فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
دوره ۱۲ / شماره ٤ (پیاپی ٤٨) / زمستان ۱٤۰۲
صفحه ۵۸۵ تا ۶۰۶

کالیبراسیون قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته مبتنی بر روش ذوزنقه‌ای

فروغ لطفی
دانشجوی دکتری تخصصی مهندسی مالی، گروه مدیریت، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران
Lotfi.forough@gmail.com

رضا آقاجان نشتائی
گروه مدیریت بازرگانی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران (نویسنده مسئول)
Nashtaei@iaurasht.ac.ir

مهدی مشکی میاوقی
گروه حسابداری و مالی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
mhd.meshki@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۰۵

چکیده

پژوهش حاضر تفسیر جدیدی از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم یافته به عنوان یک روش عددی همه منظوره قدرتمند به نام روش تبدیل انتگرال ارائه می‌دهد. این روش مدل‌های معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به یک سیستم غیرخطی جفت شده از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند تا به صورت عددی حل شوند. از طرفی در پژوهش حاضر تنها بحث قیمت‌گذاری مطرح نیست، بلکه کالیبراسیون مدل که یک فرآیند حیاتی است جهت این موضوع طراحی شده است که تفاوت بین قیمت‌های مشاهده شده و قیمت‌های مدل را به حداقل برساند. جهت پیاده‌سازی مدل مطرح شده، پژوهش حاضر از داده‌های اختیار خرید عرضه شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده نموده است و به عنوان نمونه اطلاعات اختیار خرید سهام شرکت سایپا برای سر رسید خرداد ماه ۱۴۰۱ را مورد استفاده قرار داده است. در ابتدا با کدنویسی در محیط پایتون تابع توزیع احتمال شرطی برای مقادیر مختلف دارایی پایه بدست آمده و در ادامه به کالیبراسیون مدل در سررسیدهای مختلف پرداخته شد. نتایج پژوهش نشان داد که کالیبراسیون مدل مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر برای آپشن‌هایی مناسب است که در همه‌ی سناریوهای سررسید در وضعیت بی‌تفاوتی یا سوددهی هستند و در سناریوی میان مدت و بلندمدت در وضعیت زیان‌دهی هستند. در ادامه نیز می‌توان از کالیبراسیون مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها برای آپشن‌هایی استفاده کرد که در سناریو کوتاه مدت در وضعیت زیان‌دهی هستند.

واژه‌های کلیدی: تبدیل انتگرالی، روش ذوزنقه‌ای، کالیبراسیون، قیمت‌گذاری آپشن‌ها.

۱- مقدمه

پیش بینی روند بازار سهام، به دلیل نوسان‌های محیطی و تلاطم ذاتی روندهای روزانه بازار، بسیار پیچیده است. پیچیدگی حرکات روزانه بازار و قیمت سهام از عواملی نظیر حوادث سیاسی، اخبار بازار، گزارش‌های دوره‌های در آمد و رفتارهای متعارض معامله نشئت می‌گیرد (فخاری و همکاران، ۱۳۹۶). این تلاطم و عدم اطمینان موجود از وضعیت آینده در بازارهای مالی، زیان شدیدی به بازیگران اقتصادی وارد کرده است و حتی باعث شده که آنها از بازار خارج شوند و در این عرصه توانایی رقابت با دیگران را نداشته باشند. به منظور پاسخ گویی به این مسئله بازار، انواع مشتقات مالی طراحی شده است (کیمیاگری و همکاران، ۱۳۹۶). در واقع این اوراق به فعال تر شدن بورس و تعمیق بازار کمک کرده‌اند. اختیار معامله، یکی از انواع اوراق مشتقه در حوزه مالی است (فرخی و همکاران، ۱۳۹۵).

باید توجه شود که مسئله مهم در خصوص هر ابزار مالی از جمله اختیار معامله، بحث قیمت گذاری آن است. مدل‌سازی بسیاری از مسائل مهندسی منجر به معادلات دیفرانسیل جزئی می‌شود که تحت شرایط اولیه و مرزی متناظر قرار می‌گیرند. حل چنین مدل‌هایی معمولا با روش‌های عددی انجام می‌شود. تکنیک تبدیل انتگرالی به عنوان یک روش عددی همه منظوره جدید قدرتمند تفسیر می‌شود. این روش مدل‌های معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به یک سیستم غیرخطی جفت شده از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند تا به صورت عددی حل شوند. تکنیک تبدیل انتگرالی عمدتاً برای حل دقیق مسائل خطی استفاده می‌شود. اخیراً چندین مدل خطی و غیرخطی با موفقیت توسط یک تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم یافته حل شده‌اند. همه روش‌ها معادلات دیفرانسیل جزئی اصلی را به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل یا جبری معمولی تبدیل می‌کنند که باید با تکنیک‌های تثبیت‌شده حل شوند. روش تبدیل انتگرال از بسط توابع ویژه کوتاه شده استفاده می‌کند (کوتا [1] و همکاران، ۱۹۹۳). پژوهش حاضر جهت دستیابی به توزیع نرمال لگاریتمی [2] یا همان تابع توزیع احتمال شرطی با توجه به قیمت روز سهام، بر مدل بلک-شولز [3] تکیه نموده است که مشهورترین مدل برای ارزش گذاری اختیار معامله‌های اروپایی است و در سال ۱۹۷۳ ارائه شده است. مدل بلک-شولز برای ارزیابی اختیارات به نوسانات ثابت متکی است که گرچه نمایانگر پویایی در بازارهای مالی نیست ولی این مدل از مزایایی همچون سادگی و برخورداری از فرم صریح برای قیمت اختیار معامله برخوردار است (شاکران، ۱۳۹۱).

از طرفی در پژوهش حاضر تنها بحث قیمت‌گذاری مطرح نیست بلکه کالیبراسیون مدل که یک فرآیند حیاتی است جهت این موضوع طراحی شده است که تفاوت بین قیمتهای مشاهده شده و قیمتهای مدل را به حداقل برساند. روال قیمت گذاری برای ابزارهای مشتقه، دو مجموعه متغیر را به عنوان ورودی در نظر می‌گیرد که: (الف) پارامترهای بازار و (ب) پارامترهای مدل است. پارامترهای بازار ویژگی‌های ابزار مشتقه را که در قرارداد مشخص شده است منعکس می‌کنند، مانند سررسید قرارداد، قیمت توافقی و موارد مشابه، که کاملاً مستقل از مدل هستند. پارامترهای مدل که مربوط به انتخاب مدل برای تکامل فرآیند دارایی پایه است، ذهنی هستند و کاملاً به مدل

[1] Cotta
[2] Log Normal
[3] Black Scholes

وابسته‌اند. همه مدل‌های قیمت گذاری به یک مجموعه پارامترها نیاز دارند تا پویایی هر مدل را به طور کامل مشخص کنند. برای اینکه یک مدل در بازارهای واقعی کارا باشد و برای قیمت گذاری، مدیریت ریسک قابل استفاده باشد، باید کالیبراسیون را انجام دهیم. کالیبراسیون فرآیند تعیین یک پارامتر است به گونه ای که قیمت مدل و قیمت بازار برای مجموعه معینی از ابزارهای قابل معامله با یکدیگر بسیار مطابقت داشته باشند. این ابزارهای مدل سازی، ابزار معیار [1] یا کالیبراسیون [2] نامیده می‌شوند. روش به اصطلاح کالیبراسیون، پارامتر بهینه تنظیم شده برای مدل را بر اساس ابزارهای کالیبراسیون ارائه می‌دهد (هیرسا و همکاران [3]، ۲۰۱۴). روش کالیبراسیون در شرکت‌های سرمایه گذاری مرتبا پیاده‌سازی و اجرا می‌شود، به عنوان مثال دو یا سه بار در روز جهت اینکه مدل کالیبراسیون مورد استفاده و قیمت‌های مشتق شده از آن نزدیک به معادل‌های دنیای واقعی بازار باشد. نهایتا آنها همچنین می‌توانند فرصت‌های آربیتراژ را در میان مشتقات قابل معامله، مشاهده نمایند و این روش (کالیبراسیون) آن را از سایر روش‌ها متمایز می‌نماید (هیرسا و همکاران، ۲۰۱۴).

در صورت استفاده از مدلی که مجموعه پارامترهای آن بزرگتر از مجموعه قیمت ابزار کالیبراسیون باشد، بدیهی است که راه حل منحصر به فرد نخواهد بود. در این حالت گفته می‌شود مدل بیش از حد پارامتر سازی شده است. این امر اغلب در بازارهایی با تعداد کمی مشتقات و پویایی پیچیده ایجاد می‌شود. در حالت پارامترسازی بیش از حد [4]، ابزارهای کالیبراسیون، هیچ مجموعه ای از پارامترها در مدل را ایجاد نمی‌کند که قیمت‌های مدل دقیقا با قیمت‌های بازار تطبیق داشته باشد. بنابراین در عمل، یک راه حل تقریبی با حل یک مسئله بهینه‌سازی مناسب تعیین می‌شود. در مقابل، نیز حالتی وجود دارد که مدل توانایی تولید مجموعه کاملی از قیمت‌ها برای مجموعه ابزارهای کالیبراسیون را ندارد. این نوع مساله مربوط به کم پارامترسازی [5] است. بهترین حالت برای آن قیمت گذاری آپشن‌ها در چارچوب بلک –شولز است، جایی که فقط یک پارامتر آزاد به نام نوسان وجود دارد. در مورد کم پارامتر سازی، مدل به طور معمول به گونه ای کالیبره می‌شود که زیرمجموعه‌های کوچکتر از ابزار کالیبراسیون قیمت‌های بازار خود را با قیمت مدل تحت پارامترهای مختلف مدل مطابقت دهند. بارزترین مثال، سطح نوسان کلاسیک بلک –شولز است، که در آن نوسانات کالیبره شده برای هر آپشن قابل معامله با نقدینگی وجود دارد (هیرسا و همکاران، ۲۰۱۴).

همچنین هنگامی‌که صحبت از قیمت گذاری مشتقات مالی به میان می‌آید، روش مونت کارلو به دلیل اینکه در دسترس ترین روش موجود است، در ایران مورد توجه موسوی و همکاران (۱۳۹۵) بوده است. اما روش مونت کارلو نیز بدون نقص نیست. چون در هنگام گسسته سازی، جواب تقریبی تلاطم SDE در زمان به سمت منفی شدن متمایل می‌شود و این امر از آنجا که موجب پیچیده شدن تلاطم دارایی پایه می‌گردد، مدل را شکست پذیر می‌کند. لذا با استفاده از بهینه سازهای مختلف با یک رویکرد خاص که در پژوهش حاضر الگوریتم بهینه‌سازی

[1] Benchmark
[2] Calibration
[3] Hirsa et al
[4] Over-parametrization
[5] Under-parameterized

ازدحام کبوتر و بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها انتخاب شده است، کالیبراسیون مدل را با داده‌های حاصل از بازار واقعی انجام می‌دهیم که در این خصوص از داده‌های روزانه قابل دسترس از سایت بورس اوراق بهادار تهران استفاده خواهیم نمود.

لازم به ذکر است یک مدل قیمت گذاری باید به طور ایده آل یک استراتژی پوشش ریسک را فراهم کند که در آن می‌توان از عدم اطمینان به طور کامل اجتناب کرد. متأسفانه، در ادبیات پژوهشی داخل کشور کاملا مشهود است که حتی تعریف مناسبی از کالیبراسیون ارائه نشده است و عمدتا متداول است که از روش‌های قیمت گذاری به تنهایی استفاده نمایند که البته منجر به خطاهای قابل توجهی خواهد شد. لذا پژوهش حاضر با بهره‌بردن از تکنیک کالیبراسیون و استفاده از از تکنیک تبدیل انتگرالی مبتنی بر روش ذوزنقه‌ای، سعی در قیمت گذاری عادلانه اوراق اختیار معامله و نزدیک شدن آن‌ها به واقعیات بازار دارد. لذا پژوهش حاضر با این پرسش روبرو است که آیا کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی مبتنی بر الگوریتم‌های بهینه‌سازی، توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشر شده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد؟

مبانی نظری و پیشینه پژوهش

تکنیک‌های تبدیل انتگرالی یک عملگر ریاضی ایجاد می‌کنند که با استفاده از آن یک تابع جدید از طریق انتگرال‌گیری از حاصلضرب یک تابع موجود در هسته تبدیل در حدود مناسب تولید می‌شود. هسته یک تبدیل انتگرالی همراه با حدود موجود در آن، آن تبدیل را از سایر تبدیل‌های انتگرالی متمایز می‌سازد. استفاده از تبدیل‌های انتگرالی در حل معادلات دیفرانسیل ازجمله معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی ADRE بسیار کارگشا است. این تکنیک بر استفاده از توابع ویژه استوار بوده و توانایی حل معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه و مرزی ساده و پیچیده رادار است (باوندپوری گیلان و همکاران، ۱۳۹۶).

لزوم توجه به حرکت‌های بزرگ بازار و مقادیر زیادی از اطلاعات که به طور ناگهانی بازار را تحت تأثیر قرار می‌دهد، موجب شد که توجه پژوهش حاضر به کالیبراسیون قیمت‌های اوراق مشتقه معطوف شود. با شناسایی تابع هدف، انواع طرح‌های بهینه‌سازی که می‌توانند برای حل مساله بهینه‌سازی استفاده شوند، به سه دسته اصلی تقسیم می‌شوند: محلی، جهانی و ترکیبی. طرح‌های محلی با یک مجموعه پارامترهای اولیه شروع می‌شوند و سعی می‌کنند با استفاده از گرادیانت آن در جهت حداقل کردن تابع هدف حرکت کنند. اگرچه اجرای آنها نسبتاً آسان است و می‌توانند بسیار کارآمد باشند، اما محدودیت اصلی این الگوریتم‌ها این واقعیت است که آنها با دنبال کردن گرادیانت تابع هدف از محل مجموعه پارامترهای اولیه، فقط نمای محلی از فضای جستجو را حفظ می‌کنند. به همین دلیل، عملکرد آنها نسبت به انتخاب پارامترهای اولیه بسیار حساس است. بهینه‌سازی جهانی مسائل، همانطور که از نامش پیداست، سعی می‌کنند یک دید کلی از فضای جستجو را حفظ کنند. آنها این امر را با استفاده از جمعیتی از افراد که به طور همزمان در فضای جستجو کاوش می‌کنند، مانند الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر [1] انجام می‌دهند. روش‌های مبتنی بر جمعیت مانند DSO به دلیل تقریبی بودن راه حل دقیق یک مسئله، به عنوان

[1] Dove Swarm Optimization (DSO)

روشهای ابتکاری طبقه بندی می‌شوند. آنها در کاوش فضای جستجو و شناسایی مناطقی که بهینه‌سازی بالقوه در آن واقع شده‌اند بسیار کارآمد هستند (جهت مطالعه بیشتر این الگوریتم به پژوهش خردیار و همکاران (۱۳۹۷) رجوع شود). تمرکز پژوهش حاضر بر دو الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر و بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها می‌باشد.

توجه پژوهش‌های خارجی متعددی به بحث کالیبراسیون و قیمت گذاری اوراق مشتقه معطوف بوده است از جمله الغلیث [۱] (۲۰۲۰)، در پژوهش خود تحت عنوان " قیمت گذاری آپشن‌ها تحت نوسانات و جهش‌های تصادفی همزمان: یک فرمول ساده بسته بدون روش‌های عددی / محاسباتی " یک فرمول فرم بسته ارائه نمود که به هیچ روش عددی/ محاسباتی نیاز ندارد. فرمول ساده مانند فرمول کلاسیک قیمت گذاری بلک-شولز است. علاوه بر این، همزمان جهش و نوسانات تصادفی را نیز بررسی نمود. رویکرد وی حاکی از معرفی کلاس جدیدی از فرآیندهای تصادفی است که بر اساس جبرهای کلیفورد ساخته شده است. این رویکرد را می‌توان به راحتی برای مسائل بعدی بالاتر تعمیم داد.

مادان [۲] و همکاران (۲۰۱۹)، در پژوهش خود تحت عنوان " کالیبراسیون پیشرفته مدل در آپشن‌های منتشر شده بر بیت کوین"، از طریق آپشن‌های وانیلا [۳] موجود در بازار، پویایی قیمت بیت کوین [۴] را بررسی نمودند و یک سری مدل‌های مارکوف را روی سطح آپشن‌ها کالیبره نمودند. به طور خاص، آن‌ها مدل بلک-شولز، مدل لاپاس [۵]، پنج مدل مربوط به گاما واریانس را در نظر گرفتند. نتایج آن‌ها حاکی از آن است که مدل‌های تصادفی عملکرد بهتری داشته‌اند.

هونگ [۶] و همکاران (۲۰۱۹)، در پژوهش خود تحت عنوان " اثر اهرم بر نوسانات تصادفی برای قیمت گذاری آپشن‌ها در هنگ کنگ: یک مطالعه شبیه سازی و تجربی"، اهمیت ترکیب اثر اهرم مالی در مدل‌های نوسانات تصادفی هنگام قیمت گذاری آپشن‌ها را بررسی می‌کند. ابتدا آزمایش شبیه سازی را با استفاده از روش نمونه گیری زنجیره ای مارکوف مونت کارلو [۷] انجام دادند. سپس با استفاده از مدل‌های نوسانات در داده‌های بازگشت واقعی شاخص هنگ سنگ [۸] در بازه زمانی از ۱ ژانویه ۲۰۱۳ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۱۷، یک مطالعه تجربی انجام دادند. نتایج آن‌ها دقت مدل‌های نوسان تصادفی وقتی اهرم بالاست در قیمت گذاری آپشن نشان می‌دهد. بعلاوه، با افزایش سررسید اختیارات، اثر اهرم قابل توجهتر می‌شود.

اما با توجه به آنچه در بحث مقدمه عنوان شد و مرور ادبیات تجربی و چارچوب موضوع پژوهش حاضر، می‌توان به خوبی دریافت که در خصوص موضوع پژوهش حاضر در کشور تنها تعداد معدودی پژوهش به بررسی قیمت گذاری اختیار معامله پرداخته‌اند و شکل درستی از این مدل را ارئه ننموده‌اند. در میان پژوهش‌های داخلی صاحبی فرد و همکاران (۱۳۹۹)، در پژوهش خودت تحت عنوان "قیمت گذاری اختیار معاملات توانی بر مبنای مدل

[1] Alghalith
[2] Madan
[3] vanilla options
[4] BTC
[5] Laplace
[6] Hong
[7] MCMC
[8] Hang Seng

هستون (شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران)"، به قیمت گذاری اختیار معاملات توانی تحت مدل هستون بر مبنای اطلاعات روزانه شاخص بورس اوراق بهادار تهران است. بر این اساس با بررسی دوره‌های زمانی مختلف بازار اوراق بهادار تهران، دوره ای در بازه زمانی آذر ماه ۱۳۸۷ تا تیر ماه ۱۳۹۷ که شاخص بورس از تبعیت بیشتری نسبت به مدل هستون برخوردار است انتخاب گردید. در این مقاله، قیمت گذاری در دو بخش با بازه‌های زمانی متفاوت انجام و برای حل مدل اصلی از روش تبدیل فوریه سریع استفاده شده است. نتایج قیمت گذاری فرضی نشان می‌دهد که قیمت گذاری اختیار معاملات مدل توانی نمی‌تواند از مدل هستون تبعیت داشته باشد و باعث ایجاد شرایط آربیتراژ در بازار بورس خواهد شد.

ابوالی و همکاران (۱۳۹۸)، در پژوهش خود تحت عنوان "قیمت‌گذاری اختیار معامله با روش تحلیلیِ جدید برای معادله بلک-شولز"، با تمرکز بر معادله ی شرودینگر گونه اصلی بلک شولز و حل این معادله با روش نیکی وورو - اوواروف، روشی متفاوت و جدید برای اثبات و بهبود معادله ی بلک شولز ارزیابی گردید. در ادامه، ضمن بررسی امکان بهبود معادله بلک شولز با این روش، معادلهای جدید برای قیمت گذاری اختیار معامله ارائه و آزمون گردید. افزایش دقت قیمت گذاری معامله‌های اختیار با استفاده از معادله ی ارائه شده به ویژه برای معامله‌های با بهای بالا، بررسی حل منطقی به روشی جدید، قابلیت مقایسه خروجی با حل عددی و نوآوری فرمول نهایی اختیار برحسب توابع چند جمله ای لاگر، از اهداف انجام پژوهش حاضر بوده است. نتایج نشان داد؛ امکان اثباتی متفاوت برای معادله ی بلک شولز از طریق حل معادله دیفرانسیل به روش نیکی وورو - اوواروف امکان پذیر بوده و در سطح اطمینان ۹۵ درصد، بین قیمت گذاری دو گروه اصلی بلک شولز و مدل جدید ارائه شده، تفاوت معنی داری وجود ندارد. به منظور مقایسه ی بین خروجی مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز از اطلاعات ۵۰ اختیار معامله سکه در فرابورس ایران محدود به بازه زمانی ۱۳۹۴ لغایت ۱۳۹۷ استفاده و از آزمون مقایسه ای دو گروه مستقل ناپارامتریک من ویتنی استفاده گردید.

باوندپوری گیلان و همکاران (۱۳۹۶)، در پژوهش خود تحت عنوان "حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر دلخواه با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته" معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی در رودخانه با ضرایب وابسته به مکان با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، (GITT)، در دامنه‌ای با طول محدود حل شده است. در تکنیک GITT تبدیل‌های مستقیم و معکوسی تعریف می‌شود که استفاده از آن‌ها در حل مسئله منجر به تولید دستگاهی از معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان و بنابراین ساده شدن حل معادله حاکم بر پدیده می‌گردد. صحت‌سنجی پاسخ تحلیلی ارائه شده با استفاده از مقایسه نتایج به‌دست آمده از مدل ریاضی با حل‌های تحلیلی موجود در منابع و نیز روش عددی مبتنی بر تفاضل‌های محدود انجام شد. مقایسه نتایج GITT و حل‌های تحلیلی استفاده شده در صحت‌سنجی و حل عددی به همراه شاخص‌های آماری، نشان از دقت بسیار بالای راه‌حل ارائه شده دارد. همچنین برای نشان دادن اهمیت به‌کارگیری ضرایب متغیر در معادله انتقال آلاینده در رودخانه، نتایج حل معادله با ضرایب ثابت و حل معادله با ضرایب متغیر مقایسه شد. محاسبه شاخص‌های آماری در این حالت بیانگر عدم دقت کافی نتایج معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت است.

فرضیه‌های پژوهش

فرضیه اول: کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی مبتنی بر بهینه‌سازی ازدحام کبوتر، توانایی تخمین قیمت اختیار خرید منتشر شده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد.

فرضیه دوم: کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی مبتنی بر بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها، توانایی تخمین قیمت اختیار خرید منتشر شده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد.

روش پژوهش

بخش اول: تکنیک تبدیل انتگرالی

متغیرهای مورد استفاده در تکنیک تبدیل انتگرالی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

S_0: قیمت روز سهام [1](که مقداری مشخص است)

K: قیمت توافقی[2](که مقداری مشخص است)

T: زمان تا سررسید[3] بر حسب سال (که مقداری مشخص است)

$v_0(K,T)$: بهای پرداختی optionها بابت قیمت توافقی k و سررسید T [4]

S_T:قیمت سهام در روز T [5](که مقداری نامشخص است)

r:نرخ بهره بدون ریسک (که مقداری نامشخص است)

قدم اول: تعیین توابع

پژوهش حاضر به دنبال این است که ابتدا مقدار S_T را تعیین نموده و سپس به قیمت گذاری اوراق مد نظر بپردازد. چرا که تغییر قیمت سهم منجر به نوسان بازار می‌شود و اگر S_T مقداری مشخص باشد دیگر اوراق اختیاری وجود نخواهد داشت و روند بازار مشخص خواهد بود. برای قیمت گذاری اوراق مشتقه مهم ترین قدم تعیین تابع پرداختی[6] می‌باشد که برای اختیار خرید به صورت (فرخی و همکاران، ۱۳۹۵):

$$Call: (S_T - K)^+ = Max(S_T - K, 0) \qquad \text{رابطه ۱}$$

در صورت استفاده از اختیار خرید یا فروش تابع پرداختی هیچ گاه منفی نخواهد بود (یا برابر با صفر است یا مقداری مثبت). لذا مقدار $S_T - k$ مثبت است، یعنی اگر در تاریخ انقضا قیمت سهم بیشتر از قیمت توافقی شود، اوراق اختیار خرید اعمال خواهد شد. تابع مد نظر برای اختیار فروش نیز به صورت:

$$Put: (K - S_T)^+ = Max(K - S_T, 0) \qquad \text{رابطه ۲}$$

---

[1] Spot price

[2] Strike price

این مقدار در تعدادی کتب و مقالات با نام لاتین X نیز مشخص می شود.

[3] Time to maturity

[4] اگر به دنبال ارزش گذاری اختیار فروش باشیم این مقدار به صورت P_0 و اگر به دنبال ارزش گذاری اختیار خرید باشیم این مقدار به صورت V_0 نشان داده می شود.

[5] Spot price

[6] Payoff function

اگر در تاریخ انقضا قیمت سهم کمتر از قیمت توافقی شود، اوراق اختیار فروش اعمال خواهد شد.
مورد بعدی که نیاز است تابع توزیع احتمال شرطی[1] قیمت سهام در زمان سر رسید T است و نشانه گذاری آن به صورت $f(S_T|S_0)$ می‌باشد که مقدار آن به قیمت روز سهام وابسته است و به همین دلیل نامگذاری آن با واژه شرطی همراه است. به طور خلاصه با این فرضیه رو برو هستیم که اگر قیمت روز سهام S_0 است، توزیع قیمت آینده آن یعنی S_T به چه صورت می‌باشد؟ بدین منظور بعد از مشخص نمودن موارد فوق، از مقدار پرداختی نسبت به تابع توزیع احتمال شرطی انتگرال گرفته می‌شود (یاووس[2] و همکاران،۲۰۲۰):

$$\int_0^\infty (S_T-K)^+ f(S_T|S_0)\, ds_T$$

رابطه فوق ارزش اختیار را در تاریخ انقضا رابطه ۳ مشخص می‌کند در حالیکه ارزش روز آن مد نظر است. بدین منظور باید مقدار فوق را تنزیل کرده و به فاکتور تنزیل[3] نیاز است. لذا:

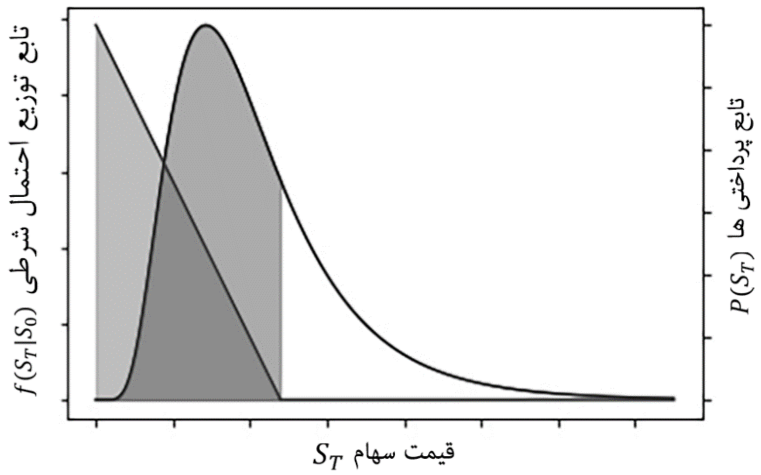
$$C_0(K,T)=e^{-rT}\int_0^\infty (S_T-K)^+ f(S_T|S_0)\, ds_T=e^{-rT}\int_k^\infty (S_T-K)\ f(S_T|S_0)\, ds_T$$

در رابطه اخیر جهت تسهیل محاسبات، بازه انتگرال از k تا بی نهایت گرفته شده تا مستقیما به مقدار مثبت آن دست یافت. در خصوص اختیار فروش تنها چیزی که تغییر می‌کند تابع پرداختی است و تابع توزیع احتمال شرطی تغییری نخواهد داشت. لذا:

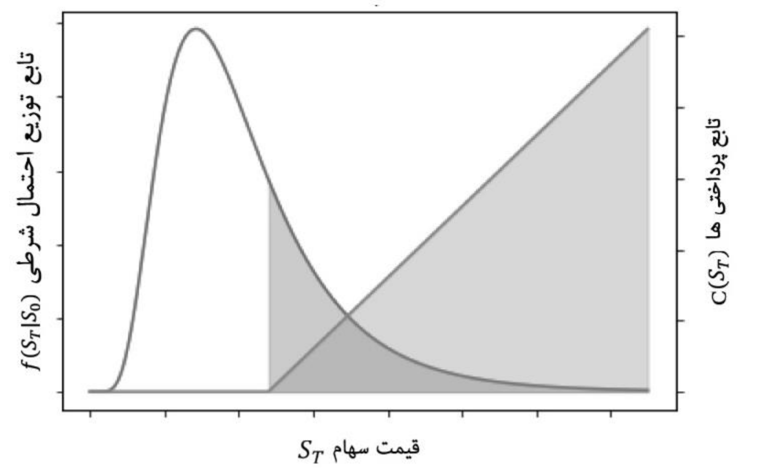
$$P_0(K,T)=e^{-rT}\int_0^\infty (K-S_T)^+ f(S_T|S_0)\, ds_T=e^{-rT}\int_0^K (K-S_T)\ f(S_T|S_0)\, ds_T$$

در رابطه ۵ نحوه قیمت گذاری اختیار فروش با استفاده از روابط ریاضی تشریح گردید. در ادامه شکل ۱ نحوه قیمت گذاری اختیار فروش با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی را به صورت مصور نشان می‌دهد. آنچه مد نظر است سطح زیر منحنی تابع توزیع احتمال شرطی و تابع پرداختی‌هاست و قسمت خالی زیر منحنی اهمیتی ندارد چرا که حاصلضرب هر مقداری در صفر برابر با صفر خواهد بود.

[1] Conditional Probability Distribution Function (PDF)
[2] Yavuz
[3] Discount factor



شکل ۱: نحوه قیمت گذاری اختیار فروش با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی



شکل ۲: نحوه قیمت گذاری اختیار خرید با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی

قدم دوم: ارزیابی عددی انتگرال

پس از تبیین انتگرال برای اوراق اختیار، جهت محاسبه پذیر بودن انتگرال و کوتاه نمودن هزینه محاسبات لازم است محدوده محاسبات مشخص شود. بدین ترتیب بجای ∞ با قرار دادن عددی به اندازه کافی بزرگ (B) و تعیین زیر فاصله‌های مساوی [1]، به طول η هر زیر فاصله را ارزیابی کرده و با یکدیگر جمع می‌کنیم. بدین ترتیب در هر

[1] Equal sub-intervals

زیر فاصله به تعداد n، زیر انتگرال [1] خواهیم داشت. بدین ترتیب هر کدام از این زیر انتگرال‌ها را ارزیابی عددی کرده و با هم جمع می‌کنیم. لازم به ذکر است علامت مساوی در روابط ۴ و ۵ تبدیل به تقریب خواهد شد(یاووس و همکاران،۲۰۲۰):

$$C_0(K,T) = e^{-rT} \int_{K}^{\infty} (S_T - K)\ f(S_T)\, ds_T \approx e^{-rT} \int_{k}^{B} (S - K)\ f(S)\, ds$$

انتخاب η (طول هر زیر فاصله) و N بطور مستقل صورت می‌پذیرد و بدین ترتیب مقدار B (کران بالا) مشخص خواهد شد. بدین ترتیب حلقه ای خواهیم داشت که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_j = K + (j-1)\eta \quad \text{for } j = 1, \dots, N+1 \qquad \text{رابطه ۷}$$

و مقدار B برابر خواهد بود با:

$$B = S_{N+1} = K + N\eta \qquad \text{رابطه ۸}$$

در خصوص اوراق اختیار فروش، کران بالا از قبل مشخص و برابر k است. با انتخاب N و مجموعه $\eta = \frac{K}{N}$. بدین ترتیب حلقه ای خواهیم داشت که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_j = (j-1)\eta \quad \text{for } j = 1, \dots, N+1 \qquad \text{رابطه ۹}$$

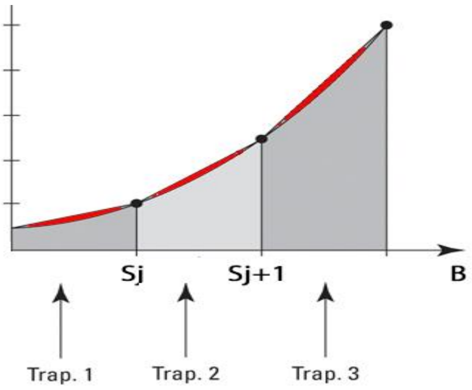
با بازنویسی مجدد رابطه ۶ خواهیم داشت:

$$C_0(K,T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^{N} \int_{sj}^{sj+1} (S - K)\ f(S)\, ds$$

بدین ترتیبN زیر انتگرال (یعنی بخش $\int_{sj}^{sj+1} (S-K)\ f(S)\, ds$) خواهیم داشت، که در ادامه یکی از این بخش‌ها را با کمک روش ذوزنقه‌ای [2] به کمک کد نویسی پایتون ارزیابی عددی نموده و با استفاده از آن به طور تقریبی هر زیر انتگرال تقریب زده می‌شود. شکل ۳ کلیه این روابط را به صورت مصور نشان می‌دهد. ناحیه ای که با رنگ قرمز مشخص شده است بخشی است که در ازای محاسبات تقریبی از دست می‌رود. هر اندازه η کوچکتر باشد، تقریب به اندازه واقعی نزدیکتر خواهد شد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\int_{sj}^{sj+1} (S - K)\ f(S)\, ds \approx \frac{\eta}{2}\left((s_j - K)f(S_j) + (s_{j+1} - K)f(S_{j+1})\right)$$

[1] Sub-integrals
[2] Trapezoidal Rule



شکل۳: ارزیابی عددی تکنیک تبدیل انتگرالی به کمک Trapezoidal Rule

با جایگزین کردن رابطه ۱۰ در رابطه ۱۱ خواهیم داشت:

$$C_0(K,T) \approx e^{-rT}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta}{2}\left(\left(s_j-K\right)f\left(S_j\right)+\left(s_{j+1}-K\right)f\left(S_{j+1}\right)\right)$$
$$\approx e^{-rT}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta}{2}\left(s_j-K\right)f\left(S_j|S_0\right)W_j \quad , \quad W_j=\begin{cases}\frac{1}{2}\eta & j=1\\ \eta & \text{غیره}\end{cases}$$

برای اختیار فروش نیز خواهیم داشت:

$$P_0(K,T) \approx e^{-rT}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta}{2}\left(K-S_j\right)f\left(S_j|S_0\right)W_j \qquad , \quad W_j=\begin{cases}\frac{1}{2}\eta & j=1\\ \eta & \text{غیره}\end{cases}$$

با توجه به اینکه رابطه گفته شده برای تعداد N زیر انتگرال محاسبه می‌شود، لذا هزینه محاسبات آن برابر است با O(N). جهت دستیابی به توزیع نرمال لگاریتمی[1] یا همان تابع توزیع احتمال شرطی با توجه به قیمت روز سهام، با تکیه بر مدل بلک شولز صورت زیر عمل خواهیم کرد:

$$f(S_T|S_0) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T-\ln S_0-\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}}{\sigma S_T\sqrt{2\pi T}}$$

[1] Log Normal

بخش دوم: کالیبراسیون مدل

پروسه تطبیق مدل‌ها به داده‌های بازار که کالیبراسیون مدل نامیده می‌شود، مستلزم استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی با هدف شناسایی مجموعه پارامترهای مدل است که قیمت مدل برای آنها با قیمت بازار مطابقت دارد. هرچه کالیبراسیون بهتری حاصل شود، اعتبار پیش بینی یک مدل بالاتر است و به عنوان ابزاری برای مدیریت ریسک و بهینه‌سازی اوراق بهادار ارزشمندتر می‌شود (کاوچو[1]، ۲۰۱۷). کالیبراسیون معمولاً با تعیین یک تابع هدف شروع می‌شود تا میزان خطا حداقل شود. در پژوهش حاضر تابع هدف استفاده از میانگین درصد قدرمطلق خطا [2]می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min \frac{1}{i}\sum_{i=1}^{i}\frac{|C_i^{model}-C_i^{market}|}{C_i^{market}}$$ رابطه شماره ۷

که در آن:

i تعداد کل داده‌ها

C_i^{market}: قیمت اختیار معامله بازار

C_i^{model} : قیمت اختیار معامله تخمینی

چنانچه اشاره شد با شناسایی تابع هدف، درمیان انواع طرح‌های بهینه‌سازی که می‌توانند برای حل مساله بهینه‌سازی فوق استفاده شوند، از بهینه‌سازی جهانی استفاده خواهد شد. چرا که سعی می‌کنند یک دید کلی از فضای جستجو را حفظ کنند. در پژوهش حاضر دو الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر و کلونی مورچگان مد نظر است. برای کالیبراسیون مدل، یک مجموعه داده ایجاد می‌شود که قیمت نقطه شروع S_0 برابر با x تومان، قیمت توافقی K نیز y و سررسید T سال محاسبه می‌شود و در نتیجه سطح کالیبراسیون را بدست خواهیم آورد (هیرسا و همکاران، ۲۰۱۴). در کاربردهای عملی، ما می‌توانیم نرخ بهره کلیدی را بدست آوریم و منحنی عملکرد را با استفاده از یک مدل ساختار بلند مدت مانند مدل نلسون-سیگل [3]به دست آوریم که نرخ بهره منحصر به فرد را در کل دوره سررسید بدست آورد. با این حال، از آنجا که تمرکز پژوهش حاضر بر روی کالیبراسیون است، این مرحله حذف شده است. از پارامترهای فوق الذکر برای ایجاد قیمت‌های پیش بینی استفاده خواهد شد.

یافته‌های پژوهش

جهت پیاده‌سازی مدل مطرح شده، پژوهش حاضر از داده‌های اختیار خرید عرضه شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده نموده است و به عنوان نمونه اطلاعات اختیار خرید سهام شرکت سایپا با نماد ضسپا۳۰۱۶ (اختیارخ خساپا ۲۵۰۰-۱۴۰۱/۰۳/۲۵) برای سر رسید خرداد ماه ۱۴۰۱ را مورد استفاده قرار داده است. بدین منظور جهت محاسبه تغییر پذیری قیمت سهام و نوسانات آن یک دوره زمانی یک ساله در دسترس از داده‌ها (فرودین ماه ۱۴۰۰ الی ابتدای ۱۴۰۱) مد نظر می‌باشد. مشخصات کلی این قرارداد در جدول ۱ نشان داده شده است:

---

[1] Kovochev
[2] Mean Absolute Percentage Error (MAPE)
[3] Nelson–Siegel

جدول ۱: اطلاعات اختیار خرید مورد استفاده در پژوهش

اختیارخ خساپا- ۲۵۰۰-۱۴۰۱/۰۳/۲۵	
اندازه قرارداد	۱۰۰۰ سهم
تاریخ سررسید	۲۵ خرداد ماه ۱۴۰۱
تاریخ اولین معامله سهم در بازار اوراق مشتقه	۱۴۰۰/۱۱/۰۵
سبک اعمال قرارداد	اروپایی
دامنه نوسان	ندارد
قیمت اعمال (ریال)	۲۵۰۰
قیمت دارایی پایه در تاریخ اولین معامله (ریال)	۱۴۵۰

منبع: وب سایت بورس اوراق بهادار تهران (www.tse.ir)، شرکت مدیریت فناوری بورس تهران (www.tsetmc.ir)

جهت دست یابی به تابع توزیع نرمال لگاریتمی(تابع توزیع احتمال شرطی) کدنویسی زیر در پایتون صورت پذیرفت و پارامترهای ثابت مدل مقداردهی شد.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time
```

```
# Fixed Parameters
S0 = 1450
K = 2500
r = 0.18
q = 0.01
sig = 0.36
T = 0.389
```

```
#step-size
eta = 0.20

# number of grid points
n = 15
N = 2**n

# model under consideration
model = 'LogNormal'
```

```
def logNormal(S, r, q, sig, S0, T):

    f = np.exp(-0.5*((np.log(S/S0)-(r-q-
sig**2/2)*T)/(sig*np.sqrt(T)))**2)/(sig*S*np.sqrt(2*np.pi*T))
    return f
```

```
def evaluateIntegral(*args):

    r   = args[0]
    q   = args[1]
    S0  = args[2]
    K   = args[3]
    sig = args[4]
    T   = args[5]
    N   = args[6]
    eta = args[7]

    #discount factor
    df = np.exp(-r*T)
```

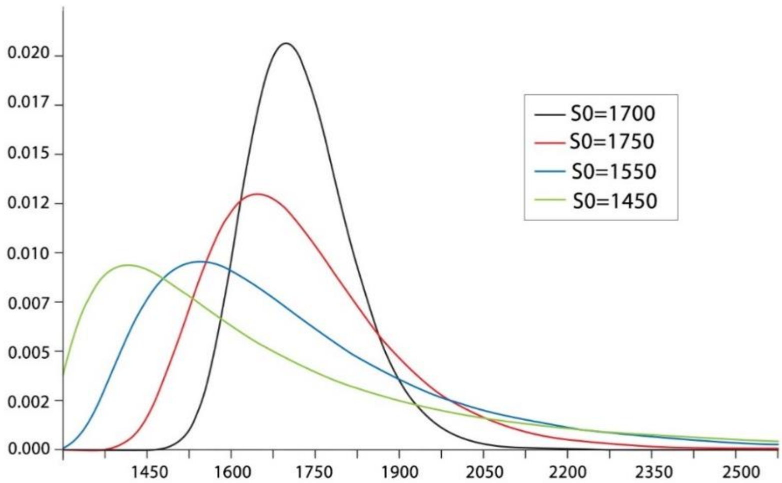
```
# evaluation of the integral using Trapezoidal method
    sumC = 0
    sumP = 0

    S = np.zeros((N,1))
    for j in range(N):
        S[j] = 1.0+j*eta

    tmp = logNormal(S, r, q, sig, S0, T)

    for j in range(N):
        if j == 0:
            wj = eta/2
        else:
            wj = eta

        if (S[j] > K):
            sumC += (S[j]-K)*tmp[j]*wj

        if (S[j] < K):
            sumP += (K-S[j])*tmp[j]*wj

    c0_KT = df * sumC
    p0_KT = df * sumP

    return c0_KT, p0_KT
```

```
 # plotting lognormal density f(S|S0)

S = np.zeros((N,1))
for i in range(N):
    S[i] = eta+i* eta

f = logNormal(S, r, q, sig, S0, T)
```

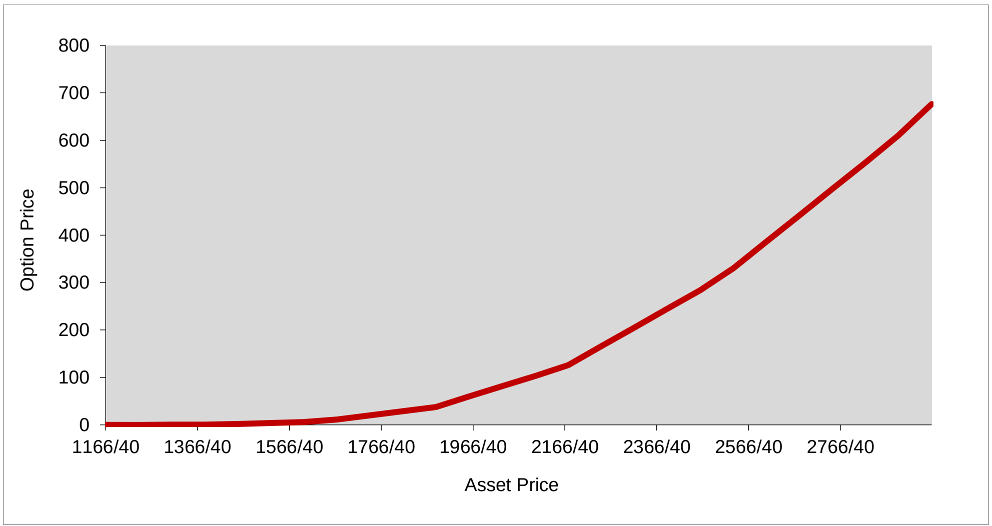
```
plt.plot(S, f)
plt.xlabel('$S_T$')
plt.ylabel('lognormal density $f(S_T|S_0)$')
plt.show()
```

```
start_time = time.time()
arg = (r, q, S0, K, sig, T, N, eta)
c0_KT, p0_KT = evaluateIntegral(*arg)
print(c0_KT)
elapsed_time = time.time() - start_time
print(elapsed_time)
```

شکل ۴ توزیع نرمال لگارتیمی برای مقادیر مختلف قیمت دارایی پایه را نشان می‌دهد.



شکل ۴: تابع توزیع احتمال شرطی برای مقادیر مختلف S_0اختیار خ خساپا



شکل ۵: قیمت قرارداد اختیار بر اساس مقادیر مختلف S_T اختیار خ خساپا

جدول ۲ مقایسه زمان محاسباتی (برحسب ثانیه) کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی DSO و ACO با تغییر مقادیر N و تکرار محاسبات برای ۱۰۰ بار را نشان می‌دهد.

جدول ۲: مقایسه زمان محاسباتی (برحسب ثانیه) کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی DSO و ACO با تغییر مقادیر N و تکرار محاسبات ۱۰۰ بار (سرعت 1GHZ)

S0 = 1450 , K = 2500, r = 0.18 , sig = 0.36 , T = 0.389 , n=12, N=2^n, η = 0.20			
N	زمان محاسبه (ثانیه)		نسبت روش ACO به DSO
	الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها (ACO)	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر (DSO)	
$۲^۹$	۰.۱۹۲۰	۰.۰۱۷۰	۱۱.۲۹
$۲^{۱۰}$	۱.۸۲۲۰	۰.۰۱۵۰	۱۲۱.۴۶
$۲^{۱۱}$	۶.۲۱۳۰	۰.۰۲۳۰	۲۷۰.۱۳
$۲^{۱۲}$	۲۳.۰۴۶	۰.۰۶۸۰	۳۳۸.۹۱
$۲^{۱۳}$	۷۵.۳۹۸	۰.۱۲۵۰	۶۰۳.۱۸
$۲^{۱۴}$	۲۵۷.۷۷	۰.۴۳۴۰	۵۹۳.۹۴
$۲^{۱۵}$	۳۲۰۹.۰۷۰	۰.۹۸۲۰	۳۲۶۷.۸۹

در خصوص $N<2^9$، هر دو الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها و الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر زمان نسبتاً یکسانی برای محاسبه پیچیدگی‌ها نشان دادند، لذا مقادیر قبل از آن در جدول نشان داده نشده است. با توجه به نتایج جدول ۲ در بالا واضح است که الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر بسیار سریعتر از الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها به خصوص برای Nهای بزرگ عمل می‌کند. در واقع، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر تعداد محاسبات مورد نیاز برای N نقطه را از $2N^2$ به 2NlogN کاهش می‌دهد. چنانچه مشخص است در صورتی که محاسبه تابع توزیع نرمال لگاریتمی هزینه بر نباشد (چنانچه در مدل پژوهش نیز نشان داده شد) مدل پیشنهادی از سرعت مناسبی در کسری از ثانیه برخوردار خواهد بود.

در ادامه جدول ۳ میانگین درصد مطلق خطا (MAPE) برای هر دو الگوریتم بهینه‌سازی در وضعیت سوددهی[1]، زیان‌دهی[2] و بی‌تفاوتی[3] نشان می‌دهد:

جدول ۳: میانگین درصد مطلق خطا برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی مورد استفاده در کالیبراسیون در وضعیت سوددهی، زیان‌دهی و بی‌تفاوتی در سناریوهای مختلف سررسید

سررسید	الگوریتم مورد استفاده در کالیبراسیون	وضعیت زیان‌دهی	وضعیت بی تفاوتی	وضعیت سوددهی
کوتاه مدت (<۴۵ روز)	ACO	٪۰.۵۵۸۲	٪۰.۶۰۴۹	٪ ۸.۰۰۱۷
	DSO	٪۱.۲۷۸۷	٪۰.۵۸۴۸	٪ ۷.۸۳۹۲
میان مدت (۴۵-۹۰روز)	ACO	٪۰.۵۳۰۷	٪۰.۳۵۹۹	٪ ۲.۱۸۶۳
	DSO	٪۰.۴۷۰۶	٪۰.۳۱۸۴	٪ ۲.۰۶۲۱
بلند مدت (>۹۰ روز)	ACO	٪۰.۴۵۳۶	٪۰.۲۶۶۵	٪ ۱.۱۰۶۳
	DSO	٪۰.۳۹۴۴	٪۰.۱۸۷۵	٪ ۰.۹۴۹۲

بر اساس نتایج مندرج در جدول ۳، در وضعیت بی تفاوتی و وضعیت سوددهی DSO برای همه سررسیدها بهتر از ACO عمل می‌کند. در وضعیت زیان‌دهی نیز اگرچه DSO در دوره کوتاه مدت ضعیف عمل می‌کند، اما با افزایش زمان تا سررسید، DSO بهتر از ACO در میان مدت و بلند مدت پاسخ داده است. جهت کاهش خطای سناریوی کوتاه مدت-وضعیت سوددهی می‌توان روزهای بیشتری را تجزیه و تحلیل نمود تا مشخص شود هر دو مدل در سناریوی کوتاه‌مدت و وضعیت سوددهی چگونه عمل می‌کنند. اما به طور کلی، تجزیه و تحلیل مجموع داده‌های استفاده شده در حال حاضر نشانه بسیار خوبی از دقت هر دو مدل است.

[1] In-the-Money
[2] Out- of-the-Money
[3] At-the-Money

بحث و نتیجه گیری

پژوهش حاضر تفسیر جدیدی از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم یافته به عنوان یک روش عددی همه منظوره قدرتمند به نام روش تبدیل انتگرال ارائه نمود. این روش مدل‌های معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به یک سیستم غیرخطی جفت شده از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند تا به صورت عددی حل شوند. از طرفی در پژوهش حاضر تنها بحث قیمت‌گذاری مطرح نیست بلکه کالیبراسیون مدل که یک فرآیند حیاتی است جهت این موضوع طراحی شده است که تفاوت بین قیمتهای مشاهده شده و قیمتهای مدل را به حداقل برساند. جهت پیاده‌سازی مدل مطرح شده، پژوهش حاضر از داده‌های اختیار خرید عرضه شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده نموده است و به عنوان نمونه اطلاعات اختیار خرید سهام شرکت سایپا با نماد ضسپا۳۰۱۶ (اختیارخ خساپا ۲۵۰۰-۱۴۰۱/۰۳/۲۵) برای سر رسید خرداد ماه ۱۴۰۱ را مورد استفاده قرار داده است. در ابتدا با کدنویسی در محیط پایتون تابع توزیع احتمال شرطی برای مقادیر مختلف دارایی پایه بدست آمده و در ادامه به کالیبراسیون مدل در سررسیدهای مختلف پرداخته شد. نتایج پژوهش نشان داد روش کالیبراسیون مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر با آنچه در بازار مشاهده می‌شود سازگارتر از روش کالیبراسیون مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها است. پس از تجزیه و تحلیل اوراق اختیار خرید خساپا که در تاریخ ۵ بهمن ۱۴۰۰ معامله شد، نتایج تحلیل‌های پژوهش نشان داد که استفاده از مدل روش کالیبراسیون مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر برای قیمت گذاری اختیار معامله دقیق تر از از روش کالیبراسیون مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها است. مدل کالیبراسیون مبتنی بر DSO زمانی که سررسید طولانی‌تر می‌شود، خطای قیمت‌گذاری بسیار پایینی دارد. بر اساس نتایج حاصله، پیشنهاد می‌شود از مدل مدل کالیبراسیون مبتنی بر DSO برای آپشن‌هایی استفاده شود که در همه ی سناریوهای سررسید در وضعیت بی‌تفاوتی یا سوددهی هستند و در سناریوی میان مدت و بلندمدت در وضعیت زیان‌دهی هستند. در ادامه نیز می‌توان از روش کالیبراسیون مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها برای آپشن‌هایی استفاده کرد که در سناریو کوتاه مدت در وضعیت زیان‌دهی هستند. به طور کلی، الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها در پیش بینی آپشن‌های سررسید کوتاه مدت بهتر است و بهینه‌سازی ازدحام کبوتر برای پیش بینی گزینه‌هایی که دارای سررسید میان مدت و بلند مدت هستند، بهتر است. از محدودیت‌های این مدل می‌توان به این مورد اشاره کرد که بهترین برازش این تقریب بستگی به مقدار N و η دارد. بدین طریق که هر چه مقدار N عددی بالاتر و η کوچکتر باشد، این تقریب بهتر خواهد بود. از آنجاییکه رویکرد معرفی شده از نظر هزینه محاسبات تابع توزیع احتمال شرطی امکانپذیر و عملی است روش پیشنهادی توصیه می‌گردد.

فهرست منابع

* ابوالی، مهدی؛ خلیلی عراقی، مریم؛ حسن آبادی، حسن؛ یعقوب نژاد، احمد. (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اختیار معامله با روش تحلیلیِ جدید برای معادله بلک-شولز، *راهبرد مدیریت مالی دانشگاه الزهرا*، ۷(۲۶)، ۱۵۵-۱۳۵.
* باوندپوری گیلان، ناظم؛ مظاهری، مهدی؛ فتوحی فیروزآبادی، مرتضی. (۱۳۹۶). حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر دلخواه با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، *مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، ۷(۱)، ۸۹-۱۱۶.
* خردیار، سینا، قلیزاده، محمد حسن، لطفی، فروغ. (۱۳۹۷). پیش‌بینی درماندگی مالی با استفاده از روش ترکیبی PCA-ANFIS و الگوریتم فراابتکاری بهینه‌سازی ازدحام کبوتر، *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۹(۳۷)، ۱۵۷-۱۳۳.
* شاکران، زهرا. (۱۳۹۱). ارزش گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت وجود تلاطم تصادفی، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان، ۳-۱۸.
* صاحبی فرد، حسین؛ دسترنج، الهام؛ عطاآبادی، عبدالباقی عبدالمجید. (۱۳۹۹). قیمت گذاری اختیار معاملات توانی بر مبنای مدل هستون (شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران)، *فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه گذاری*، ۹(۳۳)، ۲۵۷-۲۴۱.
* فخاری، حسین؛ ولی پور خطیر، محمد؛ موسوی، سیده مائده. (۱۳۹۶). بررسی عملکرد شبکه عصبی بیزین و لونبرگ مارکوات در مقایسه با مدلهای کلاسیک در پیش بینی قیمت سهام شرکت های سرمایه گذاری. *تحقیقات مالی*، ۱۹(۲)، ۳۱۸-۲۹۹.
* فرخی، زهرا؛ فرخی، فاطمه. (۱۳۹۵). مفاهیم مقدماتی و ارزش گذاری اوراق مشتقه، چاپ اول، تهران: انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع رسانی و خدمات بورس
* کیمیاگری، علی محمد؛ حاجی زاده، احسان؛ دستخوان، حسین؛ رمضانی، مجید. (۱۳۹۶). ارائه یک مدل ترکیبی جدید به منظور قیمت گذاری قراردادهای اختیار اروپایی. *نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید*، ۲۸ (۱)، ۹۹-۸۷.
* موسوی، ساناز؛ سهیلی، علیرضا. (۱۳۹۵). بررسی عددی تطبیق پارامترهای مدل هستون، چهارمین کنفرانس ریاضی و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۵۵-۱۵۱.
* Alghalith, M (2020). Pricing options under simultaneous stochastic volatility and jumps: A simple closed-form formula without numerical/computational methods, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 540,1-4.
* Cotta, R.M., & Mikhailov, M.D. (1993). Integral transform method, Applied Mathematical Modelling, 17(3), 156-161, https://doi.org/10.1016/0307-904X(93)90041-E.
* Hirsa, A., & Neftc, S. N. (2014). An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives (Third edition), Chapter 25 - Overview of Calibration and Estimation Techniques, Academic Press, https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384682-2.00025-6
* Hong, H., Zhicun, B., & Naiwei, C. (2019). Leverage effect on stochastic volatility for option pricing in Hong Kong: A simulation and empirical study, North American Journal of Economics and Finance, 5, 1-25. https://doi.org/10.1016/j.najef.2019.02.003.

* Kovachev, Yavor (2014), Calibration of stochastic volatility models, Project report, UPPSALA Universitet
* Madan, D.B., Reyners, S., & Schoutens, W. (2019). Advanced model calibration on bitcoin options. Digit Finance, 1, 117–137. https://doi.org/10.1007/s42521-019-00002-1.
* Yavuz, M., Abdeljawad, T. (2020). Nonlinear regularized long-wave models with a new integral transformation applied to the fractional derivative with power and Mittag-Leffler kernel. Advances in Continuous and Discrete Models, 367 (2020). https://doi.org/10.1186/s13662-020-02828-1

Financial Economics
Vol. (12) Issue (48) Winter 2024

Calibrating Option Pricing using Generalized Integral Transform Technique based on Trapezoidal Rule

Forough Lotfi
PhD student of Financial engineering, Department of Management, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran
Lotfi.forough@gmail.com

Reza Aghajan Nashtaei*
Department of Business Management, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran
(Corresponding Author)
Nashtaei@iaurasht.ac.ir

Mehdi Meshki Miavaghi
Department of Finance and Accounting, Payame Noor University, Rasht, Iran
mhd.meshki@yahoo.com

Abstract

The present study offers a new interpretation of the Generalized Integral Transform Technique as a powerful numerical method called the Integral Transform method. This method transforms models of nonlinear partial differential equations into a nonlinear system paired with ordinary differential equations to be solved numerically. On the other hand, in the present study, not only pricing is discussed, but also model calibration, which is a critical process, is designed to minimize the difference between the observed prices and the model prices. In order to implement the proposed model, the present study has used the call option data offered in the Tehran Stock Exchange and as a sample, has used the call option information of SAIPA Company shares for the maturity of June 2022. First, the Conditional Probability Distribution Function for different initial values of the underlying asset was obtained by coding in Python environment, and then the model was calibrated at different maturities. The results showed that the model calibration based on the Dove Swarm Optimization algorithm is suitable for options that are in a state of At-the-Money or In-the-Money in all maturity scenarios and are in Out-of-the-Money state in the midterm and long term scenarios. Furthermore, calibration based on the ant colony optimization algorithm can be used for options that are in an Out-of-the-Money state in the short-term scenario.

Keywords: Integral Transform, Trapezoidal method, Calibration, Options Pricing