فصلنامه سیستم‌های پردازشی و ارتباطی چندرسانه‌ای هوشمند

Intelligent Multimedia Processing and Communication Systems (IMPCS)

انجمن علمی تجارت الکترونیکی ایران

واحد زنجان

Spring 2023, 4 (1), 11-16
DOR:

Received: 25 Feb 2023
Accepted: 9 May 2023

مقاله پژوهشی

Hermite-Hadamard (HH) Integral Inequality for M, Q Pre-invex Function

Mehdi Asadi

Associate Professor, Department of Mathematics, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran
Masadi.azu@gmail.com; me.asadi@iau.ac.ir

Abstract: In recent years, convexity theory has experienced rapid development. Many researchers have expanded it. A notable generalization of the convex function is the Inox function introduced and studied by Hanson. This has greatly expanded the role of inox in optimization. Ben and Mond introduced a class of functions called generalizations of pre-Inox functions. Regarding change inequalities and related problems in recent years, Pite and Postloche introduced the concept of pseudo pre-invex, and applied it in theoretical mechanics and nonlinear optimization. Later, Pite and Antchak introduced this concept of invex, and applied it to vector optimization. This shows that pre-invexity plays an important role in the development of various fields of pure and applied sciences. In this article, we first introduce the concept of m, q -pre-inox and then state and prove the Hermit-Hadamard theorem for it, and we will state that the previously obtained inequalities are a direct result of our main theorem. In this article, we first introduce the concept of m, q invex sets and m, q pre-invex functions. Then state and prove the Hermit-Hadamard theorem for it, and state that the previous inequalities are a direct result of our main theorem.

Introduction: Quantum calculus is known as the study of differential and integral calculus without restrictions. Euler (1783-1707) was the first to study quantum calculus. He introduced q in Newton's infinite series compositions. In the early 20th century, the study of quantum calculus was started by Jackson. In quantum computing, we obtain mathematical equivalents of q objects that can be recovered as $q \to 1$. Note that quantum calculus is a subset of time scale calculus. The time scale of calculus provides a unified framework for the study of dynamical equations in both discrete and continuous domains. That in quantum calculus, we deal with a specific time scale called the q time scale. Quantum calculus is a bridge between mathematics and physics. Due to the significant applications of quantum computing in mathematics and physics, this issue has been the focus of many researchers. As a result, quantum calculus has emerged as a fascinating field. In recent years, convexity theory has experienced rapid development. Many researchers have expanded it. A notable generalization of the convex function is the inex function, which was introduced and studied by Hanson [1]. This has greatly expanded the role of inox in optimization. Ben and Mond [2] introduced a class of functions called generalizations of pre-invex functions.This fundamental result of Hermit and Hadamard (HH) has obtained by many mathematicians, and as a result, this inequality has been extended by Noor in various ways using new ideas and obtained the Hermit-Hadamard inequality for pre-invex functions. Regarding variational inequalities and related problems in recent years, Pite and Postloche [3],[4] and [5] introduced the concept of pseudo pre-invex, and applied it in theoretical mechanics and nonlinear optimization. Later, Pite and Antchak [6] introduced this concept of inexity, and applied it in vector optimization. This shows that pre-invex plays an important role in the development of various fields of pure and applied sciences. For more details on the quantum calculus see references [7].

Method

No method applicable.

Results and Discussion: In This article, we improve the Hermite-Hadamard (HH) integral inequality for m, q - preinvex functions.

Assuming $m = 1$, Theorem 3.1 of the article [8], that is, relation (3) is obtained. Assuming $q \to 1$, the main theorem of the article [9] and $m = 1$ and $q \to 1$, Hermit Hadamard's main inequality is obtained.

Keywords: Hermite-Hadamard integral inequality, m-convex function, convex functions.

فصلنامه سیستم‌های پردازشی و ارتباطی چندرسانه‌ای هوشمند
Intelligent Multimedia Processing and Communication Systems (IMPCS)
انجمن علمی تجارت الکترونیکی ایران
واحد زنجان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۹
دورهٔ چهارم، بهار ۱۴۰۲
شمارهٔ اول، صص: ۱۱-۱۶

نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع m -پیش اینوکس

مهدی اسدی

دانشیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران.
masadi.azu@gmail.com; me.masadi@iau.ac.ir

چکیده: در سال‌های اخیر، نظریه تحدب توسعه سریعی را تجربه‌کرده‌است. بسیاری از محققان آن را گسترش‌داده‌اند. تعمیم قابل‌توجه تابع محدب، تابع اینوکس است که توسط هانسون معرفی و مطالعه‌شده‌است. این کار نقش اینوکسی را در بهینه‌سازی بسیار گسترش‌داده است. بن و موند دسته‌ای از توابع را معرفی‌کردند که به عنوان تعمیم توابع پیش اینوکس نامیده‌می‌شود. در خصوص نامساوی‌های تغییراتی و مشکلات مرتبط در سال‌های اخیر، پیته و پوستلوچه مفهوم شبه پیش‌اینوکسی را معرفی‌کردند. و آن را در مکانیک نظری و بهینه‌سازی غیرخطی به‌کاربردند. بعدها پیته و آنتچاک این مفهوم اینوکسی را معرفی، و آن را در بهینه‌سازی برداری اعمال‌کردند. این نشان‌می‌دهد که پیش اینوکسی نقش مهمی در توسعه رشته‌های مختلف علوم محض و کاربردی دارد. در این مقاله ابتدا مفهوم m, q -پیش اینوکس معرفی و سپس قضیه هرمیت - هادامارد را برای آن بیان و ثابت‌می‌کنیم و بیان‌خواهیم‌کرد که نامساوی‌های قبلی به‌دست‌آمده نتیجه مستقیمی از قضیه اصلی ما می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: نامساوی انتگرالی هرمیت - هادامارد، تابع m محدب، تابع محدب.

۱.مقدمه

حساب کوانتومی به‌عنوان مطالعه حساب دیفرانسیل و انتگرال بدون محدودیت شناخته‌شده‌است. اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، اولین کسی بود که مطالعه حساب کوانتومی را شروع‌کرد. او q را در تغییرات‌های سری نامتناهی نیوتن معرفی‌نمود. در اوایل قرن بیستم مطالعه حساب کوانتومی توسط جکسون شروع‌شد. در محاسبات کوانتومی، شباهت‌های ریاضی q را به‌دست‌می‌آوریم. اشیایی که می‌توان آن‌ها را به صورت $q \to 1$ بازیابی‌کرد. حساب کوانتومی زیرمجموعه حساب مقیاس زمانی است. زمان، مقیاس حساب یک چارچوب یکپارچه برای مطالعه معادلات دینامیکی در هر دو حوزه گسسته و پیوسته فراهم‌می‌کند. که در حساب کوانتومی، ما با یک مقیاس زمانی *خاص* سروکار داریم که به آن مقیاس زمانی q می‌گویند. حساب کوانتومی به منزلهٔ پلی بین ریاضی و فیزیک است. با توجه به کاربردهای قابل‌توجه حساب کوانتومی در ریاضیات و فیزیک، این موضوع مورد توجه ویژه بسیاری از پژوهشگران قرارگرفته‌است. در نتیجه، حساب کوانتومی به عنوان یک میدان جذاب، ظاهرشده‌است.

در سال‌های اخیر، نظریه تحدب توسعه سریعی را تجربه‌کرده‌است. بسیاری از محققان آن را گسترش‌داده‌اند. تعمیم قابل‌توجه تابع محدب، تابع اینوکس است که توسط هانسون [۱] معرفی و مطالعه شد. این کار نقش اینوکسی را در بهینه‌سازی بسیار گسترش‌داده‌است. بن و موند [۲] دسته‌ای از توابع را معرفی‌کردند که به عنوان تعمیم توابع پیش اینوکس نامیده‌می‌شود.

درخصوص نامساوی‌های تغییراتی و مشکلات مرتبط در سال‌های اخیر، پیته و پوستلوچه [۵]، [۳] و [۴] مفهوم شبه پیش اینوکسی را معرفی‌کردند. و آن را در مکانیک نظری و بهینه‌سازی غیرخطی به‌کاربردند. بعدها پیته و آنتچاک [۶] این مفهوم اینوکسی را معرفی، و آن را در بهینه‌سازی برداری اعمال‌کردند. این نشان‌می‌دهد که پیش اینوکسی نقش مهمی در توسعه رشته‌های مختلف علوم محض و کاربردی دارد. برای جزئیات بیشتر در مورد حساب کوانتومی منابع مقاله [۷] را ببینید.

۲ تعاریف و پیش نیازها

تعریف ۲,۱ مجموعه $S \subseteq R$ نسبت به نگاشت $\eta: S \times S \to R$ اینوکس گفته‌می‌شود هرگاه

$$\forall x, y \in S \wedge t \in [0,1] \Rightarrow y + t\eta(x,y) \in S.$$

واضح است که هر مجموعه محدب نسبت به نگاشت $\eta(x,y)=x-y$ اینوکس هست اما مجموعه اینوکسی وجوددارد که محدب نیست.

تعریف ۲,۲ فرض‌کنید $S \subseteq R$ مجموعه اینوکس نسبت به نگاشت $\eta: S \times S \to R$ باشد در این صورت تابع $f: S \to R$ پیش اینوکسی نسبت به η گفته‌می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in S$ و $t \in [0,1]$ داشته‌باشیم

$$f(y + t\eta(x,y)) \le tf(x) + (1-t)f(y). \qquad (1)$$

هر تابع محدب نسبت به نگاشت $\eta(x,y) = x - y$ پیش اینوکس است اما برعکس آن صحیح نیست.

نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع پیش اینوکس توسط نور [۷] معرفی‌شده‌است.

$$f\left(a + \frac{1}{2}\eta(b,a)\right) \le \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(t)\, dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (2)$$

مجموعه اینوکس S شامل قطعه خط بین زوج نقاط x و $x+\eta(y,x)$ برای هر x و y از S چرا که

$$x + t\eta(y,x) = (1-t)x + t(x + \eta(y,x)).$$

مثال ۲,۳ [۷] مجموعه $S = (-\infty, a] \cup [a, \infty)$ وقتی‌که $a \ge 0,$ نسبت به نگاشت $\eta(y,x) = x$ اینوکس می‌باشد چرا که شامل ترکیبات خطی زیر است

$$x + t\eta(y,x) = (1+t)x, \quad \forall x, y \in S \wedge t \in [0,1].$$

مثال ۲,۴ [۷] تابع $f(x) = -|x|$ روی مجموعه $D = R$ نسبت به نگاشت زیر پیش اینوکس می‌باشد:

$$\eta(y,x) = \begin{cases} y - x, & xy \ge 0; \\ x - y, & xy > 0. \end{cases}$$

فرض کنید $I = [a,b] \subset R$ و $0 < q < 1$ باشد q- مشتق تابع $f: I \to R$ در نقطه $x \in I$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲,۵ q- مشتق تابع پیوسته $f: I \to R$ در نقطه $x \in I$ برای $x \ne a$ به‌صورت زیر تعریف‌می‌شود :

$${}_aD_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx + (1-q)a)}{(1-q)(x-a)}$$

و اگر $a = 0$ باشد در این‌صورت ${}_aD_q f(x) = D_q f(x)$ و q مشتق f عبارت خواهدبود از

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

تبصره ۲,۶

$$ {}_aD_q c = \frac{c-c}{(1-q)(x-a)} = 0 $$

$$ {}_aD_q(cf(x)+g(x)) = c\,{}_aD_q f(x) + {}_aD_q g(x) $$

مثال ۲،۷

$$ {}_aD_q x^2 = \frac{x^2-(qx+(1-q)a)^2}{(1-q)(x-a)} = (1+q)x+(1-q)a $$

و برای $x=a$

$$ \lim_{q\to 1} {}_aD_q x^2 = 2a. $$

مثال ۲،۸ *برای* $s \in R$

$$ {}_aD_q (x-a)^s = \frac{1-q^s}{1-q}(x-a)^{s-1} $$

تعریف ۲،۹ q- انتگرال تابع پیوسته $f: I \to R$ در روی I به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ \int_a^x f(x)_a d_q x = (1-q)(x-a)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1-q^n)a). $$

و اگر $a=0$ باشد در این‌صورت

$$ \int_0^x f(x)_0 d_q x = (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x). $$

برای $c \in (a,x)$ ، q -انتگرال به فرم زیر خواهدبود

$$ \int_c^x f(x)_a d_q x = \int_a^x f(x)_a d_q x - \int_a^c f(x)_a d_q x $$

تبصره ۲،۱۰ خواص مقدماتیq -انتگرال نیز شبیه حالت معمولی به‌صورت زیر است:

1. ${}_aD_q \int_a^x f(x)_a d_q x = f(x)$
2. $\int_c^x {}_{q_a}D_q f(t)_a d_q t = f(x) - f(c)$
3. $\int_a^x (kf(x)+g(x))_a d_q x = k\int_a^x f(x)_a d_q x + \int_a^x g(x)_a d_q x$

مثال ۲،۱۱ *برای* $s \in R$

$$ \int_a^x (t-a)_a^s d_q x = \frac{1-q}{1-q^{s+1}}(x-a)^{s+1} $$

$$ \int_0^1 t_a d_q x = \frac{1-q}{1-q^2} = \frac{1}{1+q} $$

$$ \int_0^1 (1-t)_a d_q x = \frac{q}{1+q} $$

نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع پیش اینوکس q-انتگرال‌پذیر توسط نور و همکارانش در [7] برای $\eta(b,a) \geq 0$ معرفی‌شده‌است.

$$ f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right) \le \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(t)_a\, d_q t \le \frac{qf(a)+f(b)}{2}. \tag{3} $$

تعریف ۲،۱۲ فرض‌کنید $m \in [0,1]$ باشد. تابع حقیقی f روی مجموعه C از R را محدب می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in C$ و $t \in [0,1]$ داشته‌باشیم

$$ f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y) $$

و

m -محدب می‌گوییم هرگاه برای هر

$x, y \in C$ و $t, m \in [0,1]$

داشته‌باشیم

$$ f(tx+m(1-t)y) \le tf(x)+m(1-t)f(y). $$

۳ نتایج اصلی

در این بخش ابتدا مفهوم m, q -پیش اینوکس معرفی و سپس قضیه هرمیت - هادامارد رو برای آن بیان و ثابت‌می‌کنیم و بیان‌می‌کنیم که نامساوی‌های قبلی نتیجه مستقیمی از قضیه اصلی ما می‌باشد.

تعریف ۳،۱ فرض‌کنید $m \in [0,1]$ باشد. تابع حقیقی f روی مجموعه اینوکس C از R را m, q -پیش اینوکس می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in C$ و $t, m \in [0,1]$ داشته‌باشیم

$$ f(mx+t\eta_m(y,x)) \le tf(y)+m(1-t)f(x) $$

وقتی که $\eta_m(y,x)=x-my$ تبدیل به m محدب می‌شود و وقتی که $m=1$ باشد تبدیل به محدب با نگاشت

$$\eta_m(y,x)=\eta_1(y,x)=\eta(y,x)=x-y$$

خواهدشد.

قضیه ۳,۲ *فرض‌کنید* $m\in[0,1]$ و $C\subseteq R$ *و تابع* $f: C\subset R\to R$ *یک تابع* m,q-*پیش اینوکس روی بازه* C و $a,b\in C$ *آن‌گاه*

$$f\left(ma+\frac{1}{2}\eta_m(b,a)\right)\le\frac{1}{\eta_m(b,a)}\int_{ma}^{ma+\eta_m(b,a)}f(t)_a\,d_qt\le\left(\frac{f(b)+qmf(a)}{\mathrm{q}+1}\right). \tag{4}$$

اثبات:

$$f\left(ma+\frac{1}{2}\eta_m(b,a)\right)\le\frac{1}{2}\begin{pmatrix}f(ma+t\eta_m(b,a))\\+\\f(ma+(1-t)\eta_m(b,a))\end{pmatrix}$$

آن‌گاه با انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_0^1 f\left(ma+\frac{1}{2}\eta_m(b,a)\right)_a d_qt\le\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\int_0^1 f(ma+t\eta_m(b,a))_a d_qt\\+\\\int_0^1 f(ma+(1-t)\eta_m(b,a))_a d_qt\end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$f\left(ma+\frac{1}{2}\eta_m(b,a)\right)\le\frac{1}{2\eta_m(b,a)}\int_{ma}^{ma+\eta_m(b,a)}f(u)_a d_qu-\frac{1}{2\eta_m(b,a)}\int_{ma+\eta_m(b,a)}^{ma}f(u)_a d_qu=\frac{1}{\eta_m(b,a)}\int_{ma}^{ma+\eta_m(b,a)}f(t)_a\,d_qt$$

برای طرف دیگر با توجه به

$$f\big(ma+t\eta_m(b,a)\big)\le tf(b)+m(1-t)f(a)$$

داریم:

$$\int_0^1 f(ma+t\eta_m(b,a))_a d_qt\le\int_0^1\big(tf(b)+m(1-t)f(a)\big)_a d_at=\left(\frac{f(b)}{q+1}+\frac{mf(a)q}{q+1}\right)$$

تعریف ۲. ۳

$$[\boldsymbol{n}]_{\boldsymbol{q}}=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{q^n-1}}{\boldsymbol{q-1}} & \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}\\ \dfrac{\boldsymbol{q^n-1}}{\boldsymbol{q-1}} & \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{R}\end{cases}$$

مثال۳,۳ برای برای $s+1$ غیر صفر داریم:

$$\int_a^x(t-a)_a^s d_qx=\frac{(x-a)^{s+1}}{[s+1]_q}$$

نتیجه ۳,۴ با مفروضات قضیه قبل داریم:

$$f\left(ma+\frac{1}{2}\eta_m(b,a)\right)\le\frac{1}{\eta_m(b,a)}\int_{ma}^{ma+\eta_m(b,a)}f(t)_a\,d_qt\le\left(\frac{f(b)+qmf(a)}{[2]_q}\right).$$

۴ . نتیجه

با فرض $m=1$ قضـــیه 3.1 مقاله [۸] یعنی رابطه (۳) به‌دســـت می‌آید. با فرض $q\to 1$ قضیه اصلی مقاله [۹] و $m=1$ و $q\to 1$ نامساوی اصلی هرمیت هادامارد حاصل‌می‌شود.

به‌عنوان کاربردی از این موارد می‌توان به قاعده ســـیمپســـون در تقریب اشاره‌کرد و نتیجه چون شبیه قضیه قبل اثبات‌می شود لذا برای دیدن نتایج مشابه به [۱۰] رجوع‌کنید.

References

[1] M. A. Hanson, “On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 80, no. 2, 1981, doi: 10.1016/0022-247X(81)90123-2.

[2] A. Ben-I. and B. Mond, “What is invexity?,” *J. Aust. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math.*, vol. 28, no. 1, 1986, doi: 10.1017/s0334270000005142.

[3] Pitea A. and Postolache M., "'Minimization of vector sofcurvilinear functional son these condorderjetbundle: sufficient efficiency conditions,'" *Optim. Lett,* vol. 8, no. 6, pp. 1657--1669, 2012.

[4] Pitea A. and Postolache M., "'Duality theorems for a newclass of multitime multiobjective variational problems,'" *J. Glob. Optim.*, vol. 54, no. 1, pp. 47--58, 2012.

[5] Pitea A. and Postolache M., "'Minimization of vector sofcurvilinear functional sonthe second or derjetbundle,'" *Optim. Lett.*, vol. 6, no. 3, pp. 459--470, 2012.

[6] A. Pitea and T. Antczak, "Proper efficiency and duality for a new class of nonconvex multitime multiobjective variational problems," *J. Inequalities Appl.*, vol. 2014, no. 1, 2014, doi: 10.1186/1029-242X-2014-333.

[7] M. B. Khan, H. M. Srivastava, P. O. Mohammed, J. E. Macías-Díaz, and Y. S. Hamed, "Some new versions of integral inequalities for log-preinvex fuzzy-interval-valued functions through fuzzy order relation," *Alexandria Eng. J.*, vol. 61, no. 9, 2022, doi: 10.1016/j.aej.2021.12.052.

[8] M. A. Noor, K. I. Noor, and M. U. Awan, "Some quantum integral inequalities via preinvex functions," *Appl. Math. Comput.*, vol. 269, 2015, doi: 10.1016/j.amc.2015.07.078.

[9] G. Amirbostaghi, M. Asadi, and M. R. Mardanbeigi, "m-Convex Structure on b-Metric Spaces," *Filomat*, vol. 35, no. 14, 2021, doi: 10.2298/FIL2114765A.

[10] M. A. Ali, M. Abbas, H. Budak, P. Agarwal, G. Murtaza, and Y. M. Chu, "New quantum boundaries for quantum Simpson's and quantum Newton's type inequalities for preinvex functions," *Adv. Differ. Equations*, vol. 2021, no. 1, 2021, doi: 10.1186/s13662-021-03226-x.

پی‌نوشت

1 F. H. Jackson
2 .Invex
3. Preinvex
4 Pitea
5 Postolache