حل حجم محدود معادلات ناویر - استوکس دو بعدی تراکم ناپذیر پایدار درون حفره متحرک مورب با شبکه‌بندی غیر متعامد

محمد رضا صفائی[1]، سید رضا صالح[2]، مرجان گودرزی[3]
CFD_Safaiy@Yahoo.Com

چکیده

در این مقاله حل عددی جریان درون حفره متحرک مورب برای اعداد رینولدز 100 و 1000 و $30^{\circ} \leq \alpha \leq 150^{\circ}$ با استفاده از یک شبکه‌بندی مناسب (513×513) انجام شده است. متد عددی استفاده شده توسط صفائی و همکارانش[1] در کلی ترین فرم، به روش حجم محدود فرمول‌بندی مجدد شده و برای جریان‌های غیر متعامد بررسی شده است. معادلات ناویر – استوکس برای یافتن تابع جریان و معادله چرخش(چرخش) حل شده‌اند. با مقایسه نتایج، می‌توان نشان داد که مقادیر محاسبه شده در این مطالعه با حل آزمایشگاهی و عددی دیگران مطابقت خوبی دارد.

کلیدواژه:

جریان درون حفره متحرک مورب - روش حجم محدود - شبکه‌بندی غیر متعامد - معادلات ناویر - استوکس دو بعدی تراکم ناپذیر پایدار.

1- پژوهشگر، شرکت نفت مناطق مرکزی، شرکت بهره برداری نفت و گاز شرق، خانگیران، سرخس
2- استادیار، عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد
3- پژوهشگر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

1- مقدمه

دسته‌ای از جریان‌های مطرح که کاربرد صنعتی دارند، جریان‌های داخل حفره‌ای هستند. در این نوع جریان‌ها سیال در حفره‌ای با دیواره متحرک جریان دارد. کاربرد این جریان‌ها در صنایع پلیمر و برای فرآیند اختلاط است. لذا این نوع جریان‌ها از قدیم کانون توجه مطالعات دینامیک سیالات محاسباتی بوده است[1]. جریان درون حفره مثلثی را در شرایط مختلف فیزیکی، عددی و ریاضی آنالیز نمودند. آنها با استفاده از روش حجم محدود توانستند تا رینولدز 5196 جریان درون حفره مثلثی را آنالیز کنند. در مسائل جریان درون حفره متحرک، اگر چه هندسه مسئله ساده می‌باشد و از نقطه نظر برنامه‌نویسی، پیاده‌سازی برنامه به سادگی قابل اجرا است، ولی جریان درون حفره متحرک به علت داشتن نقاط چرخنده بسیار در گوشه‌های حفره، دارای اهمیت بالایی است. از بین مقالات چاپ شده در رابطه با جریان سیال درون حفره‌های متحرک، [10] ,[8] ,[7] ,[6] ,[4] مقالاتی هستند که نتایج عددی آنها با نتایج این مقاله مقایسه شده است.

به خاطر ساده بودن هندسه، جریان درون حفره متحرک در مختصات کارتزین با استفاده از شبکه‌بندی کارتزین به سادگی حل می‌شود. در اکثر مطالعات قبلی، اشکال حفره ها مختصاتی متعامد دارند؛ لذا در آنها از شبکه‌بندی متعامد استفاده شده است. در اغلب مواقع جریان‌های واقعی، هندسه‌هایی بسیار پیچیده‌تر نسبت به حفره‌های متحرک دارند. لذا در اکثر موارد، محققین از هندسه‌های غیر متعامد با شبکه‌بندی غیر متعامد استفاده می‌کنند. در یک شبکه غیر متعامد هنگامی که معادلات حاکم در مختصات کلی منحنی الشکل فرمول‌بندی می‌شوند، عبارت‌های فرعی در معادلات پدید می‌آیند. بسته به عدم تقارن شبکه‌بندی، این عبارت‌های فرعی می‌توانند روی پایداری و دقت روش عددی استفاده شده برای حل، تاثیرگذار باشند.

حتی اگر حل مبنای جریان درون حفره متحرک در مقایسه با متدهای دیگر عددی سودمند باشد، با این حال جریان در مقایسه با هندسه‌های پیچیده و مش‌های غیر متعامد از لحاظ همانند سازی بسیار متفاوت است. متاسفانه، حل‌های مبنای زیادی با شبکه‌بندی غیر متعامد به منظور مقایسه با دیگر روش‌های حل وجود ندارد. [2] جریان درون حفره متحرک اریب را به عنوان یک مثال برای شبکه‌بندی غیر متعامد معرفی کردند. هندسه مورد مطالعه شبیه جریان درون حفره متحرک است ولی هندسه بیش از آن که یک مربع باشد، متوازی الاضلاع است.

در این مسئله میزان اریب بودن هندسه به آسانی با تغییر زاویه ی موربی (α) می‌تواند تغییر کند. البته قبلا [3], [5], [11], [13], [14], [15], [16], [18], [19], [20], [21], همین مسئله را با روش‌های دیگر حل نموده اند. در تمامی مطالعات قبلی انجام شده، جریان درون حفره متحرک مورب برای اعداد رینولدز 100 و 1000 و فقط برای دو زاویه موربی $\alpha=30^\circ$ و $\alpha=45^\circ$ مورد بررسی واقع شده است. هدف اصلی این مطالعه دوباره معرفی کردن جریان درون حفره مورب با محدوده وسیعی از زوایای موربی (α) و جدول‌بندی کردن ریز نتایج برای تحقیقات آینده است. حل عددی جریان درون حفره مورب برای اعداد رینولدز 100و 1000 در محدوده‌ی وسیعی از زاویه‌ی موربی بین $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ با گام افزایشی $\Delta\alpha=15^\circ$ با استفاده از یک شبکه‌بندی مناسب (513 × 513) انجام پذیرفته شده است. با تغییر زاویه موربی به مقادیر بسیار بزرگ، توانایی امتحان روش عددی حجم محدود برای شبکه های مورب از لحاظ دقت، پایداری و کارائی امکان پذیر خواهد بود.

2- فرمول بندی

شکل(1) نمای شماتیک از مسئله مبنا را معرفی می‌کند. در حالت کلی زاویه موربی می‌تواند کمتر یا بیشتر از 90° باشد.

برای جریان‌های محوری متقارن(axi-symmetric flows) استفاده از تابع جریان (streamfunction) و چرخش (Vorticity) برای حل معادلات ناویر – استوکس بسیار مناسب است.

حالت بدون بعد این معادلات به گونه ی زیر است:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right]=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} \qquad (2)$$

که Re عدد رینولدز، x و y مختصات کارتزین هستند. تعریف تابع جریان و چرخش نیز به گونه زیر است:

$$\omega=\left|\nabla\times V\right|=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

و نیز

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-v \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta} \qquad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\eta}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial\eta}+2\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} \tag{4}$$

با استفاده از قانون زنجیره‌ای در مشتقات جزئی و قرار دادن روابط قانون زنجیری در معادلات (1) و (2) می‌توان معادلات را در حوزه حل به‌دست آورد.

$$\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=-\omega \tag{5}$$

$$\frac{1}{Re}\left(\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}\right)=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta} \tag{6}$$

به منظور محاسبه ماتریس شبکه‌بندی در محدوده فیزیکی به گونه‌ای که در شکل 2 آمده است، شبکه غیر متعامد اولیه به شبکه متعامد نشان داده شده نگاشته شده است. ماتریس تبدیل معکوس، به گونه ی زیر محاسبه شده است:

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=\frac{1}{N} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial\eta}=\frac{\cos\alpha}{N} \qquad \frac{\partial y}{\partial\eta}=\frac{\sin\alpha}{N} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial\xi}=0 \tag{7}$$

که N تعداد نقاط شبکه است. در این مطالعه یک شبکه (N×N) گره در نظر گرفته شده است. دترمینان ماتریس ژاکوبی به صورت زیر خواهد بود.

$$|J|=\frac{\sin\alpha}{N^2} \tag{8}$$

لذا ماتریس تبدیل به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{|J|}\frac{\partial y}{\partial\eta} \quad , \quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{-1}{|J|}\frac{\partial x}{\partial\eta} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{-1}{|J|}\frac{\partial y}{\partial\xi} \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\frac{\partial x}{\partial\xi} \tag{9}$$

با جایگذاری معادلات (7) و (8) در معادله (9)، ماتریس تبدیل به گونه زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=N \quad , \quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{-N\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{N}{\sin\alpha} \tag{10}$$

چون در این مطالعه فواصل شبکه بطور مساوی انتخاب شده‌اند، ماتریس تبدیل مرتبه دو، برابر با صفر خواهد بود :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=0 \tag{11}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0 \tag{12}$$

3- شرایط مرزی

در محدوده محاسباتی، اجزای سرعت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \quad (13)$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \quad (14)$$

در مرز دیواره سمت چپ شرایط زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\Big|_{0,j}=0\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Big|_{0,j}=0\,,\quad \psi_{0,j}=0 \quad (15)$$

همچنین در دیواره سمت چپ سرعت برابر صفر است (u=0, v=0).

با استفاده از معادلات (13) و (14) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\Big|_{0,j}=0 \quad (16)$$

و همچنین:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{0,j}=0 \quad (17)$$

قبلا این شرایط در معادله (4) جایگزین شده است.

روی دیوار بالایی سرعت u=1 و v=0 می‌باشد.

از آنجا که اساس کار این مطالعه بر پایه حجم محدود می‌باشد، از فرمول‌های خاص این روش استفاده می‌شود. ابتدا مقادیر تابع جریان بازنویسی شده و سپس ورتیسیتی در نقاط مرزی به دست می آید. شرح کامل این روش در مطالعات[17] ,[12] ,[9] ,[1] موجود می‌باشد.

4- نتایج

جریان پایدار تراکم ناپذیر درون حفره متحرک مورب به صورت عددی با استفاده از روش حجم محدود و شرایط مرزی بیان شده، حل گردیده است. روش حل به صورت Segregated و میزان باقی مانده همگرایی 10^{-8} است. این میزان دقت، صحت محاسبات را تضمین می‌کند. محاسبات برای رینولدز های مختلف انجام پذیرفته و به‌طور میانگین 3500 تکرار برای حل هر حفره مورب مورد نیاز است. در زوایای مورب تند، برای همگرایی حل عددی استفاده از چنین باقیمانده کوچکی بسیار ضروری است.

برای مثال در زاویه مورب $\alpha=30^\circ$ در گوشه پایین سمت چپ و در زاویه مورب $\alpha=150^\circ$ در گوشه پایین سمت راست نواحی چرخنده دایروی کوچکتری به وجود می‌آیند. شکل 16 از نتایج مطالعه، سرعت u در راستای خط A-B و سرعت v در راستای خط C-D را با مطالعات [2] در $\alpha=30^\circ$ و شکل 17 همان موارد را برای $\alpha=45^\circ$ مقایسه می‌کند. نتایج ما به طور کامل با نتایج [2] مطابقت دارد. جدول (1) نتایج مطالعه را از لحاظ مقادیر حداقل و حداکثر تابع جریان و همچنین مکان قرارگیری آنها برای اعداد رینولدز 100 و 1000 برای $\alpha=30^\circ$ و $\alpha=45^\circ$ با نتایج [18] ,[13] مقایسه می‌کند. نتایج این مطالعه و نتایج دو مطالعه بالا کاملا با یکدیگر همخوانی دارد. اگر چه نتایج مطالعه فعلی به علت استفاده از یک شبکه‌بندی کاملا بهینه بسیار دقیق‌تر است. شکل‌های 5 تا 14 تابع جریان و چرخش را برای اعداد رینولدز 100 و 1000 و $30^\circ\le\alpha\le150^\circ$ و با گام افزایشی $\Delta\alpha=15^\circ$ نشان می‌دهد. این اشکال نشان می‌دهد که جریان در زوایای مورب مختلف رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهد. در نمودارهای 15 و 18 سرعت u در راستای خط A-B و سرعت v در راستای خط C-D برای اعداد رینولدز 100 و 1000 برای مطالعات بیشتر در آینده نشان داده شده است.

5- بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه جریان درون حفره متحرک مورب که قبلا توسط [2] به روش تفاضل محدود انجام شده بود، با استفاده از روش حجم محدود برای زوایای مورب بسیار متفاوتی انجام شده است. جریان درون حفره متحرک مورب برای زوایای مورب $30^\circ\le\alpha\le150^\circ$ و با گام افزایشی $\Delta\alpha=15^\circ$ برای رینولدز 100 و 1000 انجام شده است. معادله حاکم بر جریان، معادله ناویر – استوکس در کلی‌ترین حالت خود است. نیز شبکه غیر متعامد به محدوده حل نگاشته شده است. جریان درون حفره متحرک مورب می‌تواند یک معیار مناسب برای مطالعات CFD به منظور بررسی کارایی روش‌های عددی در مسائل جریان غیرمتعامد باشد.

6- مراجع

[1] M.R. Safaiy; M. Jabbarzadeh; B.Rahmanian and S. Behboudian. "Solution of equilateral Triangular Cavity Flow by Finite Volume Method", Annual Physics Conference of Iran, Shahrood University, Shahrood, 919-923, (2006). [In Farsi]

[2] E. Erturk and B. Dursun. "Benchmark Solutions of 2-D Steady Incompressible N-S Equations in General Curvilinear Coordinates with Non-Orthogonal Grid Mesh; Driven Skewed Cavity Flow", Submitted for publication to International Journal for Numerical Methods in Fluids, (2005).

[3] E. Brakkee; P. Wesseling and C.G.M Kassels. "Schwarz Domain Decomposition for the Incompressible Navier Stokes Equations in General Co-ordinates", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 32, 141-173, (2000).

[4] O. Botella and R. Peyret. "Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow", Computers and Fluids, 27, 421-433, (1998).

[5] H. Xu and C. Zhang. "Study of the Effect of the Non-Orthogonality for Non-Staggered Grids the Results", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 29, 625-644, (1999).

[6] E. Erturk; T.C. Corke and C. Gokcol. "Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 48, 747-774, (2005).

[7] E. Erturk. "Nature of Driven Cavity Flow at High-Re and Benchmark Solutions on Fine Grid Mesh", Submitted for publication to International Journal for Numerical Methods in Fluids, (2004).

[8] E. Erturk and C. Gokcol. "Fourth Order Compact Formulation of Navier-Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers", Submitted for publication to International Journal for Numerical Methods in Fluids, (2004).

[9] M. R. Safaiy; S.R.Saleh and B. Rahmanian; "Numerical Solution of Melted Sodium around the Tubes which Involves Uranium by Finite Volume Method", 6th Young Research Club Engineering Conference, Khorram Abad, Submitted for publication, (2007). [In Farsi]

[10] E. Barragy and G.F. Carey. "Stream Function-Vorticity Driven Cavity Solutions Using p Finite Elements", Computers and Fluids, 26, 453-468, (1997).

[11] H. Lai and Y. Yan. "The effect of choosing dependent variables and cell face velocities on convergence of the SIMPLE algorithm using non-orthogonal grids", International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 11, 524-546, (2001).

[12] M. R. Safaiy; S.R.Saleh; M. Goodarzei and A. Rohanei; "Numerical Studies of Natural Convection in a Square Cavity with Orthogonal Grid Mesh by Finite Volume Method", Annual Physics Conference of Iran, Yasooj University, Yasooj, Submitted for publication, (2007). [In Farsi]

[13] M. Louaked; L. Hanich and K.D. Nguyen. "An Efficient Finite Difference Technique for Computing Incompressible Viscous Flows", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 25, 1057-1082, (1997).

[14] H. Xu and C. Zhang. "Numerical Calculation of Laminar Flows Using Contra variant Velocity Fluxes", Computers and Fluids, 29, 149-177, (2000).

[15] Pacheco J.R. and Peck R.E. "Non staggered Boundary-Fitted Coordinate Method For Free Surface Flows", Numerical Heat Transfer, Part B, 37, 267-291, (2000).

[16] D.G. Roychowdhury; S.K. Das and T. Sundararajan. "An Efficient Solution Method for Incompressible N-S Equations Using Non-Orthogonal Collocated Grid", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45, 741-763, (1999).

[17] M. R. Safaiy; S.R.Saleh; M. Goodarzei and M. Goodarzei; "Fine Grid Benchmark Solutions of isosceles Triangular Cavity Flow By Finite Volume Method", Mechanical Engineering Conference, Islamic Azad University - Central Tehran Branch, Tehran, 92-99, (2006). [In Farsi]

[18] A. Shklyar and A. Arbel. "Numerical Method for Calculation of the Incompressible Flow in General Curvilinear Co-ordinates with Double Staggered Grid", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 41, 1273-1294, (2003).

[19] R. Teigland and I.K. Eliassen. "A Multiblock/Multilevel Mesh Refinement Procedure for CFD Computations", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 36, 519-538, (2001).

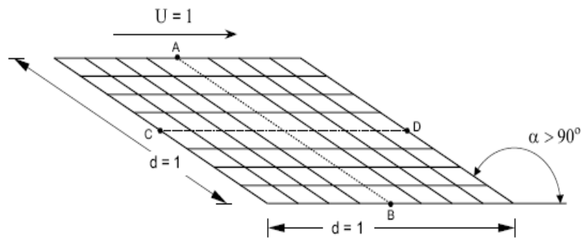
[20] P.G. Tucker and Z. Pan. "A Cartesian Cut Cell Method for Incompressible Viscous Flow", Applied Mathematical Modeling, 24, 591-606, (2000).

[21] Y. Wang and S. Komori. "On the Improvement of the SIMPLE-Like method for Flows with Complex Geometry", Heat and Mass Transfer, 36, 71-78, (2000).

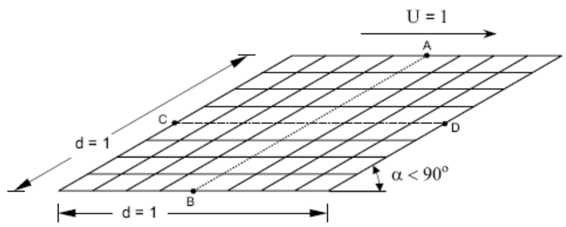
[22] E. Erturk; O.M. Haddad and T.C. Corke. "Numerical Solutions of Laminar Incompressible Flow past Parabolic Bodies at Angles of Attack", AIAA Journal, 42, 2254-2265, (2004).

[23] S. V. Patankar. Numerical heat transfer and fluid flow, Mc Graw-Hill, (1980).

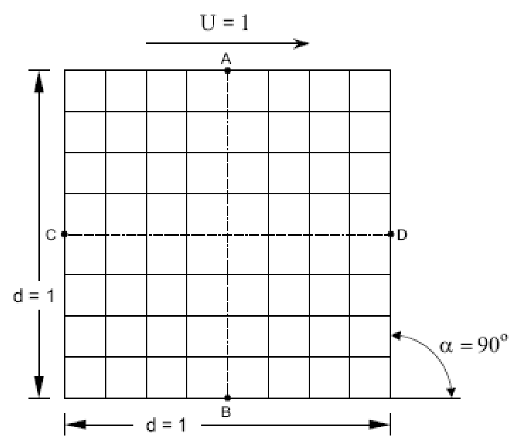
[24] H. Schlichting, Boundary Layer Theory, Mc Graw-Hill, (1973).



حفره متحرک مورب با α **f** 90°



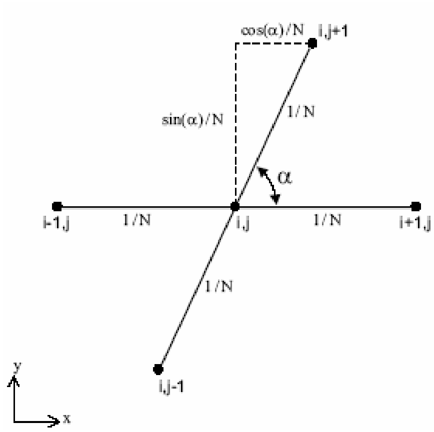
حفره متحرک مورب با α **p** 90°



حفره متحرک مورب با $\alpha = 90^{\circ}$ (حفره متحرک مربعی شکل)

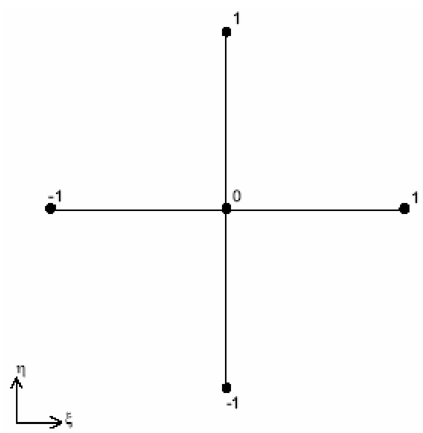
شکل (1): نمای شماتیک مسئله

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} \dfrac{\partial y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial h} \end{Bmatrix}$$



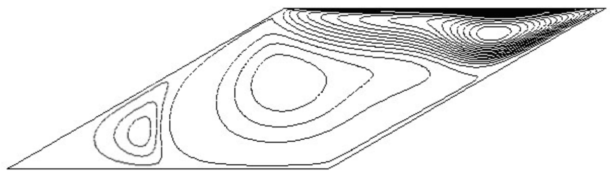
قلمرو فیزیکی

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial h} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} \dfrac{\partial y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial h} \dfrac{\partial y}{\partial h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

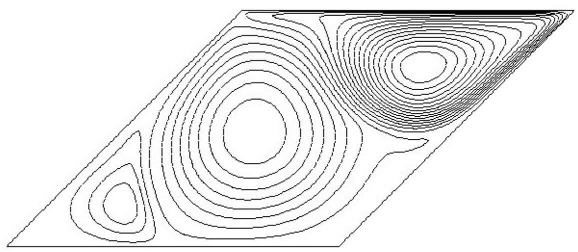


قلمروی عددی

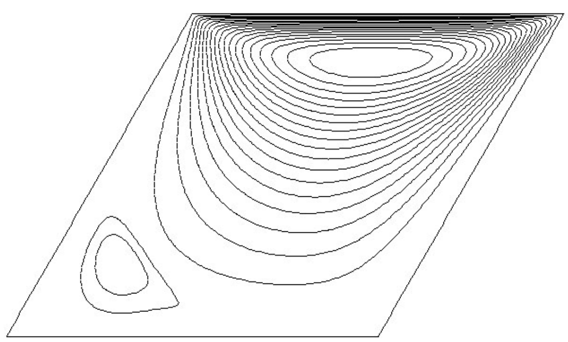
شکل (2): نگاشت قلمروی فیزیکی به قلمروی عددی



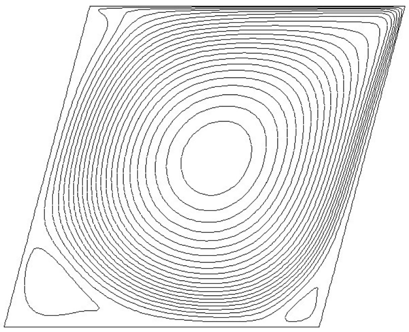
شکل(3): تابع جریان برای رینولدز 1000 و زاویه °30



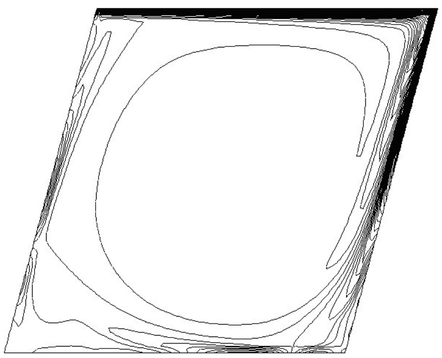
شکل(4): تابع جریان برای رینولدز 1000 و زاویه °45



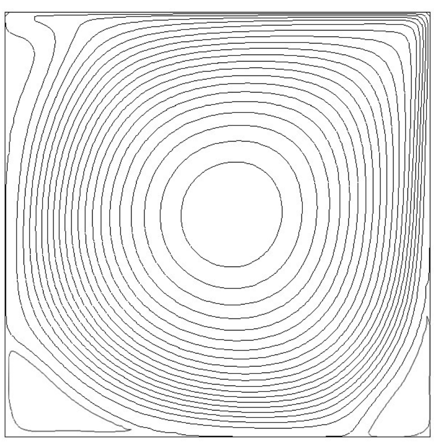
شکل(5): تابع جریان برای رینولدز 100 و زاویه °60



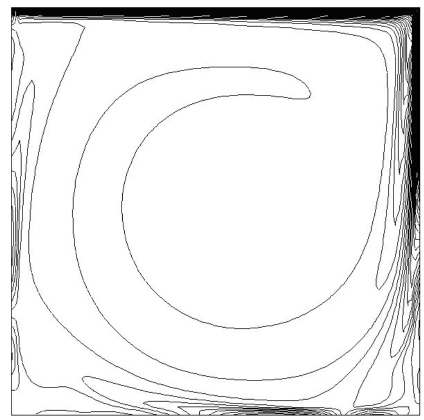
شکل(6): تابع جریان برای رینولدز 1000 و زاویه °75



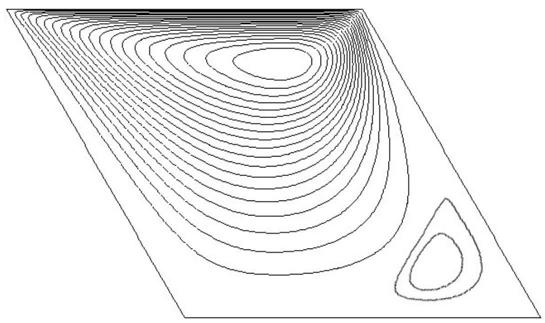
شکل(7): چرخش برای رینولدز 1000 و زاویه °75



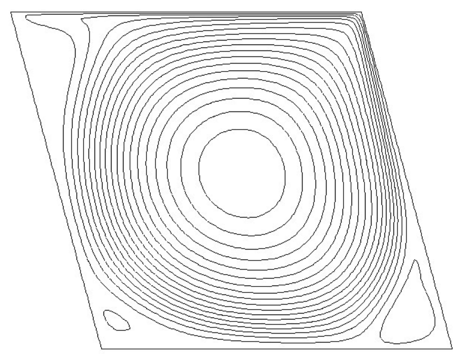
شکل(8): تابع جریان برای رینولدز 1000 و زاویه °90



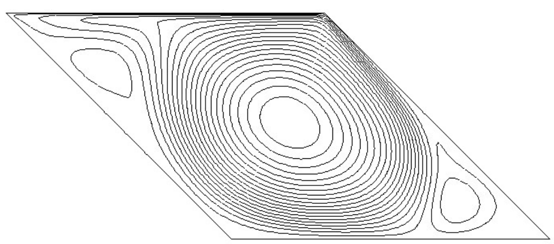
شکل(9): چرخش برای رینولدز 1000 و زاویه °90



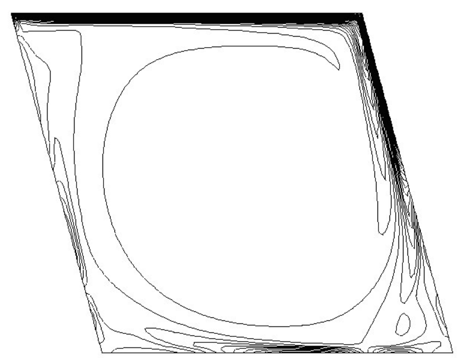
شکل(12): تابع جریان برای رینولدز 100 و زاویه °120



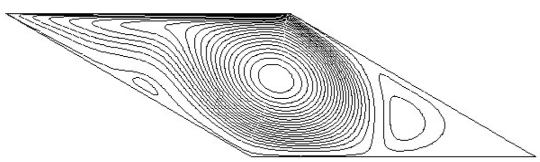
شکل(10): تابع جریان برای رینولدز 1000 و زاویه °105



شکل(13): تابع جریان برای رینولدز 1000 و زاویه °135



شکل(11): چرخش برای رینولدز 1000 و زاویه °105



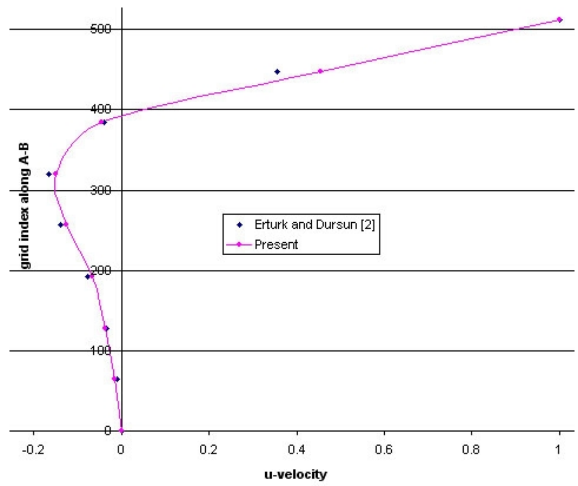
شکل(14): تابع جریان برای رینولدز 1000 و زاویه °150

جدول (1): مقایسه مقادیر حداکثر و حداقل تابع جریان و مکان این نقاط برای عدد رینولدز 100 و زوایای موربی° 30 و °45

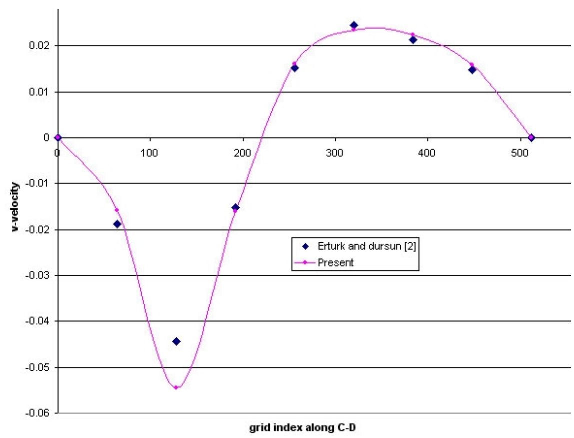
Skew Angle		Re=100	
		min	max
$\alpha = 30°$	Present ψ (x,y)	-5.34E-02 (1.162,0.378)	5.52E-05 (0.524,0.146)
	Shklyar and Arbel	-5.3004E-02 (1.1674,0.3781)	5.7000E-05 (0.5211,0.1543)
	Louaked et al.	-	-
$\alpha = 45°$	Present ψ (x,y)	-7.01E-02 (1.114,0.543)	3.68E-05 (0.335,0.148)
	Shklyar and Arbel	-7.0129E-02 (1.1146,0.5458)	3.9227E-05 (0.3208,0.1989)
	Louaked et al.	-	-

جدول (2): مقایسه مقادیر حداکثر و حداقل تابع جریان و مکان این نقاط برای عدد رینولدز 1000 و زوایای موربی° 30 و °45

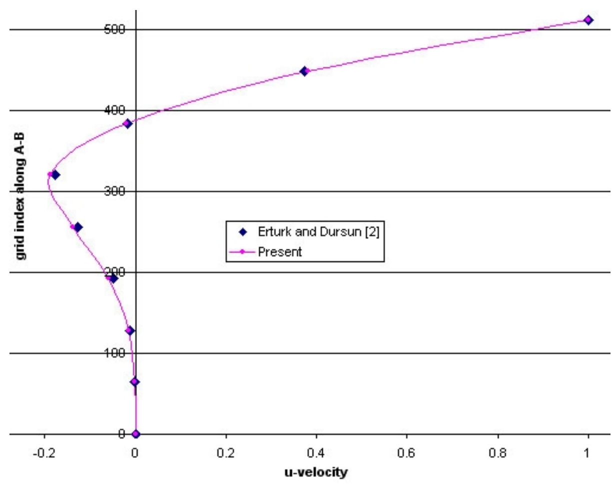
Skew Angle		Re=1000	
		Min	Max
$\alpha = 30°$	Present ψ (x,y)	-3.83E-02 (1.459,0.415)	4.13E-03 (0.904,0.257)
	Shklyar and Arbel	-3.8185E-02 (1.4583,0.4109)	3.8891E-03 (0.8901,0.2645)
	Louaked et al.	-3.9000E-02 (1.4540,0.4080)	4.3120E-03 (0.8980,0.2560)
$\alpha = 45°$	Present ψ (x,y)	-5.35E-02 (1.316,0.575)	1.07E-02 (0.7780,0.3991)
	Shklyar and Arbel	-5.2553E-02 (1.3120,0.5745)	1.0039E-02 (0.7766,0.3985)
	Louaked et al.	-5.4690E-02 (1.3100,0.5700)	1.0170E-02 (0.7760,0.3980)



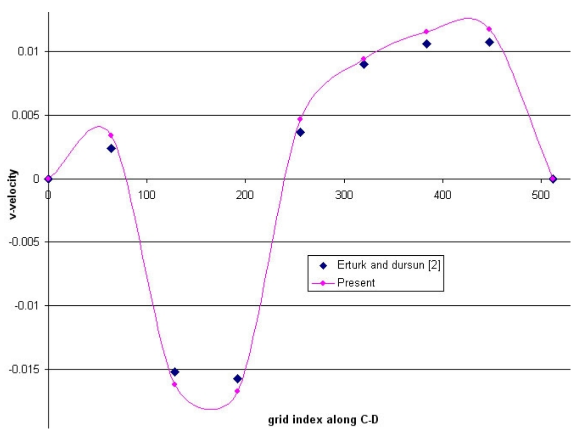
شکل (15): مقایسه سرعت u در راستای خط A-B در عدد رینولدز 100 و $\alpha = 45°$



شکل (17): مقایسه سرعت v در راستای خط C-D در عدد رینولدز 1000 و $\alpha = 45°$



شکل (16): مقایسه سرعت u در راستای خط A-B در عدد رینولدز 100 و $\alpha = 30°$



شکل (18): مقایسه سرعت v در راستای خط C-D در عدد رینولدز 1000 و $\alpha = 30°$