



مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای مبتنی بر TOPSIS

حسین عزیزی

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

Email: azizhossein@gmail.com

علیرضا امیر تیموری

گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

سهراب کردرستمی

گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ دریافت: ۹۵/۸/۲۳ * تاریخ پذیرش: ۹۶/۹/۱

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای سنجش عملکرد گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کنند. این مقاله دو DMUی مجازی به نام DMUی ایده‌آل و DMUی آنتی‌ایده‌آل را وارد DEAی بازه‌ای می‌کند. مدل‌های DEAی بازه‌ای به دست آمده به ترتیب خوشبینانه ارزیابی می‌کند، در حالی که دیگری آنها را از دیدگاه کارایی بدبینانه ارزیابی می‌کند. این دو کارایی متمایز با هم ترکیب می‌شوند و یک شاخص جامع به نام نزدیکی نسبی به DMUی ایده‌آل را درست مانند رویکرد روش ترجیح ترتیب بر اساس شباهت به جواب ایده‌آل در تصمیم چندشاخصی تشکیل می‌دهند. سپس از شاخص نزدیکی نسبی به عنوان سنجش کلی هر DMU استفاده می‌شود و بر مبنای آن یک رتبه‌بندی کلی برای همه‌ی DMUها به دست می‌آید. یک مثال نیز در زمینه‌ی ارزیابی عملکرد بیست شعبه‌ی بانک ارائه خواهد شد که نشان می‌دهد که رویکرد DEAی بازه‌ای پیشنهادی یک روش ساده، مؤثر و عملی برای اندازه‌گیری عملکرد در موقعیت‌های زندگی واقعی است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های بازه‌ای، واحدهای تصمیم‌گیری ایده‌آل و آنتی‌ایده‌آل، TOPSIS،

نزدیکی نسبی، رتبه‌بندی.

۱- مقدمه

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها^۱ (DEA)، که به طور معمول برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری^۲ (DMUها) به کار می‌روند، فرض می‌کنند که داده‌های مربوط به تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها به طور دقیق معلوم هستند. اما در برخی از کاربردها، برخی از عوامل ممکن است مشتمل بر داده‌های نادقیق باشند. به عنوان مثال، در مورد یک عامل کیفی (مثلاً سهولت استفاده، سطح مهارت کارگران)، خیلی از اوقات ممکن است یک کارشناس بگوید که DMU_1 بهترین است، DMU_2 در مرتبه‌ی دوم است، و الی آخر. در عوض می‌توان عملکردها DMU ها را به چند گروه تقسیم کرد (مثلاً خوب، متوسط، ضعیف). Cook و همکاران طریقه‌ی بسط DEA برای کار با اینگونه داده‌های ترتیبی را نشان دادند (Cook, Kress, & Seiford, 1996). در برخی از موارد، ممکن است کارشناس بگوید که عملکرد DMU_1 از نظر یک عامل بیش از دو برابر و کمتر از سه برابر DMU_2 است. همچنین، می‌توان گفت که DMU_2 در مقایسه با DMU_1 در سطح بین ۷۰ و ۸۰٪ است. داده‌های نادقیق موجود بستگی به مسئله‌ی مورد نظر و جزئیات خاص آن، مانند دانش قبلی یا تجربیات موجود در مورد عامل ارزیابی، دارد. در حالت کلی، انواع مختلفی از داده‌های نادقیق شامل موارد فوق‌الذکر وجود دارد. در مقالات تحلیل تصمیم چندمعیاره^۳، می‌توانیم بحث گسترده‌تری در مورد استفاده از داده‌های نادقیق پیدا کنیم، که در آن انواع مختلف داده‌های نادقیق که در عمل بروز می‌کنند، بررسی شده‌اند (Sage & White, 1984; Kyung Sam Park & Kim, 1997). موقعیت‌های مشابهی به خاطر شباهت ساختاری بین تحلیل تصمیم چندمعیاره و DEA در زمینه‌ی DEA وجود دارند (Belton & Vickers, 1996; Stewart, 1999; Bouyssou, 1999).

برای کار با داده‌های نادقیق پیشگفته به همراه DEA، Cooper و همکاران DEAی نادقیق را به عنوان مجموعه‌ای از مفاهیم و روش‌ها پیشنهاد کردند (William W. Cooper, Park, & Yu, 1999). Kim و همکاران نخستین بار آن را برای ارزیابی کارایی دفاتر تلفن در کره استفاده کردند (Kim, Park, & Park, 1999). Cooper و همکاران کاربرد روش DEA نادقیق را در مثالی در مورد شرکت مخابرات سیار کره نشان دادند (W. W. Cooper, Park, & Yu, 2001b). روشی نیز برای تبدیل مدل DEA غیرخطی به یک مدل هم‌ارز خطی ابداع شده است، زیرا برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها، متغیرهای تصمیم ناشناخته هستند. همچنین، برای جزئیات مربوط به تبدیل‌ها، رک. Cooper و همکاران، و Park، که در این میان، مقاله‌ی Park تکنیک‌های تبدیل ارائه شده توسط Cooper و همکاران را ساده کرده است (W. W. Cooper, Park, 2001a; W. W. Cooper et al., 2001b; William W. Cooper et al., 1999; K. S. Park, 2004; Yu, 2001a). این نوع روش‌ها به صورت عمومی برای کار با داده‌های نادقیق برای نامعادلات خطی دلخواه ایجاد شده‌اند. در عین حال، Zhu نشان داد که همین نمرات کارایی را می‌توان به طور مؤثر با بکارگیری الگوریتم دیگری برای حل و فصل مسئله‌ی DEA نادقیق غیرخطی در رابطه با داده‌های نادقیق خاص (ولی معمولی)، مانند رتبه‌ای و داده‌های کراندار، به دست آورد (Zhu, 2004). با آنکه الگوریتم‌ها متفاوت هستند، ولی به نمرات کارایی یکسانی منتهی می‌شوند، و لذا واحدها را به صورت یکسانی به گروه‌های کارآ و غیر کارآ تقسیم می‌کنند.

Smirlis و Despotis داده‌های بازه‌ای یا کراندار در DEA را بررسی کردند، و یک طبقه‌بندی سه‌دسته‌ای کارایی را نشان دادند (Despotis & Smirlis, 2002). کارهای Liu و Kao با وضعیت نسبتاً متفاوتی سر و کار داشت که در آن داده‌های فازی در DEA وجود داشتند که به این حالت DEA فازی می‌گویند (Kao & Liu, 2000a). علیرغم انواع متفاوت داده‌ها، رویکرد فازی از داده‌های فازی داده شده، داده‌های کراندار ایجاد می‌کند. Wang و همکاران زوج جدیدی از مدل‌های DEA بازه‌ای را برای کار با داده‌های نادقیق، از قبیل داده‌های بازه‌ای، اطلاعات ترجیح ترتیبی، داده‌های فازی و مخلوط آنها تشکیل دادند (Wang, Greatbanks, & Yang, 2005). مدل‌های DEA بازه‌ای آنها، در مقایسه با مدل DEA نادقیق ابداع شده توسط Cooper و همکاران، آسان‌فهم‌تر و سهل‌الاستفاده‌ترند (W. W. Cooper et al., 2005).

¹ Data envelopment analysis (DEA).

² Decision-making units (DMUs).

³ Multi-criteria decision analysis (MCDA).

Despotis, Smirlis و DEA بازه‌ای (William W. Cooper et al., 1999, 2001a, 2001b). همچنین، در مقایسه با مدل‌های DEA بازه‌ای Despotis و Smirlis، مدل‌های DEA بازه‌ای آنها از مرز تولید ثابت و یکنواختی به عنوان محک برای اندازه‌گیری کارایی همگی DMUها استفاده می‌کنند، که مدل‌های آنها را عقلانی و مطمئن‌تر می‌کند. به علاوه، روش کار آنها با اطلاعات ترجیح ترتیبی نسبت به روش Zhu معقول‌تر به نظر می‌رسد (Zhu, 2003). اخیراً Azizi و Ganjeh Ajirlu رویکرد DEA بدترین عملکرد را برای اندازه‌گیری کارایی هر DMU با داده‌های نادقیق معرفی کرده‌اند (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011). رویکرد DEA پیشنهادی آنها، کارایی هر DMU را نسبت به مرز بدترین عملکرد (مرز ناکارایی) اندازه‌گیری می‌کند و کارایی بدینانه نامیده می‌شود. مدل‌های DEA بازه‌ای آنها داده‌های قطعی، ترتیبی، بازه‌ای، عوامل غیرقابل کنترل و مخلوط آنها را به طور همزمان برای اندازه‌گیری کارایی‌های نسبی DMUها در نظر می‌گیرند. همچنین، مدل‌های DEA بازه‌ای آنها، می‌تواند بدترین DMUها را به آسانی و به درستی شناسایی کند.

DEA سنتی، که توسط Charnes و همکاران ابداع شده است (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978)، DMUها را از زاویه‌ی کارایی خوشبینانه ارزیابی می‌کند. اگر یک DMU کارایی خوشبینانه‌ی واحد داشته باشد، آنگاه گفته می‌شود که کارایی DEA است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرکارایی DEA است. همواره تصور بر این است که DMUهای کارایی DEA عملکردی بهتر از DMUهای غیرکارایی DEA دارند. معذالک، اگر یک DMU کارایی DEA در ارزیابی از دیدگاه بدینانه، کارایی نسبی بدتری نسبت به یک DMU غیرکارایی DEA داشته باشد، آیا باز هم می‌توانیم بگوییم که DMU کارایی DEA عملکردی بهتر از DMU غیرکارایی DEA دارد؟ در این موقعیت، نتیجه‌گیری مسلماً نامشخص است. بنابراین، مشخصاً این ضرورت وجود دارد که کارایی‌های خوشبینانه و بدینانه را ترکیب کنیم تا یک سنجش کلی از هر DMU به دست آید.

Entani و همکاران کارایی‌های DEA را هم از دیدگاه خوشبینانه و هم از دیدگاه بدینانه در نظر گرفتند (Entani, Maeda, & Tanaka, 2002). در مدل‌های DEA آنها، با استفاده از کارایی‌های خوشبینانه و بدینانه، یک بازه تشکیل می‌شود. ولی مدل آنها برای محاسبه‌ی کارایی بدینانه دارای یک عیب اساسی است و آن این است که برخی اطلاعات ورودی و خروجی را در نظر نمی‌گیرد، زیرا عملاً فقط داده‌های یک ورودی و یک خروجی از DMU مورد ارزیابی استفاده می‌شوند و بقیه‌ی داده‌های ورودی و خروجی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند.

Wang و Yang دو مدل کراندار DEA، برای داده‌های دقیق ارائه کردند (Wang & Yang, 2007). زوج مدل کراندار DEA، بیشترین استفاده را از همه‌ی اطلاعات ورودی و خروجی به عمل می‌آورند و کارایی‌های خوشبینانه و بدینانه‌ی هر DMU را با وارد کردن یک DMU آنتی‌ایده‌آل (ADMU) اندازه‌گیری می‌کنند، که بیشترین مقدار ورودی را مصرف می‌کند ولی فقط کمترین مقدار خروجی را تولید می‌نماید. بنابراین، می‌توانند هر دو مرز کارایی و ناکارایی را شناسایی کنند. Wang و Luo مسایل ارزیابی کارایی DEA را به صورت متفاوتی بررسی کردند (Wang & Luo, 2006). آنها یک DMU ایده‌آل مجازی (IDMU) را نیز وارد مدل DEA کردند. دو DMU مجازی (ADMU و IDMU)، برای ساخت دو مدل DEA به ترتیب برای محاسبه‌ی کارایی‌های خوشبینانه و بدینانه استفاده شدند. سپس این دو کارایی متمایز با استفاده از رویکرد مشهور روش ترجیح ترتیب بر اساس شباهت به جواب ایده‌آل^۴ (TOPSIS) در تصمیم‌گیری چندشاخصی^۵ تلفیق شدند تا یک شاخص مرکب به نام نزدیکی نسبی^۶ (RC) به IDMU به دست آید. شاخص RC به عنوان اندازه‌ای از سنجش کلی هر DMU استفاده شد، و بر اساس آن یک رتبه‌بندی کلی را برای DMUها ایجاد کردند. بنابراین، ارزش دارد که رویکرد آنها را برای داده‌های نادقیق بسط بدهیم. ما مدل‌های خود را برای یک مجموعه‌ی داده‌های واقعی به کار می‌بریم که در مقاله‌ی Jahanshahloo و همکاران ارائه شده است و به نتایج ارزیابی مفیدتری منتهی می‌شود (Jahanshahloo, Hosseinzadeh Lotfi, Rostamy Malkhalifeh, & Ahadzadeh Namin, 2009).

⁴ Technique for order preference by similarity to ideal solution (TOPSIS).

⁵ Multiple attribute decision making (MADM).

⁶ Relative closeness (RC).

۲- مواد و روش‌ها

فرض کنید n DMU باید ارزیابی شوند. هر m DMU ورودی را برای تولید s خروجی مصرف می‌کند. به طور خاص، DMU_j مقادیر $X_j = \{x_{ij}\}$ از ورودی ($i = 1, \dots, m$) را مصرف می‌کند و مقادیر $Y_j = \{y_{rj}\}$ از خروجی ($r = 1, \dots, s$) را تولید می‌کند. بدون از دست رفتن کلیت موضوع، فرض می‌شود که همه‌ی داده‌های x_{ij} و y_{rj} ($i = 1, \dots, m$)، $r = 1, \dots, s$ و $j = 1, \dots, n$) به علت وجود عدم اطمینان به طور دقیق قابل تعیین نیستند. فقط می‌دانیم که در درون کران‌های بالا و پایین تعیین شده به صورت $[x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ و $[y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ قرار دارند، که در اینجا $x_{ij}^L > 0$ و $y_{rj}^L > 0$. برای کار کردن با چنین موقعیت نامطمئن، Wang و همکاران مدل‌های برنامه‌ریزی خطی (LP)^۷ زیر را برای به دست آوردن کران‌های بالا و پایین کارایی هر DMU ارائه کردند، که کارایی‌های خوشبینانه‌ی DMUها را اندازه‌گیری می‌کنند (Wang et al., 2005):

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta_o^U = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

که در اینجا DMU_o نشان دهنده‌ی مورد ارزیابی است و v_i ($i = 1, \dots, m$) و u_r ($r = 1, \dots, s$) متغیرهای تصمیم‌گیری و ε بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی است. θ_o^L و θ_o^U به ترتیب کارایی‌های خوشبینانه تحت مطلوب‌ترین موقعیت و نامطلوب‌ترین موقعیت برای DMU_o می‌باشند. آنها بازه‌ی کارایی خوشبینانه‌ی $[\theta_o^L, \theta_o^U]$ را تشکیل می‌دهند. اگر مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که باعث شود $\theta_o^{U*} = 1$ ، آنگاه DMU_o کارایی DEA یا کارایی خوشبینانه نامیده می‌شود؛ در غیر این صورت، به آن غیر کارایی DEA یا غیر کارایی خوشبینانه می‌گویند.

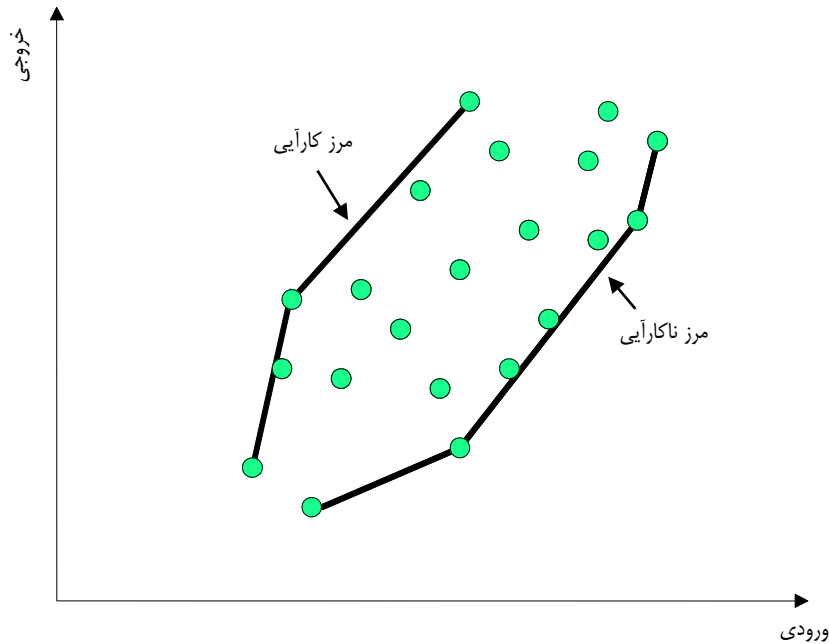
در چارچوب با ماهیت ورودی از دیدگاه بدبینانه، که مبتنی بر مجموعه‌ی نیازمندی ورودی و مرز بدترین عملکرد آن است، در صدد آن است که ضمن حفظ خروجی، حداکثر در حد فعلی، مقادیر ورودی را حتی‌الامکان افزایش دهد. که بر این واقعیت تأکید می‌کند که سطح خروجی بدون تغییر می‌ماند، و مقادیر ورودی به صورت متناسب افزایش داده می‌شوند، تا مرز بدترین عملکرد حاصل شود. برآورد کننده‌ی DEA برای مجموعه‌ی امکان تولید ناکارآ، اصطلاحاً کارایی بدبینانه و یا بدترین کارایی نسبی نامیده می‌شود. برای یک DMU خاص، مثلاً DMU_o ، کارایی‌های بدبینانه را می‌توان از مدل‌های DEA زیر محاسبه کرد (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011):

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi_o^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

⁷ Linear programming.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \varphi_o^U = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L = 1, \\
& u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{۴}$$

در مدل‌های (۳) و (۴)، کارایی بدینانه تحت نامطلوب‌ترین موقعیت و کارایی بدینانه تحت مطلوب‌ترین موقعیت برای DMU_o می‌باشند. آنها برای DMU_o بازه‌ی کارایی بدینانه‌ی $[\varphi_o^L, \varphi_o^U]$ را ارائه می‌کنند. زمانی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشند تا $\varphi_o^{L*} = 1$ را تأمین کند، می‌گوییم که DMU_o ناکارایی DEA یا ناکارایی بدینانه است. در غیر این صورت، می‌گوییم که DMU_o غیرناکارایی DEA یا غیرناکارایی بدینانه است. دقت کنید که رویکرد DEA متعارف اکیداً بین DMU‌های غیرکارایی DEA و ناکارایی DEA افتراق نمی‌دهد، و آنها را به یک معنا به کار می‌برد. اما در مدل‌های (۱)–(۴)، واحدهای غیرکارایی DEA، ناکارایی DEA، و غیرناکارایی DEA هر کدام مؤکداً افتراق داده می‌شوند، زیرا هر یک معنای خاصی دارند. واحدهای غیرکارایی DEA لزوماً نشان دهنده‌ی آن نیست که آنها ناکارایی DEA هستند. به همین ترتیب، واحدهای غیرناکارایی DEA نیز لزوماً کارایی DEA نیستند. مرزهای کارایی و ناکارایی با یک ورودی و یک خروجی، در شکل ۱ نشان داده شده است، که از داده‌های مشاهده شده ساخته می‌شوند.



شکل شماره (۱): مرزهای کارایی و ناکارایی برای یک ورودی و یک خروجی.

مشخصاً این ضرورت وجود دارد که کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه را ترکیب کنیم تا یک سنجش کلی از هر DMU به دست آید. در ادامه، مدل‌های DEAی Wang و Luo را که برای داده‌های دقیق پیاده‌سازی شده بودند را به مدل‌های DEAی بازه‌ای بسط می‌دهیم (Wang & Luo, 2006). به همین منظور، ابتدا ADMU و IDMU را معرفی می‌کنیم. تعریف ۱: IDMU یک DMUی مجازی است که با مصرف کمترین مقدار ورودی، بیشترین مقدار خروجی را تولید می‌کند. تعریف ۲: ADMU یک DMUی مجازی است که با مصرف بیشترین مقدار ورودی، کمترین مقدار خروجی را تولید می‌کند. با توجه به تعاریف ۱ و ۲، مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های IDMU را با نماد $x_i^{L \min}$ ($i = 1, \dots, m$)، $x_i^{U \min}$ ($i = 1, \dots, m$)، $y_r^{L \max}$ ($r = 1, \dots, s$) و $y_r^{U \max}$ ($r = 1, \dots, s$) و مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های ADMU را با نماد $x_i^{L \max}$ ($i = 1, \dots, m$)، $x_i^{U \max}$ ($i = 1, \dots, m$)، $y_r^{L \min}$ ($r = 1, \dots, s$) و $y_r^{U \min}$ ($r = 1, \dots, s$) نشان می‌دهیم. این مقادیر با فرمول‌های زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}
x_i^{L \min} &= \min_j \{x_{ij}^L\} \quad \text{and} \quad x_i^{L \max} = \max_j \{x_{ij}^L\}, \quad i = 1, \dots, m, \\
x_i^{U \min} &= \min_j \{x_{ij}^U\} \quad \text{and} \quad x_i^{U \max} = \max_j \{x_{ij}^U\}, \quad i = 1, \dots, m, \\
y_r^{L \min} &= \min_j \{y_{rj}^L\} \quad \text{and} \quad y_r^{L \max} = \max_j \{y_{rj}^L\}, \quad r = 1, \dots, s, \\
y_r^{U \min} &= \min_j \{y_{rj}^U\} \quad \text{and} \quad y_r^{U \max} = \max_j \{y_{rj}^U\}, \quad r = 1, \dots, s.
\end{aligned} \tag{۵}$$

گرچه IDMU یک DMU مجازی است، ولی رفتار تولیدی آن باید مورد تعقیب همهی DMUها باشد. روشن است که IDMU باید بتواند به بالاترین کارایی خوشبینانه دست یابد. با فرض اینکه θ_{IDMU}^* کارایی خوشبینانهی IDMU باشد، می‌توان آن را از مدل‌های LP زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta_{IDMU}^U = \sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min} = 1, \\
& u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m,
\end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta_{IDMU}^L = \sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min} = 1, \\
& u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m,
\end{aligned} \tag{۷}$$

فرض کنید $[\theta_{IDMU}^{L*}, \theta_{IDMU}^{U*}]$ بازهی کارایی خوشبینانهی IDMU باشد. از آنجا که این امکان وجود دارد که مدل‌های LP (۶) و (۷) بهینه‌های متعدد داشته باشد، از مدل‌های LP زیر برای تعیین کارایی‌های خوشبینانهی DMU_o تحت شرط بدون تغییر ماندن کارایی‌های خوشبینانهی IDMU استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \phi_o^U = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{r=1}^s u_r y_j^{U \max} - \sum_{i=1}^m v_i (\theta_{IDMU}^{U*} x_i^{L \min}) = 0, \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L = 1, \\
& u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & \phi_o^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{r=1}^s u_r y_j^{L \max} - \sum_{i=1}^m v_i (\theta_{IDMU}^{L*} x_i^{U \min}) = 0, \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U = 1, \\
& u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{۹}$$

کارایی ADMU به عنوان یک DMU مجازی مشخصاً از هر DMUی دیگر بدتر است. با فرض اینکه کارایی ϕ_{ADMU}^* بدبینانهی ADMU باشد، می‌توان آن را از مدل‌های LP زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi_{ADMU}^L = \sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \min} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \max} = 1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi_{ADMU}^U = \sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \min} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \max} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (11)$$

فرض کنید $[\varphi_{ADMU}^{L*}, \varphi_{ADMU}^{U*}]$ بازه‌ی کارایی بدبینانه‌ی ADMU باشد. آنگاه می‌توان از مدل‌های LP زیر برای تعیین کارایی‌های بدبینانه‌ی DMU_o تحت شرط بدون تغییر ماندن کارایی‌های بدبینانه‌ی ADMU، استفاده کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi_o^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_j^{L \min} - \sum_{i=1}^m v_i (\varphi_{ADMU}^{L*} x_i^{U \max}) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi_o^U = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_j^{U \min} - \sum_{i=1}^m v_i (\varphi_{ADMU}^{U*} x_i^{L \max}) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

فرض کنید $[\psi_o^L, \psi_o^U]$ و $[\phi_o^L, \phi_o^U]$ به ترتیب بازه‌های کارایی خوشبینانه و بدبینانه‌ی DMU_o باشند، که از مقادیر بهینه‌ی تابع هدف مدل‌های (۸)، (۹)، (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آیند، آنگاه تعریف‌های زیر را داریم.

تعریف ۳: گفته می‌شود که DMU_o کارایی DEA یا کارایی خوشبینانه است، اگر $\phi_o^{U*} = 1$ ، در غیر این صورت، اگر $\phi_o^{U*} < 1$ ، گفته می‌شود که غیرکارایی DEA یا غیرکارایی خوشبینانه است.

تعریف ۴: گفته می‌شود که DMU_o ناکارایی DEA یا ناکارایی بدبینانه است، اگر $\psi_o^{L*} = 1$ ، در غیر این صورت، اگر $\psi_o^{L*} > 1$ ، گفته می‌شود که غیرناکارایی DEA یا غیرناکارایی بدبینانه است.

باید خاطر نشان کرد که کارایی در مدل‌های DEA بازه‌ای (۱۰)–(۱۳) مبتنی بر ADMU بزرگ‌تر یا مساوی یک تعریف شده است. در حقیقت، کارایی متعارف DEA بازه‌ای می‌تواند DMU‌هایی را که عملکرد ضعیفی دارند، افتراق دهد، ولی نمی‌تواند مشخص کند که در میان DMU‌هایی که کارایی DEA هستند، کدامیک بهترین عملکرد را دارند، در حالی که کارایی‌های تعریف شده در مدل‌های DEA بازه‌ای (۱۰)–(۱۳) دارای قابلیت شناسایی این هستند که کدام DMU بهترین عملکرد را دارد، ولی قابلیت مشخص کردن اینکه کدام DMU بدترین عملکرد را دارد، ندارند. بنابراین، دو تعریف کارایی مکمل یکدیگر هستند.

از مطالب بالا، معلوم می‌شود که مدل‌های DEA بازه‌ای (۶)–(۹) مبتنی بر IDMU کارایی‌های خوشبینانه‌ی IDMU و n

DMU حقیقی را اندازه‌گیری می‌کنند، در حالی که مدل‌های DEA بازه‌ای (۱۰)-(۱۳) که مبتنی بر ADMU هستند، کارایی‌های بدبینانه‌ی ADMU و n DMU واقعی را اندازه‌گیری می‌کنند. این دو سنجش متمایز کارایی، ممکن است به نتیجه‌گیری‌های کاملاً متفاوتی منجر شوند. بنابراین، باید آنها را با هم در نظر گرفت، تا یک سنجش کلی از هر DMU به دست آید. برای این منظور، Wang و Luo مفهوم RC را به صورت زیر معرفی کردند، که در رویکرد TOPSIS که از روش‌های معروف تصمیم‌گیری چندشاخصی است (Hwang & Yoon, 1981)، زیاد به کار می‌رود:

$$RC_j = \frac{\psi_j^* - \phi_{ADMU}^*}{(\psi_j^* - \phi_{ADMU}^*) + (\theta_{IDMU}^* - \phi_j^*)}, \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

روشن است که هر چه تفاوت بین ψ_j^* و ϕ_{ADMU}^* بیشتر و تفاوت بین θ_{IDMU}^* و ϕ_j^* کوچک‌تر باشد، به معنای عملکرد بهتر برای DMU_j خواهد بود. بنابراین، هر چه RC_j بزرگ‌تر باشد، عملکرد DMU_j بهتر خواهد بود. تعریف ۵: فرض کنید $A = [a^L, b^U]$ و $B = [b^L, b^U]$ که در آن $a^L, b^L \geq 0$ ، دو عدد بازه‌ای دلخواه باشند. در این

صورت، فاصله‌ی بین A و B به صورت $D(A, B) = \sqrt{\frac{1}{2}[(a^L - b^L)^2 + (a^U - b^U)^2]}$ تعریف می‌شود.

فرض کنید $[\theta_{IDMU}^{L*}, \theta_{IDMU}^{U*}]$ و $[\phi_j^{L*}, \phi_j^{U*}]$ به ترتیب بازه‌های کارایی خوشبینانه‌ی IDMU و DMU_j باشند، که به وسیله‌ی مدل‌های DEA بازه‌ای (۶)-(۹) تعیین شده‌اند، و $[\phi_{ADMU}^{L*}, \phi_{ADMU}^{U*}]$ و $[\psi_j^{L*}, \psi_j^{U*}]$ به ترتیب بازه‌های کارایی بدبینانه‌ی ADMU و DMU_j بر اساس مدل‌های DEA بازه‌ای (۱۰)-(۱۳) باشند. در این صورت شاخص نزدیکی نسبی DMU_j به IDMU، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RC_j = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}[(\psi_j^{L*} - \phi_{ADMU}^{L*})^2 + (\psi_j^{U*} - \phi_{ADMU}^{U*})^2]}}{\sqrt{\frac{1}{2}[(\psi_j^{L*} - \phi_{ADMU}^{L*})^2 + (\psi_j^{U*} - \phi_{ADMU}^{U*})^2] + \frac{1}{2}[(\theta_{IDMU}^{L*} - \phi_j^{L*})^2 + (\theta_{IDMU}^{U*} - \phi_j^{U*})^2]}} \quad (15)$$

$$= \frac{\sqrt{(\psi_j^{L*} - \phi_{ADMU}^{L*})^2 + (\psi_j^{U*} - \phi_{ADMU}^{U*})^2}}{\sqrt{(\psi_j^{L*} - \phi_{ADMU}^{L*})^2 + (\psi_j^{U*} - \phi_{ADMU}^{U*})^2 + \sqrt{(\theta_{IDMU}^{L*} - \phi_j^{L*})^2 + (\theta_{IDMU}^{U*} - \phi_j^{U*})^2}}}, \quad j = 1, K, n$$

در ادامه، رویکرد جدید پیشنهادی را برای ارزیابی عملکرد بیست شعبه‌ی بانک تجاری به کار می‌بریم. تمام مدل‌ها روی یک کامپیوتر شخصی با استفاده از برنامه‌ی حل کننده‌ی LP به نام GAMS اجرا شدند. مقدار بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی $\epsilon = 10^{-15}$ منظور شد.

مسئله‌ی اندازه‌گیری عملکرد برای بیست شعبه‌ی بانک تجاری (DMU) در ایران را در نظر بگیرید. هر شعبه از سه ورودی برای تولید چهار خروجی استفاده می‌کند. در جدول‌های ۱ و ۲ ورودی‌های بازه‌ای و خروجی‌های بازه‌ای برای این DMUها داده شده است. مجموعه داده‌های این تحلیل از مقاله‌ی Jahanshahloo و همکاران گرفته شده‌اند (Jahanshahloo et al., 2009).

ورودی‌ها

x_1 : سود قابل پرداخت.

x_2 : پرسنل.

x_3 : وام‌های بدون عملکرد.

خروجی‌ها

y_1 : جمع کل چهار سپرده‌ی اصلی.

y_2 : کارمزد.

y_3 : وام‌های داده شده.

y_4 : بهره‌ی دریافتی.

جدول شماره (۱): داده‌های ورودی برای بیست شعبه‌ی بانک.

x_{3j}^U	x_{3j}^L	x_{2j}^U	x_{2j}^L	x_{1j}^U	x_{1j}^L	DMU _j
۸۷۲۴۳	۸۷۲۴۳	۳۶,۸۶	۳۶,۲۹	۹۶۱۳,۳۷	۵۰۰۷,۲۷	۱
۱۲۱۲۰	۹۹۴۵	۲۰,۱۶	۱۸,۸	۵۹۶۱,۵۵	۲۹۲۶,۸۱	۲
۵۰۰۱۳	۴۷۵۷۵	۲۷,۱۷	۲۵,۷۴	۱۷۷۵۲,۵	۸۷۲۲,۷	۳
۱۹۷۵۳	۱۹۲۹۲	۲۲,۵۴	۲۰,۸۱	۱۹۶۶,۳۹	۹۴۵,۹۳	۴
۳۹۱۱	۳۴۲۸	۱۴,۸	۱۴,۱۶	۱۷۵۲۱,۶۶	۸۴۸۷,۰۷	۵
۱۵۶۵۷	۱۳۹۲۹	۱۹,۴۶	۱۹,۴۶	۲۷۳۵۹,۳۶	۱۳۷۵۹,۳۵	۶
۲۹۰۰۵	۲۷۸۲۷	۲۷,۴۸	۲۷,۲۹	۱۲۰۵,۴۷	۵۸۷,۶۹	۷
۹۹۸۳	۹۰۷۰	۲۵,۰۷	۲۴,۵۲	۹۵۵۹,۶۱	۴۶۴۶,۳۹	۸
۴۱۳۹۰۲	۴۱۲۰۳۶	۲۱,۵۹	۲۰,۴۷	۳۴۲۷,۸۹	۱۵۵۴,۲۹	۹
۱۰۲۲۹	۸۶۳۸	۱۵,۰۵	۱۴,۸۴	۳۶۲۹۷,۵۴	۱۷۵۲۸,۳۱	۱۰
۹۳۷	۵۰۰	۲۰,۵۴	۲۰,۴۲	۴۹۵۵,۷۸	۲۴۴۴,۳۴	۱۱
۲۱۳۵۳	۱۶۱۴۸	۲۳,۱۹	۲۲,۸۷	۱۴۱۷۸,۱۱	۷۳۰۲,۲۷	۱۲
۱۷۲۹۰	۱۷۱۶۳	۲۱,۸۳	۱۸,۴۷	۱۹۷۴۲,۸۹	۹۸۵۲,۱۵	۱۳
۱۷۹۶۴	۱۷۹۱۸	۲۳,۹۶	۲۲,۸۳	۹۳۱۲,۲۴	۴۵۴۰,۷۵	۱۴
۵۵۱۳۶	۵۱۵۸۲	۳۹,۸۶	۳۹,۳۲	۶۳۰۴,۰۱	۳۰۳۹,۵۸	۱۵
۲۳۹۹۲	۲۰۹۷۵	۲۶,۵۲	۲۵,۵۷	۱۳۴۵۳,۵۸	۶۵۸۵,۸۱	۱۶
۴۳۱۰۳	۴۱۹۶۰	۲۷,۹۵	۲۷,۵۹	۸۶۰۳,۷۹	۴۲۰۹,۱۸	۱۷
۱۹۳۵۴	۱۸۶۴۱	۱۳,۹۳	۱۳,۶۳	۲۰۳۷,۸۲	۱۰۱۵,۵۲	۱۸
۱۹۵۶۹	۱۹۵۰۰	۲۷,۲۶	۲۷,۱۲	۱۱۸۷۵,۳۹	۵۸۰۰,۳۸	۱۹
۳۲۰۶۱	۳۱۷۰۰	۲۸,۹۶	۲۸,۹۶	۲۹۲۲,۱۵	۱۴۴۵,۶۸	۲۰
۹۳۷	۵۰۰	۱۳,۹۳	۱۳,۶۳	۱۲۰۵,۴۷	۵۸۷,۶۹	IDMU
۴۱۳۹۰۲	۴۱۲۰۳۶	۳۹,۸۶	۳۹,۳۲	۳۶۲۹۷,۵۴	۱۷۵۲۸,۳۱	ADMU

جدول شماره (۲): داده‌های خروجی برای بیست شعبه‌ی بانک.

y_{4j}^U	y_{4j}^L	y_{3j}^U	y_{3j}^L	y_{2j}^U	y_{2j}^L	y_{1j}^U	y_{1j}^L	DMU _j
۱۲۵۷۴۰,۲۸	۱۰۸۶۳۴,۷۶	۱۸۵۳۳۶۵	۱۶۷۵۵۱۹	۶۹۵۷,۳۳	۹۶۵,۹۷	۳۱۲۶۷۹۸	۲۶۹۶۹۹۵	۱
۳۷۸۳۶,۵۶	۳۲۳۹۶,۶۵	۳۹۰۲۰۳	۳۷۷۳۰۹	۷۴۹,۴	۳۰۴,۶۷	۴۴۰۳۵۵	۳۴۰۳۷۷	۲
۱۰۸۰۸۰,۰۱	۹۶۸۴۲,۳۳	۱۸۲۲۰۲۸	۱۲۳۳۵۴۸	۳۱۷۴	۲۲۸۵,۰۳	۱۰۶۱۲۶۰	۱۰۲۷۵۴۶	۳
۳۹۲۷۳,۳۷	۳۲۳۶۲,۸	۵۴۲۱۰۱	۴۶۸۵۲۰	۵۱۰,۹۳	۲۰۷,۹۸	۱۲۱۳۵۴۱	۱۱۴۵۲۳۵	۴
۱۴۱۶۵,۴۴	۱۲۶۶۲,۷۱	۱۴۲۸۱۳	۱۲۹۷۵۱	۹۲,۳	۶۳,۳۲	۳۹۵۲۴۱	۳۹۰۹۰۲	۵
۷۲۲۵۷,۲۸	۵۳۵۹۱,۳	۵۷۴۳۵۵	۵۰۷۵۰۲	۸۶۹,۵۲	۴۸۰,۱۶	۱۰۸۷۳۹۲	۹۸۱۱۱۵	۶
۴۵۸۴۷,۴۸	۴۰۵۰۷,۹۷	۳۲۳۷۲۱	۲۸۸۵۱۳	۳۷۰,۸۱	۱۷۶,۵۸	۱۶۵۸۱۸	۱۴۴۹۰۶	۷
۷۳۹۴۸,۰۹	۵۶۲۶۰,۰۹	۱۰۷۱۸۱۲	۱۰۴۴۲۲۱	۵۸۸۲,۵۳	۴۶۵۴,۷۱	۴۱۶۴۱۶	۴۰۸۱۶۳	۸
۱۸۹۰۰۶,۱۲	۱۷۶۴۳۶,۸۱	۱۸۰۲۹۴۲	۱۵۸۴۷۲۲	۲۵۰۶,۶۷	۵۶۰,۲۶	۴۱۰۴۲۷	۳۳۵۰۷۰	۹
۷۹۱۴۶۳,۰۸	۶۶۲۷۲۵,۲۱	۲۵۷۳۵۱۲	۲۲۹۰۷۴۵	۸۶,۸۶	۵۸,۸۹	۷۶۸۵۹۳	۷۰۰۸۴۲	۱۰
۲۰۷۷۳,۹۱	۱۷۵۲۷,۵۸	۲۲۸۵۰۷۹	۱۵۷۹۹۶۱	۲۲۸۳,۰۸	۱۰۷۰,۸۱	۶۹۶۳۳۸	۶۴۱۶۸۰	۱۱
۴۲۷۹۰,۱۴	۳۵۷۵۷,۸۳	۲۷۵۷۱۷	۲۴۵۷۲۶	۵۵۹,۸۵	۳۷۵,۰۷	۴۸۱۹۴۳	۴۵۳۱۷۰	۱۲
۵۰۲۵۵,۷۵	۴۵۶۵۲,۲۴	۴۳۱۸۱۵	۴۲۵۸۸۶	۸۳۶,۸۲	۴۳۸,۴۳	۵۷۴۹۸۹	۵۵۳۱۶۷	۱۳
۱۱۹۴۸,۰۴	۸۱۴۳,۷۹	۱۲۶۹۳۰	۱۲۴۱۸۸	۱۴۶۸,۴۵	۹۳۶,۶۲	۳۴۲۵۹۸	۳۰۹۶۷۰	۱۴

۱۱۱۹۶۲,۳	۱۰۶۷۹۸,۶۳	۸۱۰۰۸۸	۷۸۷۹۵۹	۴۳۳۵,۲۴	۱۲۰۳,۷۹	۳۱۷۱۸۶	۲۸۶۱۴۹	۱۵
۱۶۵۵۲۴,۲۲	۸۹۹۷۱,۴۷	۳۷۹۴۸۸	۳۶۰۸۸۰	۳۹۹,۸	۲۰۰,۳۶	۳۴۷۸۴۸	۳۲۱۴۳۵	۱۶
۴۱۸۲۶,۵۱	۳۳۰۳۶,۷۹	۹۱۳۶۵۰۷	۹۱۳۶۵۰۷	۴۵۵۵,۴۲	۲۷۸۱,۲۴	۸۳۵۸۳۹	۶۱۸۱۰۵	۱۷
۱۰۸۷۷,۷۸	۹۵۲۵,۶	۲۹۱۷۳	۲۶۶۸۷	۲۷۴,۷	۲۴۰,۰۴	۳۲۰۹۷۴	۲۴۸۱۲۵	۱۸
۹۵۳۲۹,۸۷	۶۶۰۹۷,۱۶	۳۹۸۵۹۰۰	۲۹۴۶۷۹۷	۱۹۱۴,۲۵	۹۶۱,۵۶	۶۷۹۹۱۶	۶۴۰۸۹۰	۱۹
۲۷۹۳۴,۱۹	۲۱۹۹۱,۵۳	۳۰۸۰۱۲	۲۹۷۶۷۴	۴۷۱,۲۲	۲۸۲,۷۳	۱۲۰۲۰۸	۱۱۹۹۴۸	۲۰
۷۹۱۴۶۳,۰۸	۶۶۲۷۲۵,۲۱	۹۱۳۶۵۰۷	۹۱۳۶۵۰۷	۶۹۵۷,۳۳	۴۶۵۴,۷۱	۳۱۲۶۷۹۸	۲۶۹۶۹۹۵	IDMU
۱۰۸۷۷,۷۸	۸۱۴۳,۷۹	۲۹۱۷۳	۲۶۶۸۷	۸۶,۸۶	۵۸,۸۹	۱۲۰۲۰۸	۱۱۹۹۴۸	ADMU

با اجرای مدل‌ها بر مجموعه داده‌ها؛ مدل DEA (۱)، ده تا از بیست DMU را کارآی DEA (کارآی خوشبینانه) ارزیابی می‌کند، ولی دیگر نمی‌تواند بین آنها بیشتر افتراق بدهد. و هم‌ه‌ی ده DMU دیگر را به عنوان غیر کارآی خوشبینانه می‌شناسد. تصمیم گیرنده از این نتیجه زیاد راضی نیست، چون تعداد زیادی از DMUها نمره‌ی کارآیی کامل گرفته‌اند (اگر ده واحد کارآی خوشبینانه در وضعیت بهترین فعالیت تولیدی باشند، کارآی خوشبینانه هستند؛ در غیر این صورت، آنها نیز غیر کارآی خوشبینانه هستند). از جدول ۳ روشن است که مدل DEA (۳)، هشت تا از بیست DMU را به عنوان ناکارآی DEA (ناکارآی بدبینانه) شناسایی می‌کند، و هم‌ه‌ی دوازده DMU دیگر را به عنوان غیر ناکارآی بدبینانه می‌شناسد (اگر هشت واحد ناکارآی بدبینانه در وضعیت بدترین فعالیت تولیدی باشند، ناکارآی بدبینانه هستند؛ در غیر این صورت، آنها نیز غیر ناکارآی بدبینانه هستند). برای سنجش بهتر عملکرد و رتبه‌بندی قابل اعتماد بیست DMU، مدل‌های IDMU و ADMU برای ارزیابی مجدد عملکرد بیست DMU مورد استفاده قرار می‌گیرند. IDMU و ADMU مجازی در دو سطر آخر جدول‌های ۱ و ۲ تعریف شده‌اند. بازه‌ی کارآیی خوشبینانه‌ی IDMU، [۳۹,۴۶۵۲، ۱۶,۸۴۵۹] و بازه‌ی کارآیی بدبینانه‌ی ADMU، [۰,۰۲۱۹، ۰] است. مقدار این دو کارآیی در دو سطر آخر جدول ۳ درج شده‌اند.

جدول شماره (۳): کارایی‌های بازه‌ای برای بیست شعبه‌ی بانک.

بازه‌ی کارایی بدبینانه		بازه‌ی کارایی خوشبینانه		DMU
مدل‌های (۱۲) و (۱۳)	مدل‌های (۳) و (۴)	مدل‌های (۸) و (۹)	مدل‌های (۱) و (۲)	
$([\psi_j^{L*}, \psi_j^{U*}])$	$([\phi_j^{L*}, \phi_j^{U*}])$	$([\theta_j^{L*}, \theta_j^{U*}])$	$([\theta_j^{L*}, \theta_j^{U*}])$	
[۴,۴۹۲۳, ۹,۴۲۷۷]	[۱,۵۴۳۱, ۳,۱۲۸۶]	[۰,۳۷۰۳, ۰,۹۳۴۶]	[۰,۸۵۸۶, ۱,۰۰۰۰]	۱
[۴,۸۸۴۹, ۱۳,۵۴۹۵]	[۱,۸۵۱۵, ۲,۷۰۳۴]	[۰,۱۷۷۶, ۰,۴۳۹۷]	[۰,۳۳۹۳, ۰,۴۹۷۶]	۲
[۵,۵۴۰۶, ۱۰,۹۵۰۳]	[۲,۳۱۳۹, ۳,۹۶۳۲]	[۰,۱۷۵۳, ۰,۴۵۲۰]	[۰,۵۲۴۶, ۰,۶۶۹۹]	۳
[۵,۴۵۴۱, ۸,۲۲۷۹]	[۱,۴۷۵۲, ۲,۴۸۹۸]	[۰,۶۱۲۳, ۱,۰۰۰۰]	[۰,۸۸۹۱, ۱,۰۰۰۰]	۴
[۱,۰۰۰۰, ۱۱,۵۴۰۳]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۱۸۰۹]	[۰,۰۴۰۳, ۰,۰۶۲۸]	[۰,۶۳۳۳, ۰,۶۸۰۷]	۵
[۲,۳۸۴۸, ۵,۴۰۸۸]	[۱,۶۰۷۵, ۳,۲۶۴۲]	[۰,۰۸۲۶, ۰,۱۷۸۷]	[۰,۸۸۳۵, ۱,۰۰۰۰]	۶
[۱,۴۹۰۵, ۳,۵۳۳۲]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۲۱۵۹]	[۰,۳۴۶۴, ۰,۷۷۴۹]	[۰,۵۶۸۵, ۱,۰۰۰۰]	۷
[۳۱,۰۳۷۶, ۴۳,۲۸۲۱]	[۱,۶۵۷۱, ۲,۸۶۷۶]	[۰,۲۱۰۱, ۱,۰۰۰۰]	[۰,۸۱۳۴, ۱,۰۰۰۰]	۸
[۱,۰۰۰۰, ۱,۲۸۶۵]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۰۷۶۱]	[۰,۱۴۷۵, ۰,۳۳۰۰]	[۰,۶۸۳۷, ۱,۰۰۰۰]	۹
[۷,۳۱۷۴, ۱۶,۷۷۱۱]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۳۹۵۷]	[۰,۴۱۴۰, ۱,۰۰۰۰]	[۰,۸۸۳۹, ۱,۰۰۰۰]	۱۰
[۴۵,۸۸۴۳, ۱۳۵۲,۰۸۸۲]	[۱,۷۷۸۶, ۲,۷۶۴۶]	[۰,۳۸۵۴, ۱,۰۰۰۰]	[۰,۸۹۸۵, ۱,۰۰۰۰]	۱۱
[۱,۸۱۰۶, ۳,۷۶۸۷]	[۱,۲۰۱۹, ۱,۶۹۰۱]	[۰,۰۸۳۵, ۰,۱۸۳۴]	[۰,۳۲۸۸, ۰,۳۹۹۱]	۱۲
[۲,۵۰۶۲, ۸,۷۱۱۹]	[۱,۲۲۳۶, ۲,۳۴۱۵]	[۰,۰۸۱۸, ۰,۱۷۴۱]	[۰,۴۴۳۹, ۰,۵۴۷۵]	۱۳
[۲,۷۲۱۴, ۵,۶۴۲۱]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۱۳۴۱]	[۰,۰۵۱۳, ۰,۲۲۲۵]	[۰,۲۶۹۱, ۰,۳۵۸۷]	۱۴
[۴,۱۰۲۰, ۸,۳۱۷۰]	[۱,۳۴۰۱, ۱,۸۷۷۱]	[۰,۲۸۳۷, ۰,۶۶۶۸]	[۰,۳۹۹۶, ۱,۰۰۰۰]	۱۵
[۲,۰۸۲۸, ۵,۴۰۵۵]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۵۹۶۸]	[۰,۱۵۴۱, ۰,۵۳۴۳]	[۰,۲۰۸۱, ۰,۵۵۳۰]	۱۶
[۴۰,۷۵۵۹, ۵۸,۵۶۶۹]	[۱,۷۲۸۰, ۲,۲۷۰۳]	[۰,۵۸۲۲, ۱,۰۰۰۰]	[۰,۹۸۷۱, ۱,۰۰۰۰]	۱۷
[۱,۰۰۰۰, ۱,۱۷۰۴]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۱۱۷۲]	[۰,۱۳۲۵, ۰,۲۸۷۶]	[۰,۲۶۵۱, ۰,۳۵۳۴]	۱۸
[۱۸,۸۹۵۰, ۵۴,۷۷۸۰]	[۲,۱۴۲۱, ۳,۸۸۹۶]	[۰,۲۸۱۴, ۰,۶۵۳۰]	[۰,۵۷۷۱, ۰,۷۱۸۹]	۱۹
[۲,۴۴۲۰, ۳,۱۵۱۶]	[۱,۰۰۰۰, ۱,۰۰۲۲]	[۰,۱۴۲۲, ۰,۳۵۵۰]	[۰,۱۸۴۱, ۰,۴۰۰۴]	۲۰
—	—	[۱۶,۸۴۵۹, ۳۹,۴۶۵۲]	—	IDMU
[۰,۰۲۱۹, ۰,۰۲۸۵]	—	—	—	ADMU

از جدول ۳ روشن است که مدل‌های DEA بازه‌ای با IDMU فقط DMU_4 ، DMU_8 ، DMU_{10} ، DMU_{11} و DMU_{17} را به عنوان کارایی خوشبینانه شناسایی می‌کنند (اگر این واحدها در وضعیت بهترین فعالیت تولیدی باشند) و همه‌ی پانزده DMU ی دیگر را به عنوان غیرکارایی خوشبینانه می‌شناسند. ملاحظه می‌شود که تعداد واحدهای کارایی خوشبینانه کاهش یافته است. مدل‌های DEA بازه‌ای با ADMU، DMU_5 ، DMU_9 و DMU_{18} را به عنوان ناکارایی بدبینانه، و هفده DMU ی دیگر را به عنوان غیرناکارایی بدبینانه شناسایی می‌کنند. با توجه به نتایج نمره‌دهی در جدول ۳، می‌بینیم که مدل‌های DEA بازه‌ای مبتنی بر IDMU، واحدهای کارایی خوشبینانه را شناسایی می‌کنند، ولی نمی‌توانند بین آنها افتراق دهند، در حالی که مدل‌های DEA بازه‌ای مبتنی بر ADMU درست بر عکس هستند، یعنی واحدهای ناکارایی بدبینانه را شناسایی می‌کنند، ولی دیگر نمی‌توانند بین آنها افتراق بدهند. وقتی که نمرات مدل‌های DEA بازه‌ای با هم در نظر گرفته شوند، به کمک معادله‌ی (۱۵) یک برآورد برای RC هر DMU به IDMU به دست می‌آید، که مقادیر آن برای بیست DMU در جدول ۴ ارائه شده است. جدول ۴، رتبه‌بندی بیست DMU را بر اساس شاخص RC نشان می‌دهد. رتبه‌بندی بر اساس شاخص RC نشان می‌دهد که DMU_{11} بهترین عملکرد کلی را دارد، و DMU_{17} ، DMU_8 ، DMU_9 و DMU_{10} به دنبال آن واقع شده‌اند. ترتیب رتبه‌بندی کلی همه‌ی بیست DMU بر اساس شاخص RC در جدول ۴ ارائه شده است، که بر اساس آن می‌توان فهمید که همه‌ی بیست DMU بر اساس عملکرد کلی خود افتراق داده شده و رتبه‌بندی شده‌اند. این مزیت مهم روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر DEA بازه‌ای است. روشن است که رتبه‌بندی بر اساس شاخص RC جامع‌تر است. علت آن است که رتبه‌بندی بر اساس شاخص RC هم کارایی‌های خوشبینانه و هم کارایی‌های بدبینانه‌ی DMU ها را در نظر می‌گیرد. بنابراین، متقاعد کننده‌تر است.

جدول شماره (۴): مقادیر RC و رتبه‌بندی برای بیست شعبه‌ی بانک.

رتبه‌بندی	شاخص RC	DMU	رتبه‌بندی	شاخص RC	DMU
۱	۰٫۷۳۵۸۸	۱۱	۹	۰٫۲۱۳۴۳	۱
۱۶	۰٫۰۹۶۴۲	۱۲	۸	۰٫۲۲۵۸۶	۲
۱۲	۰٫۱۲۹۰۷	۱۳	۷	۰٫۲۴۸۶۹	۳
۱۱	۰٫۱۳۸۴۸	۱۴	۶	۰٫۲۵۰۷۳	۴
۱۰	۰٫۱۹۷۶۶	۱۵	۲۰	۰٫۰۵۵۰۰	۵
۱۵	۰٫۱۰۹۹۵	۱۶	۱۴	۰٫۱۲۳۵۴	۶
۲	۰٫۷۱۴۶۶	۱۷	۱۷	۰٫۰۸۱۷۳	۷
۱۹	۰٫۰۵۵۲۹	۱۸	۳	۰٫۵۵۸۰۵	۸
۴	۰٫۵۳۲۵۷	۱۹	۱۸	۰٫۰۵۵۲۳	۹
۱۳	۰٫۱۲۶۵۵	۲۰	۵	۰٫۳۰۷۴۷	۱۰

۳- نتایج و بحث

در این مقاله، مدل‌های DEA بازه‌ای جدیدی ارائه کردیم که دوتا از آنها مبتنی بر IDMU مجازی و دوتای دیگری مبتنی بر ADMU مجازی هستند. زوج مدل DEA اولی، DMUها را با استفاده از کارایی‌های خوشبینانه ارزیابی می‌کنند و می‌توان از آنها برای شناسایی واحدهای کارآی خوشبینانه استفاده کرد، در حالی که زوج مدل DEA دومی، DMUها را بر اساس کارایی‌های بدبینانه ارزیابی می‌کنند و می‌توان از آنها برای شناسایی واحدهای ناکارآی بدبینانه استفاده کرد. این دو بازه‌ی کارایی متمایز با استفاده از شاخص RC تلفیق می‌شوند، که سنجش عملکردی کلی هر DMU را نشان می‌دهد، و لذا می‌توان از آن به عنوان مبنایی برای مقایسه و رتبه‌بندی DMUها استفاده کرد. در مقایسه با روش‌های موجود DEA بازه‌ای، رویکرد DEA پیشنهادی دارای امکان افتراق هر DMU از دیگران بر اساس عملکرد کلی آن است. یک مثال عددی مزایا، قابلیت و کاربردهای مدل‌های DEA پیشنهادی و شاخص RC را نشان می‌دهد. عرصه‌های احتمالی کاربرد آن فراوان است، و شامل انتخاب پروژه، تحلیل مکان و سیاست، تحلیل عملکرد فروشندگان و کارگران، و امثال آن است.

۴- منابع

1. Azizi, Hossein, & Ganjeh Ajirlu, Hassan. (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. *Applied Mathematical Modelling*, 35(9), 4149-4156. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.038>
2. Belton, Valerie, & Vickers, Stephen P. (1993). Demystifying DEA — A Visual Interactive Approach Based on Multiple Criteria Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 44(9), 883-896. doi: 10.1057/jors.1993.157
3. Bouyssou, D. (1999). Using DEA as a tool for MCDM: some remarks. *Journal of the Operational Research Society*, 50(9), 974-978.
4. Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
5. Cook, Wade D., Kress, Moshe, & Seiford, Lawrence M. (1993). On the Use of Ordinal Data in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 44(2), 133-140.
6. Cook, Wade D., Kress, Moshe, & Seiford, Lawrence M. (1996). Data Envelopment Analysis in the Presence of Both Quantitative and Qualitative Factors. *J Oper Res Soc*, 47(7), 945-953.
7. Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001a). IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) with CMDs (Column Maximum Decision Making Units). *Journal of the*

- Operational Research Society, 52(2), 176-181. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601070
8. Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001b). An Illustrative Application of Idea (Imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean Mobile Telecommunication Company. *Operations Research*, 49(6), 807-820. doi: 10.1287/opre.49.6.807.10022
 9. Cooper, William W., Park, Kyung Sam, & Yu, Gang. (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for Dealing with Imprecise Data in DEA. *Management Science*, 45(4), 597-607. doi: 10.1287/mnsc.45.4.597
 10. Despotis, Dimitris K., & Smirlis, Yiannis G. (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. *European Journal of Operational Research*, 140(1), 24-36. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00200-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00200-4)
 11. Entani, Tomoe, Maeda, Yutaka, & Tanaka, Hideo. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136(1), 32-45. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00055-8](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00055-8)
 12. Hwang, Ching-Lai, & Yoon, Kwangsun. (1981). *Multiple attribute decision making: methods and applications: a state-of-the-art survey*. Berlin; New York: Springer-Verlag.
 13. Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rostamy Malkhalifeh, M., & Ahadzadeh Namin, M. (2009). A generalized model for data envelopment analysis with interval data. *Applied Mathematical Modelling*, 33(7), 3237-3244. doi: 10.1016/j.apm.2008.10.030
 14. Kao, Chiang, & Liu, Shiang-Tai. (2000a). Data Envelopment Analysis with Missing Data: An Application to University Libraries in Taiwan. *The Journal of the Operational Research Society*, 51(8), 897-905. doi: 10.2307/254045
 15. Kao, Chiang, & Liu, Shiang-Tai. (2000b). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 113(3), 427-437. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00137-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00137-7)
 16. Kim, Soung-Hie, Park, Choong-Gyoo, & Park, Kyung-Sam. (1999). An application of data envelopment analysis in telephone officesevaluation with partial data. *Computers & Operations Research*, 26(1), 59-72. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548\(98\)00041-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548(98)00041-0)
 17. Park, K. S. (2004). Simplification of the transformations and redundancy of assurance regions in IDEA (imprecise DEA). *Journal of the Operational Research Society*, 55(12), 1363-1366. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601824
 18. Park, Kyung Sam, & Kim, Soung Hie. (1997). Tools for interactive multiattribute decisionmaking with incompletely identified information. *European Journal of Operational Research*, 98(1), 111-123. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(95\)00121-2](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(95)00121-2)
 19. Sage, A. P., & White, C. C. (1984). ARIADNE: A knowledge-based interactive system for planning and decision support. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, SMC-14(1), 35-47. doi: 10.1109/TSMC.1984.6313267
 20. Stewart, Theodor J. (1996). Relationships between Data Envelopment Analysis and Multicriteria Decision Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 47(5), 654-665. doi: 10.1057/jors.1996.77
 21. Wang, Ying-Ming, Greatbanks, Richard, & Yang, Jian-Bo. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 153(3), 347-370. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2004.12.011>
 22. Wang, Ying-Ming, & Luo, Ying. (2006). DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied Mathematics and Computation*, 173(2), 902-915. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.023>
 23. Wang, Ying-Ming, & Yang, Jian-Bo. (2007). Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies. *Journal of Computational and Applied*

- Mathematics, 198(1), 253-267. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2005.12.025>
24. Zhu, Joe. (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application. *European Journal of Operational Research*, 144(3), 513-529. doi: 10.1016/S0377-2217(01)00392-7
25. Zhu, Joe. (2004). Imprecise DEA via Standard Linear DEA Models with a Revisit to a Korean Mobile Telecommunication Company. *Operations Research*, 52(2), 323-329. doi: 10.1287/opre.1030.0072