



## مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های بدترین عملکرد برای اندازه‌گیری کارآیی فازی

حسین عزیزی (نویسنده مسؤول)

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد پارس‌آباد مغان، پارس‌آباد مغان، ایران

Email: hazizi@iaupmogan.ac.ir

رسول جاهد

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد گرمی، عضو هیات علمی، گرمی، ایران

لیلا فرخی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد گرمی، عضو هیات علمی، گرمی، ایران

تاریخ دریافت: ۹۱/۲/۶ \* تاریخ پذیرش: ۹۱/۶/۱۸

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) در شکل کلاسیک خود که مبتنی بر مفهوم مرز تولید کارآست، بهترین نمره‌ی کارآیی ممکن را تعیین می‌کند که می‌توان آن را به هر یک از اعضای مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) اختصاص داد. DMU بر اساس این نمرات به عنوان کارآیی خوشبینانه یا غیرکارآیی خوشبینانه تقسیم‌بندی می‌شوند، و DMU کارآیی خوشبینانه، مرز کارآیی را مشخص می‌کنند. DEA کلاسیک را می‌توان برای شناسایی واحدهای دارای عملکرد خوب (کارآ) در مطلوب‌ترین سناریو استفاده کرد. به منظور شناسایی واحدهای دارای عملکرد بد، مانند نگاه‌های ورشکسته در نامطلوب‌ترین سناریو (بدترین حالت)، رویکرد مشابهی به نام تحلیل بدترین کارآیی وجود دارد، که از مرز تولید ناکارآ برای تعیین بدترین نمره‌ی کارآیی نسبی ممکن که می‌توان به هر DMU اختصاص داد، استفاده می‌کند. DMU واقع شده بر مرز تولید ناکارآ به عنوان ناکارآیی بدبینانه تعیین می‌شوند، و آنهایی که روی مرز تولید کارآ و تولید ناکارآ نیستند، به عنوان نامعین DEA اعلام می‌شوند.

DEA نیازمند آن است که داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها به طور دقیق معلوم باشند. ولی در کاربردهای واقعی همیشه چنین نیست. لیکن مقادیر مشاهده شده‌ی ورودی‌ها و خروجی‌ها در مسایل دنیای واقعی گاه فازی هستند. بسیاری از پژوهشگران روش‌های فازی مختلفی را برای کار با داده‌های فازی در DEA پیشنهاد کرده‌اند. این مقاله دو مدل DEA فازی جدید ارائه می‌کند که بر اساس حساب فازی برای کار با فازی بودن داده‌های ورودی و خروجی در DEA ایجاد شده‌اند. مدل‌های DEA فازی جدید به صورت مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی می‌شوند و می‌توان آنها را برای تعیین کارآیی فازی گروهی از DMU مورد استفاده قرار داد. مدل‌های DEA فازی مرز بدترین عملکرد پیشنهاد شده در این مقاله، DMU دارای «بدترین عملکرد» را که مرز بدترین عملکرد (مرز ناکارآیی) را تشکیل می‌دهند، به صورت دقیق شناسایی می‌کنند. این مسأله به خصوص برای ارزیابی ریسک اعتبار مفید واقع می‌شود، ولی در هر کاربرد دیگری نیز می‌تواند سودمند باشد، زیرا واحدهایی که بدترین عملکرد را دارند، غالباً در همان جایی قرار دارند که بیشترین احتمال بهبود در آنجا وجود دارد. برای نشان دادن کاربرد رویکرد جدید، یک مثال ارائه خواهد شد.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های ورودی فازی و خروجی فازی، کارآیی فازی، مرز بدترین عملکرد، حساب فازی.

## ۱- مقدمه

مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)<sup>۱</sup> از قبیل مدل‌های CCR (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978) و BCC (Banker, Charnes, & Cooper, 1984)، نیازمند داده‌های ورودی و خروجی قطعی هستند. اما در موقعیت‌های دنیای واقعی داده‌های ورودی و خروجی قطعی ممکن است همیشه در دسترس نباشد، به خصوص زمانی که گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMU)<sup>۲</sup> حاوی داده‌های گمشده، داده‌های قضاوتی، و یا داده‌های پیش‌بینی هستند. به بیان کلی، اطلاعات نامعین و یا داده‌های غیر دقیق را می‌توان با اعداد فازی مشخص کرد که به عنوان یک حالت خاص شامل اعداد بازه‌ای نیز هستند. بنابراین، چگونگی ارزیابی کارایی گروهی از DMUها با داده‌های ورودی و خروجی فازی مسأله‌ای است که شایان مطالعه است.

تلاش‌های متعددی برای کار با داده‌های ورودی و خروجی فازی در DEA انجام شده است. به عنوان مثال، سنگوپتا یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی را معرفی کرد که در آن فازی بودن از طریق تحمیل سطوح تحمل بر تابع هدف و نیز بر موارد نقض قیود، در مدل DEA منظور می‌شد (Sengupta, 1992). تریانیتس و ژیرو یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی را پیشنهاد کردند که در آن داده‌های فازی ورودی و خروجی از طریق مقادیر تابع عضویت به داده‌های قطعی تبدیل می‌شدند (Triantis & Girod, 1998). نمرات کارایی برای مقادیر مختلف تابع عضویت ارزیابی شده سپس متوسط‌گیری می‌شدند. گوئو و تاناکا یک مدل CCR فازی را پیشنهاد کردند که در آن قیود فازی شامل معادله‌ها و نامعادله‌های فازی بر اساس یک سطح امکان از پیش تعیین شده و با استفاده از قانون مقایسه برای اعداد فازی به قیود قطعی تبدیل می‌شدند (Guo & Tanaka, 2001). لئون، لیرن، روئیز، و سیرونت یک مدل BCC فازی را بر اساس همان ایده معرفی کردند (León, Liern, Ruiz, & Sirvent, 2003). لرتووراسیریکول، فنگ، جوینز، و ناتل یک رویکرد امکانی را پیشنهاد کردند که عدم قطعیت در اهداف فازی و قیود فازی را با استفاده از اندازه‌های امکان بررسی می‌کند (Lertworasirikul, Fang, Joines, & Nuttle, 2003a). این رویکرد یک مدل DEA فازی را به یک مدل DEA امکان معین تبدیل می‌کند. در حالت خاصی که داده‌های فازی به صورت اعداد فازی دوزنقه‌ای هستند، مدل DEA امکانی تبدیل به یک مدل برنامه‌ریزی خطی (LP)<sup>۳</sup> می‌شود. آنها (لرتووراسیریکول، فنگ، جوینز و ناتل) یک رویکرد باورپذیری را نیز به عنوان راه دیگری برای حل مدل DEA فازی پیشنهاد کردند (Lertworasirikul, Fang, Joines, & Nuttle, 2003a). رویکرد باورپذیری مدل DEA فازی را به یک مدل برنامه‌ریزی باورپذیری معین تبدیل می‌کند که در آن متغیرهای فازی با اعتبار مورد انتظار بر اساس اندازه‌های باورپذیری جایگزین شده‌اند. اعتبارهای مورد انتظار متغیرهای فازی با استفاده از اندازه‌های باورپذیری به دست آمده‌اند، که متوسط اندازه‌های امکان و ضرورت هستند. رویکردهای امکان و باورپذیری توسط همان مؤلفان به مدل BCC فازی نیز بسط داده شدند (Lertworasirikul, Feng, Nuttle, & Joines, 2003). وو، یانگ، و لیانگ مدل DEA امکان را برای تحلیل کارایی شعب بانک منطقه‌ای در کانادا استفاده کردند (Wu, Yang, & Liang, 2006). گارسیا، شیرو، و ملو از مدل DEA امکان برای تحلیل اثرات و حالت نارسایی استفاده کردند و یک رویکرد DEA فازی را برای تعیین شاخص‌های رتبه‌بندی در میان حالت‌های نارسایی ارائه کردند (Garcia, Schirru, & Melo, 2005).

کائو و لیو داده‌های ورودی و خروجی فازی را با استفاده از مجموعه‌های سطح  $\alpha$  و اصل بسط عسکرزاده به بازه تبدیل کردند و خانواده‌ای از مدل‌های DEA قطعی را برای بازه‌ها ایجاد کردند (Kao & Liu, 2000b, 2003, 2005). لیو، و لیو و چوانگ بر اساس مدل‌های قطعی خود برای مجموعه‌های فازی سطح  $\alpha$ ، مفهوم ناحیه‌ای اطمینان (AR)<sup>۴</sup> را در نظر گرفتند، و یک مدل DEA فازی/AR ایجاد کردند که به ترتیب برای انتخاب سیستم‌های تولیدی انعطاف‌پذیر و سنجش کتابخانه‌های دانشگاهی مورد استفاده قرار گرفت (Liu, 2008; Liu & Chuang, 2009). رویکرد مجموعه‌ی سطح  $\alpha$  توسط ساعتی، معماریانی، و

<sup>۱</sup> Data Envelopment Analysis (DEA)

<sup>۲</sup> Decision-Making Units (DMUs)

<sup>۳</sup> Linear Programming (LP)

<sup>۴</sup> Assurance Region (AR)

جهانشاه لو مورد استفاده قرار گرفت و آنها مدل CCR فازی را به عنوان یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی احتمالاتی تعریف کردند و آن را با استفاده از مجموعه‌ی سطح  $\alpha$ ، تبدیل به یک برنامه‌ریزی بازه‌ای کردند که می‌شد آن را با استفاده از جایگزین متغیرها به عنوان یک مسئله‌ی LP قطعی حل کرد (Saati, Menariani, & Jahanshahloo, 2002). این مدل برای هر DMU و برای هر مجموعه‌ی سطح  $\alpha$  داده شده، یک نمره‌ی کارایی قطعی ایجاد می‌کند. این رویکرد در ساعتی و معماریانی بیشتر بسط داده شد، تا تمام DMUها را بتوان با استفاده از مجموعه‌ی مشترکی از وزن‌ها تحت یک مجموعه‌ی سطح  $\alpha$  داده شده ارزیابی کرد (Saati & Memariani, 2005). انتانی، مائدا، و تاناکا؛ و وانگ، گریت‌بنکس، و یانگ داده‌های ورودی و خروجی فازی را نیز با استفاده از مجموعه‌های سطح  $\alpha$  به بازه تبدیل کردند، ولی دو مدل DEA بازه‌ای متفاوت را پیشنهاد کردند (Entani, Maeda, & Tanaka, 2002; Wang, Greatbanks, & Yang, 2005). دیا یک مدل DEA فازی را بر اساس عملیات حساب فازی و مقایسه‌ی فازی بین اعداد فازی پیشنهاد کرد (Dia, 2004). در این مدل، تصمیم گیرنده باید یک سطح انتظار فازی و یک سطح ایمنی  $\alpha$  را تعیین کند، تا مدل DEA فازی بتواند از طریق مقایسه‌ی مجموعه‌های سطح  $\alpha$  در سطح  $\alpha$  تعیین شده به یک مدل DEA فازی تبدیل شود.

تریانتیس یک رویکرد DEA فازی را برای اندازه‌های محاسبه‌ی کارایی فنی غیرشعاعی فازی پیشنهاد کرد و رویکرد را برای یک فرآیند تولید لایی قبل از چاپ روزنامه به کار برد (Triantis, 2003). سلیمانی-دامنه، جهانشاهلو، و عباس‌بندی برخی معایب محاسباتی و نظری مدل‌های DEA فازی ابداع شده در کائو و لیو؛ و لئون و همکاران؛ و لرتورواسیریکول و همکاران را بر شمرند، و یک مدل DEA فازی برای تولید کارایی‌های قطعی برای DMU با داده‌های ورودی و خروجی فازی ایجاد کردند (Soleimani-damaneh, Jahanshahloo, & Abbasbandy, 2006; Kao & Liu, 2000a; León et al., 2003a; Lertworasirikul et al., 2003). جهانشاهلو، سلیمانی-دامنه، و نصرآبادی اندازه‌ی مبتنی بر اسلک کارایی در DEA را به موقعیت فازی گسترش دادند و یک مدل DEA غیرخطی دو هدفی برای DMUهای دارای داده‌های ورودی فازی و خروجی فازی ایجاد کردند (Jahanshahloo, Soleimani-damaneh, & Nasrabadi, 2004).

از بررسی مقالات فوق، معلوم می‌شود که مدل‌های DEA فازی موجود یا ناشی از فازی‌زدایی<sup>۵</sup> مستقیم مدل‌های داده‌ای قطعی هستند، و یا بر گرفته از مدل‌های DEA بازه‌ای هستند. در نوع اول به این واقعیت توجه نمی‌شود که یک برنامه‌ریزی کسری فازی را نمی‌توان به روش سنتی که برای بررسی کسری قطعی عمل می‌شود، به یک مدل LP تبدیل کرد، مثلاً  $\sum_{i=1}^m v_i \bar{x}_{ij} = \bar{1}$  را نمی‌توان به صورت  $\sum_{r=1}^s u_r \bar{y}_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i \bar{x}_{ij}$  با تعیین  $\bar{1}$  ساده کرد، مگر آنکه فرض شود که  $\bar{1}$  یک عدد قطعی است؛ و روش دوم نیازمند حل یک رشته مدل‌های LP مبتنی بر مجموعه‌های سطح  $\alpha$  مختلف است. لذا برای به دست آوردن کارایی‌های فازی DMUها، تلاش محاسباتی زیادی مورد نیاز است. اخیراً، وانگ، لوئو، و لیانگ مدل‌های DEA فازی را برای مواجهه با داده‌های ورودی و خروجی فازی بر اساس حساب فازی ارائه داده‌اند (Wang, Luo, & Liang, 2009). مدل‌های DEA فازی به صورت مدل‌های LP فرمول‌بندی شده‌اند و می‌توان آنها را برای تعیین کارایی فازی گروهی از DMUها مورد استفاده قرار داد. در همه‌ی این مقالات، کارایی نسبت به مرز تولید کاراً اندازه‌گیری می‌شود. هدف از این مقاله، بسط رویکرد تحلیل بدترین کارایی نسبی در ادامه‌ی مقاله‌ی عزیززی و گنجه‌اجیرلو برای داده‌های فازی است (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011). ما در این مقاله دو مدل DEA فازی جدید را پیشنهاد می‌کنیم، که از نظرگاه حساب فازی ساخته شده‌اند. مدل‌های DEA فازی جدید به صورت مدل‌های LP بدون نیاز به هر گونه فرضیات و تلاش محاسباتی زیاد فرمول‌بندی شده‌اند. رویکرد پیشنهادی فرمول ساده‌ای را برای تعیین مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر DMU ارائه می‌کند. یک مثال عددی برای توضیح کاربردهای روش پیشنهادی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

<sup>5</sup> Defuzzification

## ۲- مواد و روش‌ها

در این قسمت مدل DEA برای اندازه‌گیری بدترین کارایی نسبی DMU معرفی شده است. تعداد  $n$  واحد را در نظر بگیرید که هر کدام از  $m$  ورودی برای تولید  $s$  خروجی استفاده می‌کنند. اینها را با نماد  $(X_j, Y_j)$  ( $j=1, \dots, n$ ) نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم که  $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq \bar{0}$  و  $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj}) \geq \bar{0}$  و  $Y_j \neq \bar{0}$  ( $j=1, \dots, n$ ). بدترین کارایی نسبی یا کارایی بدبینانه‌ی هر  $DMU_o$  در نمونه نسبت به مجموعه‌ای که اصطلاحاً مجموعه‌ی امکان تولید ناکاراً نامیده می‌شود، اندازه‌گیری می‌شود یعنی  $\hat{T} = \{(X, Y) \mid X \mid (X, Y)\}$  می‌تواند  $Y$  را تولید کند، که این مجموعه به طور تجربی از مشاهدات با در نظر گرفتن چند فرض ساخته می‌شود (Parkan & Wang, 2000). خصوصاً اگر از فناوری کلاسیک بازده به مقیاس ثابت استفاده شود، آنگاه مجموعه‌ی امکان تولید ناکاراً به صورت زیر تعریف می‌شود (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011; Liu & Chen, 2009):

$$\hat{T} = \left\{ (X, Y) \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \geq X, \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \leq Y, \lambda_j \geq 0, j=1, \dots, n \right\} \quad (1)$$

سنجش کارایی هر  $DMU_o$  عموماً در نتیجه‌ی مقایسه‌ی آن با یک نقطه‌ی تصویر غالب روی مرز مجموعه‌ی امکان تولید ناکاراً به دست می‌آید. یک مدل DEA بدبینانه با ماهیت ورودی که بازده به مقیاس ثابت داشته باشد، به صورت زیر قابل بیان است (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011; Liu & Chen, 2009; Parkan & Wang, 2000):

$$\begin{aligned} \min \quad \theta_o &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \\ \text{s.t.} \quad \theta_j &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r=1, \dots, s, \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

با اعمال تبدیل چارنز و کوپر، مدل (۲) را می‌توان به مسأله‌ی LP زیر تبدیل کرد (Charnes & Cooper, 1962):

$$\begin{aligned} \min \quad \theta_o &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{io} &= 1, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r=1, \dots, s, \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (3)$$

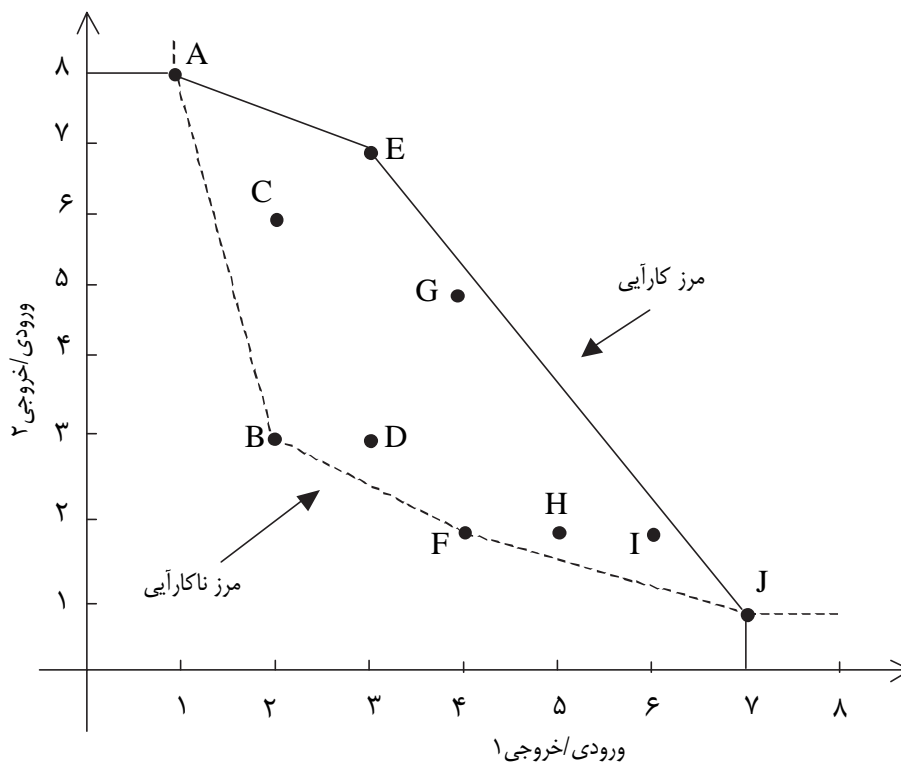
در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود  $\theta_o^* = 1$  باشد، آنگاه گفته می‌شود که  $DMU_o$  ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه یا غیرناکارای DEA است. تمام واحدهای ناکارای بدبینانه یک مرز تولید ناکاراً را تعیین می‌کنند. مدل‌های DEA بدبینانه‌ی (۲) و (۳) در جستجوی مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر  $DMU$  هستند.

برای نشان دادن تفاوت بین مرز کارایی (مرز بهترین عملکرد) و مرز ناکارایی (مرز بدترین عملکرد)، از مثالی با داده‌های یک ورودی و دو خروجی که در جدول (۱) نشان داده شده است، استفاده می‌کنیم. همه‌ی ورودی‌ها برای سادگی به ۱ نرمال‌سازی شده‌اند. مرزهای کارایی و ناکارایی این مثال در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. به طوری که این شکل نشان می‌دهد، ۳ تا از  $DMU$  روی مرز کارایی (خط ممتد) هستند که ما آنها را کارای DEA یا کارای خوشبینانه می‌نامیم و مابقی  $DMU$  را نسبت به مرز کارایی، غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه می‌نامیم. همچنین، ۴ مورد از  $DMU$ ‌ها روی مرز ناکارایی (خط مقطع) واقع شده‌اند که ما آنها را ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه می‌نامیم و مابقی  $DMU$  را نسبت به مرز ناکارایی، غیرناکارای

DEA یا غیرناکارایی بدبینانه می‌نامیم. که در اینجا واحدهای کارایی DEA و ناکارایی DEA همپوشانی یعنی واحدهای مشترک نیز دارند.

جدول شماره‌ی (۱): داده‌ها برای ده DMU با یک ورودی و دو خروجی.

DMU	ورودی	خروجی ۱	خروجی ۲
A	۱	۱	۸
B	۱	۲	۳
C	۱	۲	۶
D	۱	۳	۳
E	۱	۳	۷
F	۱	۴	۲
G	۱	۴	۵
H	۱	۵	۲
I	۱	۶	۲
J	۱	۷	۱



شکل شماره‌ی (۱): مرزهای کارایی و ناکارایی برای ده DMU.

در این قسمت مدل‌های DEA فازی مبتنی بر حساب فازی ارائه می‌گردد. یک عدد فازی یک مجموعه‌ی فازی محدب است که با بازه‌ی معینی از اعداد حقیقی مشخص می‌شود که هر کدام درجه‌ی عضویتی بین صفر و یک دارند. شایع‌ترین اعداد فازی استفاده شده اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای هستند که توابع عضویت آنها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & a \leq x \leq b \\ (d-x)/(d-b) & b \leq x \leq d \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ (d-x)/(d-c) & c \leq x \leq d \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases} \quad (۵)$$

برای اختصار، اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای را غالباً به صورت  $(a, b, d)$  و  $(a, b, c, d)$  نشان می‌دهند. فرض کنید  $\tilde{A} = (a_L, a_M, a_U)$  و  $\tilde{B} = (b_L, b_M, b_U)$  دو عدد فازی مثلثی مثبت باشند. عمل‌های حساب فازی اساسی روی این اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_L + b_L, a_M + b_M, a_U + b_U) \quad \text{جمع:}$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a_L - b_U, a_M - b_M, a_U - b_L) \quad \text{تفریق:}$$

$$\tilde{A} \times \tilde{B} \approx (a_L b_L, a_M b_M, a_U b_U) \quad \text{ضرب:}$$

$$\tilde{A} / \tilde{B} \approx \left( \frac{a_L}{b_U}, \frac{a_M}{b_M}, \frac{a_U}{b_L} \right) \quad \text{تقسیم:}$$

فرض کنید  $x_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ) و  $y_{rj}$  ( $r=1, \dots, s$ )، داده‌های ورودی و خروجی  $DMU_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) باشند. بدون از دست رفتن عمومیت موضوع، فرض می‌شود که همه‌ی داده‌های ورودی و خروجی  $x_{ij}$  و  $y_{rj}$  نامعین هستند و با اعداد فازی مثلثی  $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U)$  و  $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U)$  مشخص می‌شوند، که در اینجا داریم  $x_{ij}^L > 0$  و  $y_{rj}^L > 0$  برای  $j=1, \dots, n$ ،  $r=1, \dots, s$ ،  $i=1, \dots, m$ . داده‌های ورودی و خروجی قطعی را می‌توان حالت خاصی از داده‌های ورودی و خروجی فازی  $\tilde{x}_{ij}$  و  $\tilde{y}_{rj}$  با  $x_{ij}^L = x_{ij}^M = x_{ij}^U$  و  $y_{rj}^L = y_{rj}^M = y_{rj}^U$  دانست. کارایی  $DMU_j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\theta}_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}} \quad (۶)$$

که یک عدد فازی است که به آن کارایی فازی می‌گوییم، و در اینجا  $u_r$  ( $r=1, \dots, s$ ) و  $v_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) به ترتیب وزن‌های اختصاص داده شده به خروجی‌ها و ورودی‌ها هستند. بر اساس حساب فازی، کارایی فازی تعریف شده در معادله‌ی (۶) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{\theta}_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r [y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U]}{\sum_{i=1}^m v_i [x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U]} = \frac{[\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U]}{[\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U]} \quad (۷)$$

$$\approx \left[ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right]$$

برای اندازه‌گیری کارایی فازی بدینانه‌ی  $DMU_j$  نسبت به  $DMU$  دیگر، می‌توانیم  $\tilde{\theta}_j \geq 1$  یا  $\tilde{\theta}_j \geq \tilde{1}$  برای همه‌ی  $j=1, \dots, n$  محدود کنیم. بر اساس این محدودیت‌ها، دو مدل DEA فازی زیر برای اندازه‌گیری بدترین عملکرد هر  $DMU$

ساخته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \min \quad \tilde{\theta}_o \approx [\theta_o^L, \theta_o^M, \theta_o^U] &= \left[ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \right] \\ \text{s.t.} \quad \tilde{\theta}_j \approx [\theta_j^L, \theta_j^M, \theta_j^U] &= \left[ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \quad (8) \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned}$$

و یا

$$\begin{aligned} \min \quad \tilde{\theta}_o \approx [\theta_o^L, \theta_o^M, \theta_o^U] &= \left[ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \right] \\ \text{s.t.} \quad \tilde{\theta}_j \approx [\theta_j^L, \theta_j^M, \theta_j^U] &= \left[ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \geq \tilde{1}, \quad j=1, \dots, n, \quad (9) \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned}$$

که در اینجا اندیس پایین "o" نشان دهنده‌ی DMU مورد ارزیابی است، یعنی  $DMU_o$ . برای مدل (۸)، مادام که مقدار  $\theta_j^L$  بیشتر یا مساوی ۱ نگه داشته شود، و  $\theta_j^U \geq 1$  و  $\theta_j^M \geq 1$  به طور خودکار تأمین خواهد شد. لذا مدل را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad \tilde{\theta}_o \approx [\theta_o^L, \theta_o^M, \theta_o^U] &= \left[ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \right] \\ \text{s.t.} \quad \theta_j^L &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \quad (10) \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned}$$

کمترین مقادیر ممکن  $\theta_o^L$ ،  $\theta_o^M$  و  $\theta_o^U$  را می‌توان از سه مدل برنامه‌ریزی کسری زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \min \quad \theta_o^L &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U} \\ \text{s.t.} \quad \theta_j^L &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \quad (11) \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad \theta_o^M &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M} \\ \text{s.t.} \quad \theta_j^L &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \quad (12) \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^U = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j^L = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (13)$$

که می‌توان آنها را برای حل تبدیل به سه مدل LP زیر کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^M = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^U = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (16)$$

مقادیر بهینه‌ی تابع هدف سه مدل LP فوق، بدترین کارایی فازی  $DMU_o$  را تشکیل می‌دهند. یعنی  $\tilde{\theta}_o^* \approx (\theta_o^{L*}, \theta_o^{M*}, \theta_o^{U*})$  که می‌توان آن را تقریباً به صورت یک عدد فازی مثلثی دید.

در رابطه با مدل (۹)، از آنجا که هیچگونه محدودیتی به طور ذهنی به نفع عدد فازی  $\tilde{\theta}$  وجود ندارد، لذا کران‌های پایین و بالای آن به عنوان آزاد محسوب می‌شوند. بر اساس این دیدگاه، مدل (۹) را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{\theta}_o \approx [\theta_o^L, \theta_o^M, \theta_o^U] = \left[ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \right] \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j^M = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (17)$$

از مدل‌های برنامه‌ریزی کسری زیر به ترتیب برای به دست آوردن کمترین مقادیر ممکن  $\theta_o^L, \theta_o^M, \theta_o^U$  استفاده می‌شود:



$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^L = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j^M = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^M = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j^M = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^U = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j^M = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (20)$$

که می‌توان آنها را برای حل تبدیل به مدل‌های LP معادل کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (21)$$

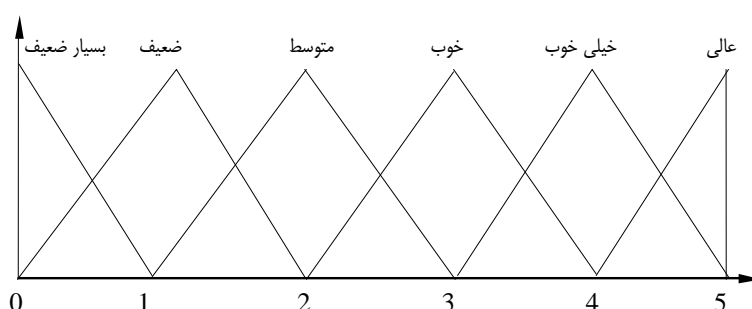
$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^M = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^U = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s \end{aligned} \quad (23)$$

با حل مدل‌های (۱۴)–(۱۶) یا (۲۱)–(۲۳) برای هر DMU، می‌توانیم کارایی‌های فازی بدینانه را برای  $n$  DMU به دست آوریم، که بر اساس آن می‌توان DMUها را مقایسه کرد.

در ادامه، یک مثال عددی را با استفاده از مدل‌های DEA فازی پیشنهادی بررسی می‌کنیم تا کاربردپذیری و کارآمدی آن را نشان دهیم. تمام مدل‌ها روی یک کامپیوتر شخصی با استفاده از برنامه‌ی حل کننده‌ی LP به نام GAMS اجرا شدند.

**مثال ۱:** یک مسأله‌ی ارزیابی عملکرد را در چین در نظر بگیرید که در آن هشت شرکت تولیدی (DMU) باید از نظر دو ورودی و دو خروجی ارزیابی شوند. مجموعه داده‌های این تحلیل از مقاله‌ی وانگ و همکاران گرفته شده‌اند (Wang et al., 2009). این هشت شرکت تولیدی همگی نوع محصول یکسانی ولی با کیفیت‌های متفاوت را تولید می‌کنند. هم ارزش خروجی ناخالص<sup>۶</sup> و هم کیفیت محصول<sup>۷</sup> به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شوند. هزینه‌ی تولید<sup>۸</sup> و تعداد کارکنان<sup>۹</sup> به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند. داده‌ها درباره‌ی ارزش خروجی ناخالص و هزینه‌ی تولید به علت موجود نبودن در زمان سنجش، نامعین هستند و بنابراین، به عنوان اعداد فازی ارزیابی می‌شوند. کیفیت محصول توسط مشتریان با استفاده از اصطلاحات زبان‌شناختی فازی مانند عالی، خیلی خوب، خوب، متوسط، ضعیف، و خیلی ضعیف سنجیده می‌شود، که توابع عضویت اینها در شکل ۲ نشان داده شده است. نتایج ارزیابی مشتریان، وزن‌دهی و متوسط‌گیری می‌شود. جدول (۲) داده‌های ورودی و خروجی را برای هشت شرکت تولیدی نشان می‌دهد.



شکل شماره ۲: مجموعه‌های فازی برای سنجش کیفیت محصول.

جدول شماره ۲: داده‌های ورودی و خروجی برای هشت شرکت تولیدی.

شرکت‌ها (DMU)	ورودی‌ها		خروجی‌ها	
	هزینه‌ی تولید	تعداد کارکنان	ارزش خروجی ناخالص	کیفیت محصول
A	(۲۱۲۰، ۲۱۷۰، ۲۲۱۰)	۱۸۷۰	(۱۴۵۰۰، ۱۴۷۹۰، ۱۴۸۶۰)	(۳/۱، ۴/۱، ۴/۹)
B	(۱۴۲۰، ۱۴۶۰، ۱۵۰۰)	۱۳۴۰	(۱۲۴۷۰، ۱۲۷۲۰، ۱۲۷۹۰)	(۱/۲، ۲/۱، ۳)
C	(۲۵۱۰، ۲۵۷۰، ۲۶۱۰)	۲۳۶۰	(۱۷۹۰۰، ۱۸۲۶۰، ۱۸۴۰۰)	(۳/۳، ۴/۳، ۵)
D	(۲۳۰۰، ۲۳۵۰، ۲۴۰۰)	۲۰۲۰	(۱۴۹۷۰، ۱۵۲۷۰، ۱۵۴۰۰)	(۲/۷، ۳/۷، ۴/۶)
E	(۱۴۸۰، ۱۵۲۰، ۱۵۶۰)	۱۵۵۰	(۱۳۹۸۰، ۱۴۲۶۰، ۱۴۳۳۰)	(۱، ۱/۸، ۲/۷)
F	(۱۹۹۰، ۲۰۳۰، ۲۱۰۰)	۱۷۶۰	(۱۴۰۳۰، ۱۴۳۱۰، ۱۴۴۰۰)	(۱/۶، ۲/۶، ۳/۶)
G	(۲۲۰۰، ۲۲۶۰، ۲۳۰۰)	۱۹۸۰	(۱۶۵۴۰، ۱۶۸۷۰، ۱۷۰۰۰)	(۲/۴، ۳/۴، ۴/۴)
H	(۲۴۰۰، ۲۴۶۰، ۲۵۲۰)	۲۲۵۰	(۱۷۶۰۰، ۱۷۹۶۰، ۱۸۱۰۰)	(۲/۶، ۳/۶، ۴/۶)

با حل مدل‌های (۱۴)–(۱۶) و (۲۱)–(۲۳)، به ترتیب، برای هر یک از شرکت‌های تولیدی، مطابق جدول (۳)، دو کارایی فازی برای هر شرکت تولیدی به دست می‌آید. از بخش راست جدول (۳) مشاهده می‌شود که شرکت‌های تولیدی  $D$ ،  $E$ ، و  $F$  بر روی هم یک مرز تولید ناکارا را تعریف می‌کنند و شرکت  $D$  بدترین عملکرد را دارد. با این حال، کارایی‌های فازی در طرف چپ جدول (۳) چندان واضح نیستند و نمی‌توان آنها را به آسانی از یکدیگر تشخیص داد. ما فکر می‌کنیم که این طبیعی است، زیرا هیچ تضمینی وجود ندارد که مدل‌های مختلف بتوانند دقیقاً رتبه‌بندی یکسانی ایجاد کنند. تنها راه برای کاهش چنین

<sup>6</sup> Gross output value

<sup>7</sup> Product quality

<sup>8</sup> Manufacturing cost

<sup>9</sup> Number of employees

ناسازگاری، کاهش فازی بودن داده‌های ورودی و خروجی است.

جدول شماره‌ی (۳): بدترین کارایی‌های نسبی فازی هشت شرکت تولیدی.

شرکت‌ها (DMU)	مدل‌های (۱۴)–(۱۶)			مدل‌های (۲۱)–(۲۳)		
	کران پایین	مقدار وسط	کران بالا	کران پایین	مقدار وسط	کران بالا
A	۱/۰۴۶۳	۱/۰۶۷۲	۱/۰۷۲۳	۰/۹۷۲۶	۱/۰۴۶۳	۱/۰۵۱۲
B	۱/۱۱۰۶	۱/۲۶۰۲	۱/۲۸۷۹	۰/۶۷۵۶	۱/۱۲۶۹	۱/۲۵۱۳
C	۱/۰۲۳۵	۱/۰۴۴۰	۱/۰۵۲۰	۰/۹۳۶۰	۱/۰۱۵۴	۱/۰۳۱۴
D	۱/۰۰۰۰	۱/۰۲۰۰	۱/۰۲۸۷	۰/۸۷۹۶	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۸۵
E	۱/۰۰۰۰	۱/۱۷۰۱	۱/۲۴۷۵	۰/۵۴۱۳	۱/۰۰۰۰	۱/۱۴۶۶
F	۱/۰۰۰۰	۱/۰۹۷۱	۱/۱۰۴۰	۰/۶۴۳۴	۱/۰۰۰۰	۱/۰۸۲۳
G	۱/۰۸۵۰	۱/۱۴۹۷	۱/۱۵۸۵	۰/۸۵۲۸	۱/۰۷۳۸	۱/۱۳۵۸
H	۱/۰۱۹۰	۱/۰۷۷۱	۱/۰۸۵۵	۰/۸۳۹۹	۱/۰۰۴۷	۱/۰۶۴۲

همچنین، مشاهده می‌شود که مدل‌های (۱۴)–(۱۶) کارایی فازی باریک‌تری نسبت به مدل‌های (۲۱)–(۲۳) ایجاد می‌کنند. به زبان دیگر، کارایی‌های فازی در طرف راست جدول (۳) فازی بودن کمتری نسبت به اعداد طرف چپ جدول (۳) دارند. این امر در جدول (۴) تأیید می‌شود که فازی بودن بر اساس طول بازه‌ی فازی اندازه‌گیری شده است.

جدول شماره‌ی (۴): فازی بودن در دو کارایی فازی متفاوت.

شرکت‌ها (DMU)	کارایی‌های فازی بر اساس مدل‌های (۱۴)–(۱۶)			کارایی‌های فازی بر اساس مدل‌های (۲۱)–(۲۳)		
	کران پایین	کران بالا	فازی بودن	کران پایین	کران بالا	فازی بودن
A	۱/۰۴۶۳	۱/۰۷۲۳	۰/۰۲۶۰	۰/۹۷۲۶	۱/۰۵۱۲	۰/۰۷۸۶
B	۱/۱۱۰۶	۱/۲۸۷۹	۰/۱۷۷۳	۰/۶۷۵۶	۱/۲۵۱۳	۰/۵۷۵۷
C	۱/۰۲۳۵	۱/۰۵۲۰	۰/۰۲۸۵	۰/۹۳۶۰	۱/۰۳۱۴	۰/۰۹۵۴
D	۱/۰۰۰۰	۱/۰۲۸۷	۰/۰۲۸۷	۰/۸۷۹۶	۱/۰۰۸۵	۰/۱۲۸۹
E	۱/۰۰۰۰	۱/۲۴۷۵	۰/۲۴۷۵	۰/۵۴۱۳	۱/۱۴۶۶	۰/۶۰۵۳
F	۱/۰۰۰۰	۱/۱۰۴۰	۰/۱۰۴۰	۰/۶۴۳۴	۱/۰۸۲۳	۰/۴۳۸۹
G	۱/۰۸۵۰	۱/۱۵۸۵	۰/۰۷۳۵	۰/۸۵۲۸	۱/۱۳۵۸	۰/۲۸۳۰
H	۱/۰۱۹۰	۱/۰۸۵۵	۰/۰۶۶۵	۰/۸۳۹۹	۱/۰۶۴۲	۰/۲۲۴۳

### ۳- نتایج و بحث

با توجه به این واقعیت که داده‌های ورودی و خروجی دقیق همیشه در کاربردهای دنیای واقعی در دسترس نیستند، لذا ما در این مقاله دو مدل DEA فازی از دیدگاه حساب فازی برای مواردی که داده‌های ورودی و خروجی فازی هستند، ایجاد کرده‌ایم. این دو مدل DEA فازی برای سهولت حل و پیاده‌سازی به معادل‌های LP خود تبدیل شدند. رویکرد DEA فازی پیشنهادی، کارایی هر DMU را نسبت به مرز ناکارایی اندازه‌گیری می‌کند و کارایی به دست آمده، کارایی فازی بدبینانه یا بدترین کارایی فازی نامیده می‌شود. زوج مدل DEA فازی پیشنهادی می‌تواند بدترین DMU را به آسانی و به درستی شناسایی کند. مدل‌های DEA فازی برای ارزیابی عملکرد شرکت‌های تولیدی در چین استفاده شدند. نشان داده شد که دو مدل DEA فازی هر دو برای داده‌های ورودی و خروجی فازی قابل استفاده هستند، ولی کارایی‌های فازی متفاوتی ایجاد می‌کنند که یکی از آنها فازی بودن کمتری نسبت به دیگری دارد. تفاوت دیگر بین مدل‌های DEA فازی را می‌توان در تحقیقات آینده بررسی کرد. ایده‌ی استفاده از DEA بدترین عملکرد اختصاصاً برای شناسایی واحدهای دارای بدترین عملکرد مسلماً برای ارزیابی اعتبار سودمند است، ولی کاربرد عمومی‌تری نیز دارد. این ایده گزینه‌ی بسیار مناسبی برای قاعده‌ی ۸۰/۲۰ پارتو (Pareto) است، به

این شرح که اگر بتوانید ۲۰٪ پایین مجموعه‌ای از DMU را شناسایی و اصلاح کنید، معمولاً ۸۰٪ جواب را به دست خواهید آورد. در یک تحلیل استاندارد بهره‌وری، استفاده از ترکیبی از مدل‌های DEA بهترین عملکرد و بدترین عملکرد به معنای آن است که هم واحدهایی را که عملکرد خوب دارند و باید پاداش داده شوند، شناسایی کنیم، و هم بدترین واحدها را شناسایی کنیم که از این طریق، می‌توان به بیشترین میزان صرفه‌جویی دست یافت.

## سیاسگزاری

تحقیق گزارش شده در این مقاله با کمک مالی شورای بودجه‌های پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد گرمی انجام شده است.

## ۴- منابع

- 1- Azizi, H., & Ganjeh Ajirlu, H. (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. *Applied Mathematical Modelling*, 35(9), 4149–4156.
- 2- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis. *Management Science*, 30, 1078–1092.
- 3- Charnes, A. & Cooper, W. W. (1962). Programming with fractional function. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 181–185.
- 4- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429–444.
- 5- Dia, M. (2004). A model of fuzzy data envelopment analysis. *INFOR*, 42, 267–279.
- 6- Entani, T., Maeda, Y., & Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136, 32–45.
- 7- Garcia, P. A. A., Schirru, R., & Melo, P. F. F. E. (2005). A fuzzy data envelopment analysis approach for FMEA. *Progress in Nuclear Energy*, 46, 359–373.
- 8- Guo, P., & Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: A perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*, 119, 149–160.
- 9- Jahanshahloo, G. R., Soleimani-damaneh, M., & Nasrabadi, E. (2004). Measure of efficiency in DEA with fuzzy input-output levels: A methodology for assessing, ranking and imposing of weights restrictions. *Applied Mathematics and Computation*, 156, 175–187.
- 10- Kao, C., & Liu, S. T. (2000a). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 113, 427–437.
- 11- Kao, C., & Liu, S. T. (2000b). Data envelopment analysis with missing data: An application to University libraries in Taiwan. *Journal of the Operational Research Society*, 51, 897–905.
- 12- Kao, C., & Liu, S. T. (2003). A mathematical programming approach to fuzzy efficiency ranking. *International Journal of Production Economics*, 86, 45–154.
- 13- Kao, C., & Liu, S. T. (2005). Data envelopment analysis with imprecise data: An application of Taiwan machinery .rms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 13(2), 225–240.
- 14- León, T., Liern, V., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2003). A fuzzy mathematical programming approach to the assessment of efficiency with DEA models. *Fuzzy Sets and Systems*, 139, 407–419.
- 15- Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Joines, J. A., & Nuttle, H. L. W. (2003a). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): A possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 139, 379–394.

- 16- Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Joines, J. A., & Nuttle, H. L. W. (2003b). Fuzzy data envelopment analysis: A credibility approach. In J. L. Verdegay (Ed.), *Fuzzy sets based heuristics for optimization* (pp. 141–158). Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag.
- 17- Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Nuttle, H. L. W., & Joines, J. A. (2003). Fuzzy BCC model for data envelopment analysis. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2(4), 337–358.
- 18- Liu, F. F. & Chen, C. L. (2009). The worst-practice DEA model with slack-based measurement. *Computers & Industrial Engineering*, 57, 496–505.
- 19- Liu, S. T. (2008). A fuzzy DEA/AR approach to the selection of flexible manufacturing systems. *Computers and Industrial Engineering*, 54(1), 66–76.
- 20- Liu, S. T., Chuang, M. (2009). Fuzzy efficiency measures in fuzzy DEA/AR with application to university libraries. *Expert Systems with Applications*, 36(2), 1105–1113.
- 21- Parkan, C., & Wang, Y. M. (2000). Worst Efficiency Analysis Based on Inefficient Production Frontier. Working Paper, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong.
- 22- Saati, S., & Memariani, A. (2005). Reducing weight flexibility in fuzzy DEA. *Applied Mathematics and Computation*, 161, 611–622.
- 23- Saati, S., Memariani, A., & Jahanshahloo, G. R. (2002). Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1, 255–267.
- 24- Sengupta, J. K. (1992). A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Computers and Mathematics with Applications*, 24, 259–266.
- 25- Soleimani-damaneh, M., Jahanshahloo, G. R., & Abbasbandy, S. (2006). Computational and theoretical pitfalls in some current performance measurement techniques and a new approach. *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), 1199–1207.
- 26- Triantis, K. (2003). Fuzzy non-radial data envelopment analysis (DEA) measures of technical efficiency in support of an integrated performance measurement system. *International Journal of Automotive Technology and Management*, 3, 328–353.
- 27- Triantis, K., & Girod, O. (1998). A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment. *Journal of Productivity Analysis*, 10, 85–102.
- 28- Wang, Y. M., Greatbanks, R., & Yang, J. B. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 153(3), 347–370.
- 29- Wang, Y. M., Luo, Y., & Liang, L. (2009). Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises. *Expert Systems with Applications*, 36, 5205–5211.
- 30- Wu, D., Yang, Z., & Liang, L. (2006). Efficiency analysis of cross-region bank branches using fuzzy data envelopment analysis. *Applied Mathematics and Computation*, 181(1), 271–281.

