

استفاده از روش تفاضل محدود مرتبه ۴ در تحلیل عددی رفتار ارتعاشی ورق‌های مستطیل شکل ارتوتروپیک

محمد حسین کارگرنوین^۱، کسری کرباسچی^۲ و حسن حسن زاده^۳
K.karbaschi@gmail.com

چکیده

امروزه سازه‌های با ساختار صفحه‌ای نظیر ورق‌ها، و آگاهی از رفتار ارتعاشی آنها اهمیت ویژه‌ای در فناوری‌های نوین به خود اختصاص داده است. در این مقاله به منظور بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های ارتوتروپیک از روش تفاضل محدود با مرتبه‌های خطای $O(h^2)$ و $O(h^4)$ استفاده شده است. برای این منظور ابتدا روش حل تحلیلی کلاسیک بررسی شده، سپس روابط متناظر برای تحلیل عددی با مرتبه‌های خطای یاد شده استخراج شده و نتایج به دست آمده برای فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت، به صورت بدون بعد مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. نتایج موجود در مراجع مختلف مورد استفاده و شبیه‌سازی صورت گرفته با نرم افزار ANSYS نیز صحت اعتبار و دقت نتایج بدست آمده را مورد تایید قرار داده‌اند.

کلید واژه:

فرکانس طبیعی - تشدید - مرتبه خطا - ورق ارتوتروپیک - تفاضل محدود - مولکول محاسباتی - گره

۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، mhkargar@sharif.edu

۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

۳- کارشناس مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، h.hassanzadeh84@gmail.com

۱- مقدمه

با فرض ارتوتروپیک بودن ورق، کوچک بودن تغییر مکانهای نسبی و قابلیت صرف نظر کردن از ترمهای غیر خطی، معادله کلی حرکت ورق (معادله ورق فون کارمن) با احتساب اثر تکیه گاه الاستیک (k)، بار خارجی اعمالی (q) و اثر بار حرارتی (T) بصورت زیر بدست می آید [۲].

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\hat{D}_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + k w_0 = q - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) - I_0 \ddot{w}_0 + I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

در رابطه فوق h ضخامت ورق، D سختی خمشی ورق و M_T اثر بار حرارتی می باشند و داریم:

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad (2)$$

$$D_{22} = \frac{E_2}{E_1} D_{11} \quad (3)$$

$$D_{12} = \nu_{21} D_{11} \quad (4)$$

$$D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (5)$$

$$\hat{D}_{12} = (D_{12} + 2D_{66}) \quad (6)$$

$$M_T = E\alpha\Delta T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \quad (7)$$

$$I_0 = \rho h \quad (8)$$

در رابطه (۱)، عبارت I_2 اینرسی چرخشی ورق می باشد که با توجه به تاثیر آن در فرکانسهای بالا، معمولاً در فرکانسهای پایین از آن صرف نظر می شود. برای بدست آوردن معادله ارتعاشی حاکم بر ورق، تابع تغییر مکان به صورت زیر فرض می شود:

$$w_0(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (9)$$

در رابطه فوق $i = \sqrt{-1}$ و ω فرکانس طبیعی می باشد. با در نظر گرفتن پاسخ حالت گذرا به فرم زیر:

$$w_0(x, y, t) = w(x, y) T(t) \quad (10)$$

در حالتی که هر چهار لبه ورق بر روی تکیه گاه ساده قرار داشته و a و b به ترتیب طول و عرض ورق باشند، می توان نوشت [۲]:

$$w(x, y) = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

تاکنون تلاشهای بسیاری برای آگاهی از رفتار دینامیکی ورقها و محاسبه فرکانسهای طبیعی آنها صورت گرفته که جملگی آنها بر مبنای بسط معادلات تغییر مکان حاکم بر ورق بنا شده است [۷-۱۱]. از آنجا که استفاده از روشهای تحلیلی در تمامی حالات ممکن میسر نبوده و اغلب فرضیات ساده کننده بسیاری نیز در استفاده از آنها در نظر گرفته می شوند، با توجه به افزایش قدرت محاسباتی کامپیوترها، گرایش خاصی به استفاده از روشهای عددی در حل معادلات و مسایل مهندسی بوجود آمده است. از عمده ترین گامهای برداشته شده در تحلیل عددی، پانگ [۸]. ارتعاشات ورقهای مستطیل شکل با استفاده از روش ریتز را مورد بررسی قرار داده است. اودمن [۹]. نیز روشهای عددی حل مسائل مقادیر ویژه را تحلیل نموده است. همچنین روش استخراج ماتریسهای سختی در روشهای مستقیم مسائل مقادیر ویژه توسط ملوش [۱۰]. مورد بررسی قرار گرفته و خدیر [۱۱]. نیز ارتعاشات ورقهای مستطیلی ساخته شده از مواد مرکب را تحلیل نموده است.

در این مقاله به بررسی رفتار ارتعاشی ورقهای ارتوتروپیک به وسیله روشهای عددی پرداخته شده است. روش مورد استفاده، روش تفاضل محدود مرکزی^۱ با مرتبه های خطای $O(h^2)$ و $O(h^4)$ است. در ابتدا حل تحلیلی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل شکل با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه حل عددی معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق بر اساس مرتبه های خطای مورد استفاده، تجزیه و تحلیل شده است. معادلات حاصل از تحلیل عددی با کد طراحی شده توسط نرم افزار MATLAB حل شده و از روی آنها فرکانسهای طبیعی ورق به صورت بی بعد بدست آمده اند. در انتها نیز رفتار ارتعاشی ورقهای تحت بررسی، با استفاده از نرم افزار ANSYS مورد تحلیل مودال قرار گرفته و فرکانسهای طبیعی بدست آمده در هر مرحله با نتایج حل تحلیلی و حل عددی مورد مقایسه قرار گرفته است.

۲- رفتار عمومی ورقها

ورق سازه ای است مسطح که ضخامت آن در قیاس با سایر ابعادش بسیار کوچک می باشد. این ویژگی باعث خمیده شدن آسان ورق تحت نیروهای جانبی شده و از این رو می توان با بکارگیری معادلات الاستیسیته دوبعدی به بررسی رفتار تنش و کرنش در ورقها پرداخت.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\hat{D}_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - I_0 \ddot{w}_0 = 0 \quad (15)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای لازم، در نهایت معادله ارتعاشی ورق ارتوتروپیک با شرایط ذکر شده بالا به صورت زیر بدست می آید [۱۴]:

$$S \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + P \left(2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B w_0 = 0 \quad (16)$$

در رابطه فوق داریم:

$$B = \frac{\omega^2 I_0}{D_{22}} \quad (17)$$

$$S = \frac{D_{11}}{D_{22}} = \frac{E_1}{E_2} \quad (18)$$

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad (19)$$

$$P = \frac{\hat{D}_{12}}{D_{22}} = \nu_{12} + 2Q - \frac{2Q\nu_{12}^2}{S} \quad (20)$$

$$Q = \frac{G_{12}}{E_2} \quad (21)$$

با توجه به ارتو تروپیک بودن رفتار ورق، مولکولهای محاسباتی لازم برای مشتقات مرتبه ۴ با مرتبه خطای $O(h^2)$ در شکل‌های (۱) الی (۳) بدست آمده اند [۱۴و۱۵]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{d^4} \times \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{-4} & \textcircled{6} & \textcircled{-4} & \textcircled{1} \end{matrix} \times w_{i,j} + O(h^2)$$

شکل (۱): مولکول محاسباتی تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه ۴ بر حسب X

$$\frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{d^4} \times \begin{matrix} \textcircled{2} & \textcircled{-4} & \textcircled{2} \\ \textcircled{-4} & \textcircled{8} & \textcircled{-4} \\ \textcircled{2} & \textcircled{-4} & \textcircled{2} \end{matrix} \times w_{i,j} + O(h^2)$$

شکل (۲): مولکول محاسباتی تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه ۴ بر حسب X و Y

فرکانس‌های طبیعی ورق ارتوتروپیک مستطیل شکل با لبه‌های خطی و صرف نظر کردن از ممان چرخشی، با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در (۱) و ساده سازی لازم بصورت زیر بدست می آید:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\rho h b^4} \left[D_{11} m^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + D_{22} n^4 \right] \quad (12)$$

در نهایت فرکانس طبیعی بی بعد شده ورق $(\bar{\omega}_{mn})$ برابر است با [۲]:

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (13)$$

۳- حل عددی معادله ارتعاشی ورق‌های با لبه‌های خطی

در بسیاری از موارد بکارگیری روشهای تحلیلی به سادگی میسر نبوده و تنها برای برخی حالات خاص و اعمال فرضیات ساده کننده، دستیابی به حل تحلیلی نهایی میسر می‌باشد. با پیشرفت روش‌های عددی و افزایش توان محاسباتی کامپیوترها و نرم افزارهای مرتبط، استفاده از روش‌های عددی برای بررسی مسایل پیچیده توجه عمده‌ای به خود معطوف داشته است. در این مقاله نیز از روش تفاضل محدود مرکزی برای تحلیل رفتار ارتعاشی ورقها استفاده شده است. در روش فوق ورق به شبکه‌های منظم تقسیم بندی شده و هر راس این شبکه، یک گره را تشکیل می‌دهد. با این تکنیک معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق و شرایط مرزی با یک سری معادلات تفاضل جایگزین می‌شود. از این رو حل مسئله اصلی و محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم، به حل همزمان دستگاه‌های معادلات جبری نوشته شده برای هر گره داخل صفحه کاهش می‌یابد.

الف) فرمولاسیون تفاضل مرکزی - مرتبه خطای ۲

معادله تفاضل مرکزی با مرتبه خطای ۲، با استفاده از تعریف مشتق تابع به صورت زیر بدست می‌آید [۱۲و۱۳]:

$$\delta y_n = \frac{1}{2\Delta x} (y_{n+1} - y_{n-1}) \quad (14)$$

معادله (۱) را برای یک ورق ارتوتروپیک با لبه‌های خطی و صرف نظر از ممان اینرسی چرخشی I_2 ، تکیه گاه الاستیک، بار حرارتی و بار خارجی، می‌توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$w_2 = 0, \left. \frac{d^2 w}{dy^2} \right|_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{d^2} (w_7 - 2w_2 + w_{-2}) = 0 \Rightarrow w_{-2} = -w_7 \quad (25)$$

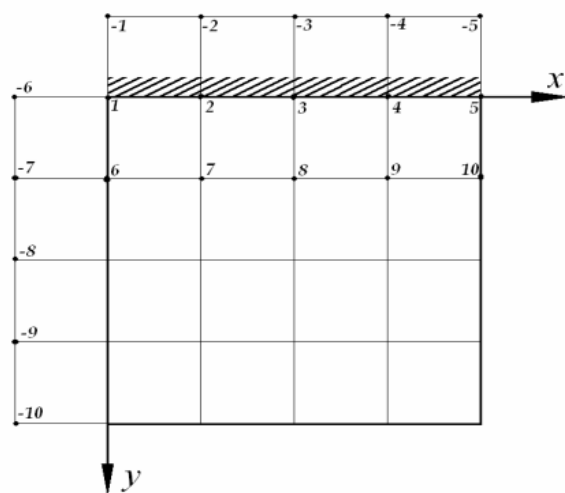
$$w_6 = 0, \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_6 = 0 \Rightarrow \frac{1}{d^2} (w_7 - 2w_6 + w_{-7}) = 0 \Rightarrow w_{-7} = -w_7$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$w_{-3} = -w_8, \quad w_{-4} = -w_9, \quad \dots \quad (26)$$

۲- تکیه گاه گیردار

شکل (۵) را در نظر می گیریم. با اعمال معادلات تفاضل بر روی معادلات شرایط مرزی، روابط بین گره ها به صورت زیر قابل استخراج است :



شکل (۵): لبه تکیه گاهی گیردار

$$\left. \frac{dw}{dy} \right|_{1,2,3,4,5} = 0 \quad (27)$$

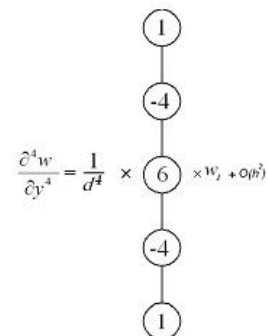
$$\left. \frac{dw}{dy} \right|_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2d} (-w_{-2} + w_7) = 0 \Rightarrow w_{-2} = w_7 \quad (28)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$w_{-1} = w_6, \quad w_{-3} = w_8, \quad \dots \quad (30)$$

ج) فرمولاسیون تفاضل مرکزی - مرتبه خطای ۴

معادلات تفاضل مرکزی مرتبه ۴ را می توان از بسط تیلور توابع ۲ متغییره و انتخاب ۵ جمله اول این بسط بدست آورد. برای نمونه،

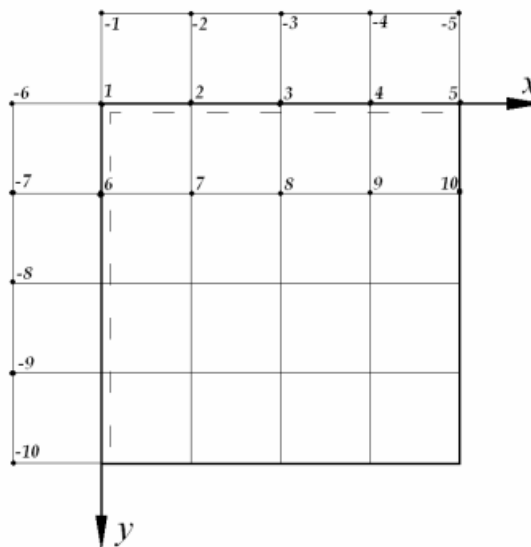


شکل (۳): مولکول محاسباتی تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه ۴ برحسب y

ب) بررسی شرایط مرزی در فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه خطای ۲

۱- تکیه گاه ساده

با در نظر گرفتن شکل (۴) و اعمال معادلات تفاضل بر روی شرایط مرزی، روابط بین گره ها بصورت زیر قابل استخراج است :



شکل (۴): لبه تکیه گاهی ساده

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0 \quad (22)$$

$$\left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{1,6} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dy^2} \right|_{1,2,3,4,5} = 0 \quad (23)$$

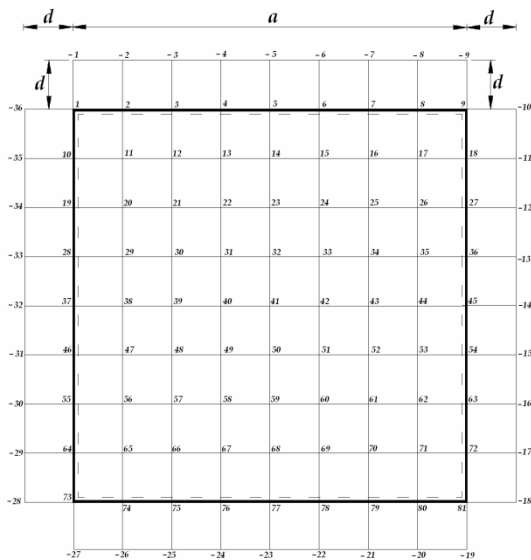
$$(24)$$

(د) بررسی شرایط مرزی در فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه ۴

بررسی شرایط مرزی در فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه ۴، همانند فرمولاسیون تفاضل مرکزی مرتبه ۲ در حالات مختلف مورد بررسی قرار گرفته می شود، بدین صورت که با نوشتن شرایط مرزی و قرار دادن معادلات تفاضل مرتبط، ارتباط بین گره ها و به ویژه گره های با اندیس منفی به دست می آیند که نتایج آنها در مراحل بعدی مورد استفاده قرار گرفته است.

۴- شبکه بندی ناحیه حل و استخراج معادلات حاکم الف) استفاده از روش تفاضل مرکزی با مرتبه خطای ۲

در ابتدا، ورق مربع شکل به ضلع a را که هر چهار طرف آن بر روی تکیه گاه ساده قرار دارد مطابق شکل (۹) در نظر گرفته می شود:



شکل (۹): شبکه بندی ورق مربع شکل به طول a - تفاضل مرتبه ۲

لازم به ذکر است ورق فوق به ۶۴ قسمت مساوی تقسیم شده، بطوریکه $d = a/8$ می باشد. همچنین گره هایی که با علامت منفی مشخص شده اند، گره های مجازی بوده که برای تبدیل شرایط مرزی به معادلات تفاضل جهت حل دستگاه معادلات جبری نهایی، لازم می باشند. با توجه به شرایط مرزی بررسی شده در شکل (۴) و فرض $L = Bd^4$ و $\nu = 0.292$ ، $\frac{G_{12}}{E_2} = 0.5$ ، و $\frac{E_1}{E_2} = 3$ و نمونه ای از معادلات فوق (مثلا برای گره شماره ۱۱) به صورت زیر بدست می آید:

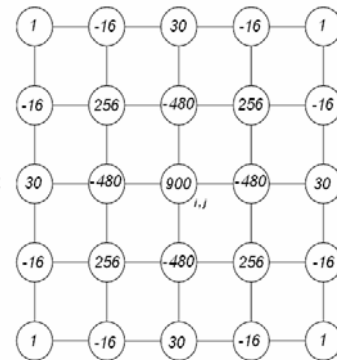
معادله تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه اول یک تابع ۱ متغییره به صورت زیر به دست می آید [۱۲و۱۴]:

$$\delta y_n = \frac{1}{12\Delta x} (-y_{n+2} + 8y_{n+1} - 8y_{n-1} + y_{n-2}) \quad (31)$$

از آنجا که معادله (۱)، یک معادله دو متغییره برحسب x و y است، لذا روابط تفاضل مرکزی با مرتبه خطای یاد شده برای مشتقات مرتبه ۴ به صورت مولکول های محاسباتی در شکل های (۶) الی (۸) تعریف می شوند [۱۲و۱۴]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{72d^4} \times (-12) \quad (144) \quad (-468) \quad (672) \quad (-468) \quad (144) \quad (-12) \times W_i + O(h^4)$$

شکل (۶): مولکول محاسباتی تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه ۴ بر حسب X

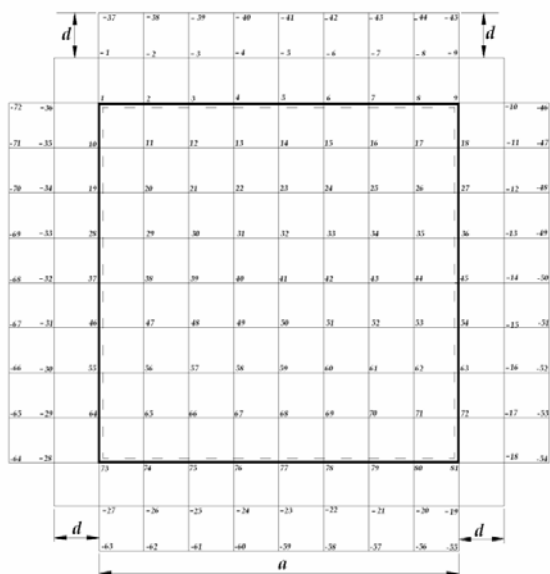


شکل (۷): مولکول محاسباتی تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه ۴ بر حسب X و Y

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{72d^4} \times (-12) \quad (144) \quad (-468) \quad (672) \quad (-468) \quad (144) \quad (-12) \times W_{i,j} + O(h^4)$$

شکل (۸): مولکول محاسباتی تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه ۴ بر حسب Y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{72d^4} [-120w_{-35} + 1440w_{10} - 4680w_{11} + 6720w_{12} \\ & - 4680w_{13} + 1440w_{14} - 120w_{15} \\ & + 1.2834(w_{-1} - 16w_{-2} + 30w_{-3} - 16w_{-4} + w_{-5} - 16w_1 \\ & + 256w_2 - 480w_3 + 256w_4 - 16w_5 + 30w_{10} - 480w_{11} \\ & + 900w_{12} - 480w_{13} + 30w_{14} - 16w_{19} + 256w_{20} - 480w_{21} \\ & + 256w_{22} - 16w_{23} + w_{28} - 16w_{29} + 30w_{30} - 16w_{31} + w_{32}) \\ & - 12w_{-39} + 144w_{-3} - 468w_3 + 672w_{12} - 468w_{21} + 144w_{30} \\ & - 12w_{39} - Lw_{12} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$



شکل (۱۰): شبکه بندی ورق مربع شکل به طول a - تفاضل مرتبه ۴

با اعمال شرایط مرزی بر روی معادله (۳۸)، معادله ساده شده نهایی به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} & -5155.4976w_{11} + (8364.558 - L)w_{12} - 5275.4976w_{13} \\ & + 1477.2186w_{14} - 120w_{15} + 328.5504w_{20} - 1072.032w_{21} \\ & + 328.5504w_{22} - 20.5344w_{23} - 20.5344w_{29} + 182.502w_{30} \\ & - 20.5344w_{31} + 1.2834w_{32} - 12w_{39} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

به طریق مشابه این عمل برای گره های دیگر انجام شده تا دستگاه معادلات مربوطه بدست آید. با طراحی کد مناسب با نرم افزار MATLAB و محاسبه L های مختلف، فرکانس ارتعاشات هر مود به دست می آید. فرکانس های طبیعی و فرکانس های بی بعد متناظر عبارتند از [۱۵ و ۱۴]:

$$\omega_{mn} = \frac{64}{a^2 \sqrt{72}} \left(\sqrt{\frac{D}{I_0}} \right) (\sqrt{L_i}) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d^4} [3w_{-35} - 12w_{10} + 18w_{11} - 12w_{12} + 3w_{13} + 1.2635(2w_1 \\ & - 4w_2 + 2w_3 - 4w_{10} + 8w_{11} - 4w_{12} + 2w_{19} - 4w_{20} + 2w_{21}) \\ & + w_{-2} - 4w_2 + 6w_{11} - 4w_{20} + w_{29} - Lw_{11}] = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_{10} = w_{19} = 0 \quad (33)$$

$$w_{-2} = w_{-35} = -w_{11} \quad (34)$$

با جایگذاری شرایط مرزی بالا در رابطه (۳۲)، معادله حاکم بر گره ۱۱ به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} & (9.108 - L)w_{11} - 17.054w_{12} + 3w_{13} - 9.054w_{20} \\ & + 2.527w_{21} + w_{29} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

به طریق مشابه این عمل برای گره های دیگر انجام شده تا دستگاه معادلات مربوطه بدست آید. با طراحی کد مناسب توسط نرم افزار MATLAB و محاسبه L های مختلف، فرکانس ارتعاشات هر مود بدست می آید. فرکانس های طبیعی و فرکانس های بی بعد متناظر از روابط زیر حاصل می شوند [۱۵ و ۱۴]:

$$\omega_{mn} = \frac{64}{a^2} \left(\sqrt{\frac{D}{I_0}} \right) (\sqrt{L_i}) \quad (36)$$

$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{64}{\pi^2} (\sqrt{L}) = 6.4845 \sqrt{L_i} \quad (37)$$

ب) استفاده از روش تفاضل مرکزی با مرتبه خطای ۴

همانند حالت قبل ورق مربع شکل به ضلع a که هر چهار طرف آن بر روی تکیه گاه ساده قرار دارد مطابق شکل (۱۰) در نظر گرفته می شود:

با در نظر گرفتن فرضیات قبلی و $L = 72Bd^4$ و $\frac{E_1}{E_2} = 10$, $\frac{G_{12}}{E_2} = 0.5$, $\nu = 0.292$ نمونه ای از معادلات

فوق (مثلا گره شماره ۱۲) به صورت زیر بدست می آید:

جدول (۳): مقایسه فرکانس‌های بی بعد- شرایط مرزی سه طرف تکیه گاه ساده و یک طرف تکیه گاه گیردار- مود اول

E_1/E_2	حل تحلیلی [۲]	تفاضل مرتب ۲	تفاضل مرتب ۴	ANSYS
۱	۲۳,۶۴۶	۲۲,۹۷۴	۲۳,۵۷۶	۲۳,۵۲۱
۳	۲۸,۳۶۵	۳۱,۹۷۰	۲۸,۳۱۲	۲۸,۳۰۶
۱۰	۳۸,۵۹۶	۵۰,۷۸۵	۳۸,۵۴۸	۳۸,۵۳۹

جدول (۴): مقایسه فرکانس‌های بی بعد - شرایط مرزی دو طرف تکیه گاه ساده و دو طرف تکیه گاه گیردار- مود اول

E_1/E_2	حل تحلیلی [۲]	تفاضل مرتب ۲	تفاضل مرتب ۴	ANSYS
۱	۲۸,۹۵۱	۲۷,۴۶۰	۲۸,۷۲۵	۲۸,۷۴۶
۳	۳۲,۲۶۳	۴۱,۱۲۰	۳۲,۷۷۴	۳۲,۲۵۸
۱۰	۴۱,۵۳۹	۶۹,۲۳۱	۴۱,۹۳۶	۴۱,۵۲۷

جدول (۵): مقایسه فرکانس‌های بی بعد- شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه گیردار- مود اول

E_1/E_2	حل تحلیلی [۲]	تفاضل مرتب ۲	تفاضل مرتب ۴	ANSYS
۱	۳۶	۳۳,۶۲۳	۳۵,۶۰۲	۳۵,۶۰۶
۳	۵۲,۵۹	۴۵,۵۳۷	۴۸,۱۶۴	۵۲,۱۲۳
۱۰	۷۶,۸۲۶	۷۱,۹۵	۶۰,۹۸۳	۷۶,۴۳۵

۶- بحث و نتیجه گیری

تا کنون روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌ها پیشنهاد شده است که هر یک با توجه به فرضیات ساده سازی‌های در نظر گرفته شده، به گوشه‌هایی از پیچیدگی معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی و ارتعاشی این سازه خاص پرداخته‌اند. در این مقاله نیز با بسط معادلات تفاضل مرکزی مرتبه ۲، معادلات تفاضل مرکزی مرتبه ۴ برای نخستین بار به دست آمده اند و از روابط بدست آمده برای حل عددی ارتعاش ورق‌های مستطیل شکل ارتوتروپیک با شرایط مرزی ترکیبی استفاده شده است.

بررسی نتایج لیست شده در جداول (۲) تا (۵) نشان می دهند:

- از روی نتایج بدست آمده در جدول (۲) این نکته قابل مشاهده است که با افزایش مرتبه معادلات تفاضل (از مرتبه ۲ به مرتبه ۴) تا چه اندازه دقت محاسبات و نهایتاً دقت جواب‌ها بالاتر می رود.

$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{64}{\pi^2 \sqrt{72}} (\sqrt{L_i}) = 0.7642 \sqrt{L_i} \quad (۴۱)$$

همچنین برای سایر حالات شرایط مرزی، فرکانس‌های بی بعد از رابطه ذیل محاسبه می شوند [۱۵ و ۱۴]:

$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{64}{\sqrt{72}} (\sqrt{L_i}) = 7.5423 \sqrt{L_i} \quad (۴۲)$$

۵- شبیه سازی با نرم افزار ANSYS

نرم افزار ANSYS، یک نرم افزار قوی در تحلیل به روش اجزای محدود برای حل مسائل مختلف مکانیک از جمله تحلیل مودال برای محاسبه فرکانسهای طبیعی سیستمهای مهندسی می‌باشد. برای بررسی صحت نتایج بدست آمده در بخشهای قبلی، شبیه سازی به شرح جدول (۱) برای ورق مستطیل شکل با شرایط مرزی مختلف نظیر چهار طرف ساده (SSSS)، چهار طرف درگیر (CCCC)، دو طرف ساده، دو طرف درگیر (SSCC) و سه طرف ساده، یک طرف درگیر (SSSC) انجام شده است.

جدول (۱): مشخصات ورق تحت شبیه سازی با نرم افزار ANSYS

Steel	جنس
SSSS - CCCC - SSCC - SSSC	شرایط مرزی
$1 \times 1 \text{ m}^2$	ابعاد
0.002 m	ضخامت
$\rho = 7810 \text{ Kg/m}^3$	چگالی
$E_1 = 207 \text{ GPa}$	مدول الاستیسیته
$\nu_{12} = 0.292$	ضریب پواسون
$G_{12}/E_2 = 0.5$	نسبت مدول برشی به مدول کششی
Modal (Reduced)	نوع تحلیل
Shell63	نوع المان
1	تعداد مود تحلیل شده

در جداول (۲) الی (۵) مقایسه جامعی بین نتایج حل تحلیلی، حل عددی و شبیه سازی انجام شده با نرم افزار آورده شده است.

جدول (۲): مقایسه فرکانس‌های بی بعد- شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده- مود اول

E_1/E_2	حل تحلیلی [۲]	تفاضل مرتب ۲	تفاضل مرتب ۴	ANSYS
۱	۲	۱,۹۷۴	۱,۹۹۹	۱,۹۹۱
۳	۲,۵۴۱	۲,۵۰۹	۲,۵۴۱	۲,۵۴۲
۱۰	۳,۶۷۲	۳,۶۲۵	۳,۶۷۲	۳,۶۶۸

از آنجا که در روشهای عددی معمولاً از روش تفاضل محدود مرتبه ۲ استفاده می‌شود، نتایج بدست آمده از فرمولاسیون تفاضل مرتبه ۴، نشان از دقت بالای روابط و سهولت بکارگیری آنها دارد. از این رو می‌توان از روابط فوق نیز برای بررسی جنبه‌های دیگر رفتار ارتعاشی - بدون الزام بکارگیری نرم افزار خاص و تنها با یک برنامه نویسی ساده - استفاده نمود.

۷- فهرست علائم

D	سختی خمشی ورق
E	مدول الاستیسیته
G	مدول برشی
h	ضخامت ورق
I_0	اینرسی جرمی
I_2	اینرسی چرخشی
k	سختی الاستیک تکیه گاه
q	بار گسترده اعمالی به ورق
w	تغییر مکان (خیز) ورق
δ	اپراتور تفاضل مرکزی
∇^2	اپراتور لاپلاس
ω	فرکانس طبیعی
$\bar{\omega}$	فرکانس طبیعی بی بعد
ρ	جرم حجمی
ν	نسبت پواسون

۸- مراجع

- [1] A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 2000.
- [2] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, 3rd ed., John Wiley, New York, 1999.
- [3] S. P. Timoshenko, A. Woinowsky, Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1959.
- [4] H. Marcus, Die Theorie elastischen gewerbe und ihre answedung auf die berechnung biegsamer platen, Springer Berlin, 1924.
- [5] Z. Szilard, Theory and Analysis of Plates - Classical and Numerical Methods, Prentice Hall, 1974.
- [6] N. Ishikawa, Reduced Order non-linear Equations of Plates, Division of Mechanical Science, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo, 060-8628, Japan.

- نتایج بدست آمده در جدول (۲) نشان می دهد در مقایسه با حل تحلیلی، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهار در رتبه اول، نرم افزار ANSYS در رتبه دوم و روش تفاضل مرکزی مرتبه دو در رتبه سوم قرار داشته و درصد خطای نسبی چشمگیر و زیر ۰.۵٪ می باشد.
- نتایج بدست آمده در جدول (۳) نیز نشان می دهد از نظر دقت پاسخها، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهار در رتبه اول، نرم افزار ANSYS در رتبه دوم و روش تفاضل مرکزی مرتبه دو در رتبه سوم قرار دارند.
- همچنین با دقت در نتایج بدست آمده این نکته قابل مشاهده است که با افزایش نسبت E_1/E_2 دقت نتایج در هر دو روش عددی کاهش می یابد. دلیل این امر را می‌توان نامنظم شدن ماتریس ضرایب دستگاه معادلات حاصل از اعمال معادلات تفاضل در اثر بالا رفتن نسبت یاد شده دانست.
- در جداول (۴) و (۵)، از نظر دقت پاسخهای بدست آمده، رتبه‌بندی روشهای حل بصورت نرم افزار ANSYS رتبه اول، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم در رتبه دوم و همچنان روش تفاضل مرکزی مرتبه دو در رتبه سوم قرار می‌گیرند. علت این امر را می توان در وضعیت شرایط تکیه‌گاهی جستجو نمود، بدین صورت که با توجه به صفر بودن تغییر مکان و شیب در لبه‌های گیردار، برای تبدیل شرایط مرزی به معادلات تفاضل می‌بایست از تعریف تقریبی مشتق استفاده نمود که این امر خود باعث افزایش خطای گرد کردن در محاسبات مربوطه می‌شود، چنانچه در لبه های تکیه گاهی ساده به دلیل عدم وجود شرط مرزی صفر بودن شیب، پاسخها از دقت چشمگیری برخوردار می باشند. در واقع می توان گفت هرچه شرایط تکیه‌گاهی گیردار، کمتر در ورق مورد بررسی وجود داشته باشد دقت نتایج بالاتر می رود.
- در جدول (۵) مشاهده می‌شود که با بالاتر رفتن نسبت E_1/E_2 دقت نتایج روش مرتبه ۴ حتی بسیار بیشتر از مرتبه ۲ کاهش می‌یابد و در این مورد شاهد دقت پائین تر روش فوق هستیم. در بررسی علل این موضوع می‌توان بیان داشت که دو عامل نامطلوب گفته شده در موارد قبلی یعنی بالا بودن تعداد محاسبات در روش مرتبه ۴ و خطا ساز بودن شرایط تکیه‌گاهی گیردار، موجب افزایش بیش از انتظار خطا در این حالت می‌شوند.

- [۱۳] م. نیکخواه بهرامی، " تئوری ارتعاشات و کاربرد آن در مهندسی"، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۸۱.
- [۱۴] ح. حسن زاده، " تحلیل عددی ارتعاش ورقه‌های با لبه های غیر خطی تحت شرایط مختلف مرزی"، پایان نامه کارشناسی مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، زمستان ۱۳۸۵.
- [۱۵] ک. کرباسچی، ح. حسن زاده، " تحلیل عددی رفتار ارتعاشی ورقه‌های با لبه های غیر خطی تحت شرایط مختلف مرزی"، دومین همایش منطقه‌ای مهندسی مکانیک، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری، آبان ۱۳۸۶.
- [7] Dewey, H., Foundations of the Theory of Membrane and Plate Vibration, School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology.
- [8] D. Young, "Vibration of Rectangular Plate by Ritz Method", Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 448 – 453, 1950.
- [9] Odman, S. T., Studies of Boundary Value Problems, Part II. Characteristic Function of Rectangular Plates, Proc. NR 24, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Royal Institute of Technology, Stockholm, Vol. 7, pp. 62, 1955.
- [10] R. Melosh, "Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method", Journal AIAA, Vol. 1, pp. 1631 – 1637, July 1963.
- [11] A. Khedir, "Free Vibration and Buckling of Symmetric Cross Ply Laminated Plates by an Exact Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, pp. 447 – 461, 1988.
- [12] Rao, S.S, Numerical Method in Engineering Problem, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 2002.