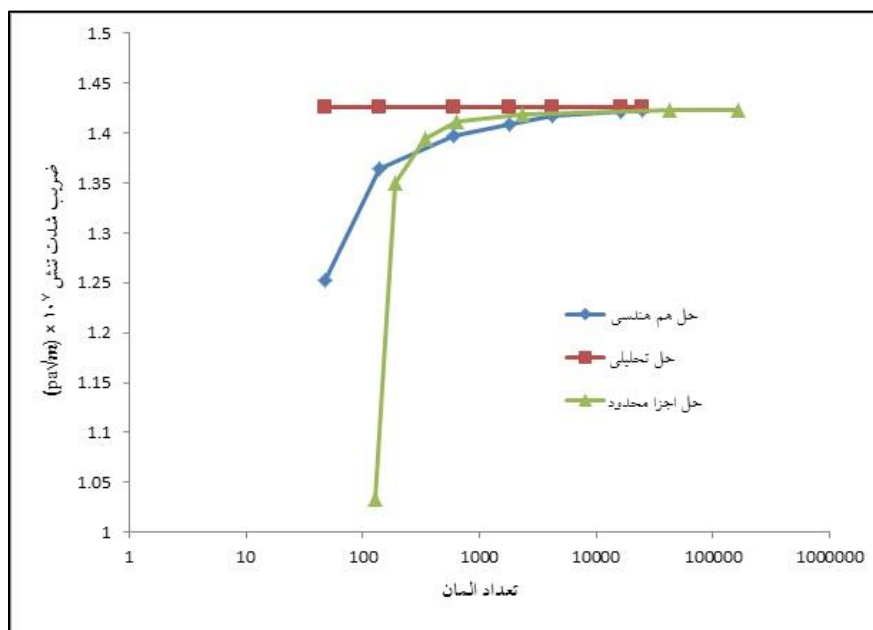


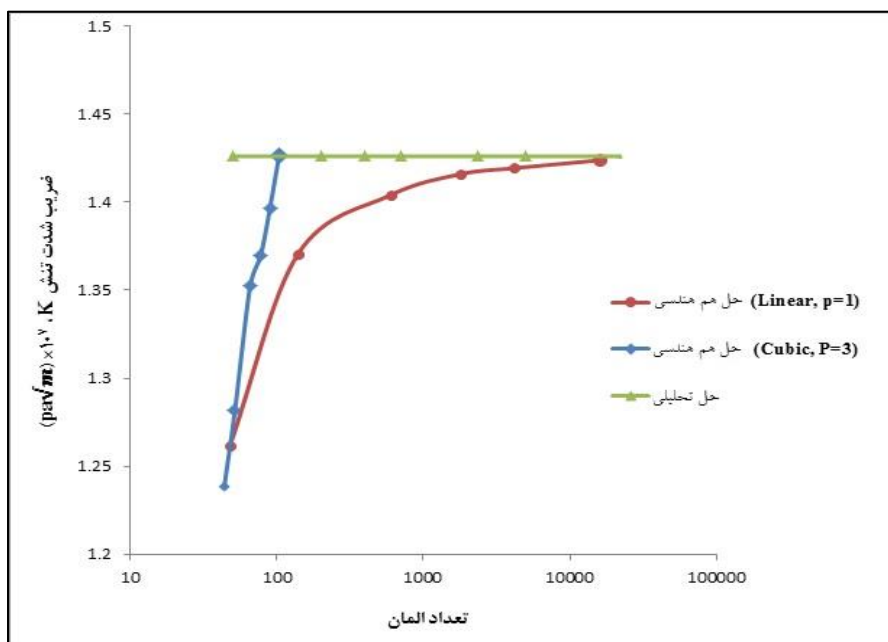
که در آن  $a$  طول ترک،  $D$  عرض ورق و  $\sigma$  تنش وارد بر ورق می‌باشد. نتایج به دست آمده برای ضریب شدت تنش از حل با روش هم‌هندسی توسعه‌یافته بر اساس عملگر بی‌زیبر و اجزاء محدود در جدول (۳) ارائه شده است. برای شرایط در نظر گرفته شده حل دقیق برابر است با  $1/431$  است و درصد خطا در هر دو روش بر اساس این مقدار محاسبه شده است.

جدول ۳: ضریب شدت تنش  $K_I$   $\times 10^7$  ( $pa\sqrt{m}$ )

| FEM      |       |             | Bezier XIGA ( $p=q=1$ ) |       |             | Bezier XIGA ( $p=q=3$ ) |       |             |
|----------|-------|-------------|-------------------------|-------|-------------|-------------------------|-------|-------------|
| درصد خطا | K     | تعداد المان | درصد خطا                | K     | تعداد المان | درصد خطا                | K     | تعداد المان |
| ٪ ۲۸/۴۲  | ۱/۰۲۹ | ۱۲۹         | ٪ ۱۲/۴۳                 | ۱/۲۳۱ | ۴۸          | ٪ ۱۵/۷۷                 | ۱/۲۰۱ | ۴۴          |
| ٪ ۹/۸۲   | ۱/۳۰۷ | ۱۹۱         | ٪ ۷/۲۹                  | ۱/۳۵۹ | ۱۴۰         | ٪ ۱۲/۰۹                 | ۱/۲۷۴ | ۵۲          |
| ٪ ۶/۷۱   | ۱/۳۴۱ | ۳۴۴         | ٪ ۵/۰۲                  | ۱/۳۷۴ | ۶۰۰         | ٪ ۸/۷۹                  | ۱/۳۱۷ | ۶۶          |
| ٪ ۳/۸۱   | ۱/۳۵۴ | ۶۳۹         | ٪ ۲/۱۷                  | ۱/۳۸۷ | ۱۸۰۰        | ٪ ۳/۹۴                  | ۱/۳۵۲ | ۷۸          |
| ٪ ۲/۳۲   | ۱/۳۷۱ | ۲۳۵۶        | ٪ ۱/۶۱                  | ۱/۴۰۲ | ۴۲۰۰        | ٪ ۱/۸۸                  | ۱/۳۸۹ | ۹۰          |
| ٪ ۰/۴۶   | ۱/۴۰۹ | ۴۲۴۷۴       | ٪ ۰/۳۱                  | ۱/۴۱۷ | ۱۶۲۰۰       | ٪ ۰/۳۶                  | ۱/۴۱۹ | ۱۰۴         |
| ٪ ۰/۵۲   | ۱/۴۲۱ | ۱۶۶۲۱۶      | ٪ ۰/۲۸                  | ۱/۴۲۲ | ۲۵۲۰۰       | ٪ ۰/۱۱                  | ۱/۴۲۴ | ۱۱۸         |

بررسی همگرایی و مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش به دست آمده از دو روش هم‌هندسی توسعه‌یافته و اجزاء محدود و همچنین حل تحلیلی در شکل (۷) نشان داده شده است. حل هم‌هندسی توسعه‌یافته برای  $p=q=1$  و تعداد ۱۶۲۰۰ المان و اجزاء محدود با ۱۶۶۲۱۶ المان انجام شده است. مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش حاصل از حل با روش هم‌هندسی توسعه‌یافته برای  $p=q=1$  و  $p=q=3$  و حل تحلیلی در شکل (۸) ارائه شده است.

شکل ۷: بررسی همگرایی و مقایسه ضریب شدت تنش  $K_I$

شکل ۸: مقایسه ضریب شدت تنش  $K_I$ ، برای  $p=1$  و  $p=3$ 

### نتیجه‌گیری

در این مطالعه یک ورق مستطیلی شکل با ترک میانی به روش هم‌هندسی بر اساس عملگر بی‌زیبر و با استفاده از بردارهای گرهی و نقاط کنترلی مختلف، المان‌بندی گردید. جهت مدل‌سازی ترک از روش هم‌هندسی توسعه‌یافته استفاده شد. در این روش به کمک تعریف تابع مجموعه تراز مناسب با استفاده از کدنویسی در نرم‌افزار متلب، نقاط کنترلی که در طول ترک و نوک ترک وجود دارند شناسایی و استخراج گردید. در ادامه، نقاط کنترلی استخراجی، غنی‌سازی شده و با اعمال شرایط مرزی، فرآیند تحلیل انجام گرفته و جابجایی‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها محاسبه گردیدند. مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر اساس روش انتگرال اندرکنش به دست آمد. جهت اعتبارسنجی نتایج حاصله از روش‌های هم‌هندسی، حل اجزاء محدود مسئله در نرم‌افزار انسیس نیز انجام شد و نتایج حاصل از هر دو روش هم‌هندسی توسعه‌یافته و اجزاء محدود با حل تحلیلی مسئله مقایسه گردید. نتایج نشان داد که روش هم‌هندسی توسعه‌یافته از دقت قابل توجهی برخوردار بوده و در تعداد المان‌های کمتری همگرا می‌گردد و این امر سبب کاهش حجم محاسبات و به تبع آن کاهش زمان حل مسئله خواهد شد.

### مراجع

- [1] Dowling, N. E., (2012), Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue: Pearson.
- [2] Newman Jr, J. C., Raju, I. S., (1981), Stress-intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies. In ASTM Natl. Symp. on Fracture Mech., (No. NASA-TM-83200).
- [3] Shahani, A. R., Habibi, S. E. (2007), Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a circumferential semi-elliptical crack subjected to combined loading, International journal of Fatigue, 29(1), pp.128-140.
- [4] Hughes, T. J., Cottrell, J. A., Bazilevs, Y., (2005), Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer methods in applied mechanics and engineering, 194(39), 4135-95.



- [5] Gong, Y. P., Dong, C. Y., Qin, X., (2017), An isogeometric boundary element method for 3D potential problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 313, pp.454-468.
- [6] Hao, P., Yuan, X., Liu, H., Wang, B., Liu, C., Yang, D., Zhan, S., (2017), Isogeometric buckling analysis of composite variable-stiffness panels, *Composite Structures*, 165, pp.192-208.
- [7] Huang, J., Nguyen-Thanh, N., Zhou, K., (2017), Extended isogeometric analysis based on Bézier extraction for the buckling analysis of Mindlin-Reissner plates, *Acta Mechanica*, 228, pp.3077-3093.
- [8] de Borst, R., Chen, L., (2018), The role of Bézier extraction in adaptive isogeometric analysis: Local refinement and hierarchical refinement, *International journal for numerical methods in engineering*, 113(6), pp. 999-1019.
- [9] Do, H. V., Nguyen-Xuan, H., (2017), Limit and shakedown isogeometric analysis of structures based on Bézier extraction, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 63, pp.149-164.
- [10] Moure, M. M., García-Castillo, S. K., Sánchez-Sáez, S., Barbero, E., Barbero, E. J. (2018), Matrix cracking evolution in open-hole laminates subjected to thermo-mechanical loads, *Composite Structures*, 183, pp. 510-520.
- [11] Narasimhachary, S. B., Bhachu, K. S., Shinde, S. R., Gravett, P. W., Newman Jr, J. C. (2018), A single edge notch specimen for fatigue, creep-fatigue and thermo-mechanical fatigue crack growth testing, *Engineering Fracture Mechanics*, 199, pp. 760-772.
- [12] Shoheib, M. M., Shahrooi, S., Shishehsaz, M., Hamzehei, M., (2022), Fatigue crack propagation of welded steel pipeline under cyclic internal pressure by Bézier extraction based XIGA, *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 13(2), 04022001.
- [13] McClaflyn, D., Fatemi, A., (2004), Torsional deformation and fatigue of hardened steel including mean stress and stress gradient effects, *International Journal of Fatigue*, 26(7), pp. 773-784.
- [14] Sutradhar, A., Paulino, G. H., (2004), Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(11), pp. 1335-1350.
- [15] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., (1999), A finite element method for crack growth without remeshing, *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1), pp.131-150.
- [16] Shoheib, M. M., Shahrooi, S., Shishehsaz, M., Hamzehei, M., (2022), Bézier base extended isogeometric numerical method for thermo elastic-plastic analysis of crack propagation in cracked plate under welding residual stress and thermal load, *Mathematical Modelling and Analysis*, 27(4), pp. 629-651.