مقاله پژوهشی

شاپا چاپی: ۷۴۸۰-۲۲۵۱
شاپا الکترونیکی: ۷۴۰۰-۲۲۵۰

نشریه حفاظت منابع آب و خاک

آدرس تارنما:
https://wsrcj.srbiau.ac.ir

پست الکترونیک:
iauwsrcj@srbiau.ac.ir
iauwsrcj@gmail.com

سال دوازدهم
شماره سه (۴۷)
بهار ۱۴۰۲

تاریخ دریافت:
۱۴۰۱/۰۸/۰۷

تاریخ پذیرش:
۱۴۰۱/۰۹/۲۸

صفحات: ۱۱۰-۹۷

حل تحلیلی معادله حاکم بر جریان غیردارسی به روش ریاضی آنالیز هموتوپی

امیرحسین آروین[۱]، محمد هادی فتاحی [۱*]، محمد صدقی‌اصل[۲] و سید عباس محمدی[۳]

۱) گروه مهندسی‌عمران، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران.
۲) گروه علوم‌خاک، دانشکده کشاورزی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.
۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم‌پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.
* ایمیل نویسنده مسئول: fattahi.mh@miau.ac.ir

چکیده:

زمینه و هدف: روش آنالیز هموتوپی (HAM) اولین بار توسط لیائو (۱۹۹۲) برای حل معادلات تابعی پیشنهاد شد. این روش مبتنی بر هموتوپی است و یک راه‌حل تقریبی- تحلیلی برای معادلات تابعی ارائه می‌دهد. در سال‌های اخیر، این روش و اصلاحات آن به طور موثر برای حل طیف وسیعی از مسائل خطی و غیرخطی در علوم کاربردی برای یافتن جواب‌های سری انواع مختلف معادلات غیرخطی، از جمله معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات دیفرانسیل–انتگرال مورد استفاده قرار گرفته است (Abbasbandy et al. 2006). هدف از این تحقیق ارائه یک حل تحلیلی زودیافت با دقت قابل قبول برای معادله غیرخطی جریان غیردارسی در محیطهای درشت دانه با استفاده از روش HAM می‌باشد.که محققان قبلی به انجام تحقیقات بیشتر در این زمینه توصیه کرده بودند.

روش پژوهش: در این پژوهش ابتدا معادله حاکم بر جریان غیردارسی برای اولین بار به روش HAM حل شده است، سپس پروفیل های سطح آب معادله نهایی روش HAM به ازای ۶ دبی ورودی با شرایط مرزی متفاوت در دو محیط متخلخل درشت‌دانه با مصالح گرد و تیزگوشه بدست آورده شد. و نتایج پروفیل سطح‌آب بدست آورده شده از روش HAM با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) که درآزمایشگاه اشتوتگارت آلمان بدست آمده، مقایسه شده است. از تابع هدف نرمال (NOF) برای مقایسه جواب‌های روش HAM با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) استفاده شده است.

یافته‌ها: مقایسه نتایج روش HAM با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل (2010) تحت شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست به ازای دبی‌های متفاوت و با شیب نزدیک به افق S = 0.00001 صورت گرفته است. نتایج نشان داده‌اند که دبی های q=30 lit/s، با درصدخطای NOF برابر 0.000099828 در محیط متخلخل تیزگوشه و q =26.25 lit/s، با درصدخطای NOF برابر 0.000102162 در محیط متخلخل گردگوشه به ازای دبی‌های ورودی بیشتر، دقت بهتری نسبت به داده‌های آزمایشگاهی را دارند. این روش در شیب‌های افق دارای جواب‌های منطقی و پروفیل‌های سطح آب در روش HAM و داده‌های آزمایشگاهی در اکثر نقاط برهم منطبق و یا نزدیک به هم بوده است، در شیب‌های بالاتر به علت تاثیر شیب و نیروی گرانش دچار نوعی تورم در پروفیل جریان می‌شود که از مبحث جریان ماندگار و یکنواخت خارج است و خود نیازمند تحقیق دیگری است.

نتایج: نتایج نشان داده که پروفیل سطح آب در بیشتر موارد به هم نزدیک هستند و نشان دهنده دقت روش توسعه یافته بر پایه آنالیز HAM می‌باشد. با این حال هنگامی که اختلاف تراز آب بالادست و پایین دست زیاد می‌شود، درصد خطا بالا می رود. به عبارت دیگر با افزایش گرادیان هیدرولیکی در محیط متخلخل خطا نیز افزایش می‌یابد. در نهایت با بررسی نتایج روش HAM نسبت به داده‌های آزمایشگاهی، میتوان نتیجه گرفت که این روش، در محیط متخلخل با مصالح تیزگوشه نسبت به مصالح گردگوشه به ازای دبی‌های بیشتر دقت بهتری را نشان می دهد که به دلیل سرعت جریان و تخلخل بالا تر در این محیط می باشد.

کلید واژه‌ها: محیط متخلخل، مصالح گرد و تیزگوشه، روش HAM، حل تحلیلی، داده‌های آزمایشگاهی، نیمرخ سطح آب

10.30495/WSRCJ.2022.70054.11329

مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی غیرخطی، برای مسائل مقادیر اولیه و مرزی بیشترین چالش را در یافتن جواب‌های دقیق خود دارند و یکی از راه‌های تقریبی حل آنها، روش آنالیز هموتوپی (HAM) است. در این روش یک هموتوپی با پارامتر تعبیه‌شده $p\in[0, 1]$ در نظرگرفته می‌شود. این روش اولین بارتوسط لیائو[1] در سال ۱۹۹۲ ارائه شده است .(S. J. Liao. (1992, 2012 ویژگی‌های اساسی و مزایای هوشمندانه روش HAM در مورد تکنیک‌های تحلیلی موجود به وضوح توسط لیائو[2] در کتاب اخیر خود در سال ۲۰۰۳ ارائه شده است. علاوه بر موفقیت اولیه آن در چندین مسئله غیرخطی که در کتاب لیائو[3] در سال ۲۰۰۳ خلاصه شده است، بسیاری از مسائل غیرخطی در علوم، مالی و مهندسی با موفقیت با این روش حل شدند. چند راه‌حل جدید برای برخی مسائل غیرخطی با موفقیت برای حل بسیاری از مسائل در مکانیک جامدات و سیالات به کار گرفته شده است M. Sajid et al. (2009, ؛ Xinhui Si et al . (2012) M. Ayub et al. ؛ T. Hayat et al. (2007)؛ 2008) .(2008) روش HAM آزادی زیادی را در انتخاب توابع پایه مناسب، عملگرهای خطی کمکی، حدس‌های اولیه مجهولات و پارامترهای کنترل همگرایی اجازه می‌دهد. این روش یک راه ساده برای اطمینان از همگرایی سری‌های حل در مسائل غیر خطی حتی برای معادلات غیرخطی قوی ارائه می‌دهد. امروزه، به طور گسترده ای برای حل بسیاری از مسائل غیرخطی قوی در مسائل مختلف استفاده می‌شود Yu, Q . (2020), Ramzan, M et al. (2017), Xu, D.L et al. (2020), Liu, L et al. (2021), Yang, X.Y et al. (2022). به دنبال کار لیائو، خو[4] و همکاران (۲۰۱۲) با استفاده از HAM راه حل های تحلیلی امواج گرانشی دقیقاً تشدید کننده حالت پایدار را به دست آورد. علاوه بر این، روش HAM با روش گالرکین توسط لیو[5] (۲۰۱۹) ترکیب شد تا گره‌های موج حالت پایدار با دامنه محدود در اعماق آب محدود با رزونانس‌های نزدیک متعدد به دست آید. علاوه بر این، یانگ[6] وهمکاران (۲۰۲۲) از HAM برای به دست آوردن راه‌حل‌های تحلیلی دو موج اولیه که با یک زاویه دلخواه حرکت می‌کنند، استفاده کردند. ژونگ[7] و همکاران (۲۰۱۸) با موفقیت، برای اولین بار، راه حل سری تحلیلی موج محدود کننده استوکس با ارتفاع موج شدید برای یک عمق آب دلخواه را به دست آوردند. این آثار نشان دهنده اعتبار استفاده از HAM برای حل مسائل غیرخطی پیچیده است. وانگ و همکاران[8] (۲۰۰۸) از HAM برای حل مشکل خمش یک تیر طره‌ای تحت بار نوک که منجر به تغییرشکل بزرگ می‌شود، استفاده کردند. یک جواب تحلیلی دقیق برای زاویه چرخش در انتهای آزاد به‌دست آمد و سپس برای محاسبه جابجایی‌های عمودی و افقی تیر مورد استفاده قرار گرفت. کیمیایی‌فر و همکاران[9] (۲۰۱۱) از HAM برای جواب تحلیلی انحراف و چرخش بزرگ یک تیر غیرخطی طره‌ای تحت تأثیر یک بار استاتیک پیرو همسطح استفاده کردند، نتایج حاصله با نتایج به‌دست آمده از روش رونگ‌کوتا مرتبه چهارم برای اثبات کارایی روش مقایسه شد.

بعداً کیمیایی‌فر و همکاران[10] (۲۰۱۲) از HAM برای به‌دست آوردن یک جواب تقریبی برای معادله حاکم بر انحراف زیاد و چرخش تیر غیرخطی اویلر- برنولی با سفتی خمشی متغیر که توسط نیروهای گردشی بارگذاری شده است، استفاده کردند. ملکی و همکاران (۲۰۱٤) تغییر شکل تیرهای اویلر- برنولی را که ناشی از بارهای دلخواه توزیع شده بر روی تیرها بودند را با استفاده از HAM بررسی کردند. حسینی و همکاران (۲۰۰۹) از HAM برای به‌دست آوردن یک جواب تحلیلی دقیق برای بسامد (فرکانس) طبیعی غیرخطی اساسی و جابجایی متناظر

[1] Liao
[2] Liao
[3] Liao
[4] Xu et al

[5] Z. Liu
[6] X. Yang
[7] X. Zhong
[8] Wang et al
[9] Kimiaeifar et al
[10] Kimiaeifar et al

تیرهای مخروطی ارائه شده توسط معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم استفاده کردند. صدیقی و همکاران (۲۰۱۲) از HAM برای استخراج جواب‌های تحلیلی ارتعاش عرضی تیرهای انعطاف‌پذیر لولایی- لوله‌ای که تحت یک بار ثابت در نوک آنها هستند، از یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه پنجم استفاده کردند و نشان دادند که روش HAM نسبت به روش‌های رونگ‌کوتا دقت بهتری دارند. خان[1] (۲۰۱۱) از روش تبدیل اختلال هموتوپی (HPTM) برای معادلات غیرخطی استفاده کرد و نشان داد که HPTM مسائل غیرخطی را بدون استفاده از چند جمله‌ای آدومیان حل می‌کند. خان و همکاران[2] (۲۰۱۱) اثرات اعداد رینولدز را با استفاده از روش‌های تحلیلی مختلف مورد مطالعه قرار دادند. اک و همکاران[3] (۲۰۱۲) یک جواب تحلیلی برای جریان غیردارسی در لایه‌های متخلخل شیب‌دار ارائه کردند که این جواب شامل معادله کامل فرشهایمر است و می‌تواند برای طیف گسترده‌ای از جریان‌ها استفاده شود. خان[4] (۲۰۱۳) یک روش پارامتر لاپلاس کمکی (ALPM) را با استفاده از چند جمله‌ای‌های آدومیان توسعه داد که در آن تبدیل لاپلاس برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی پیشنهاد شده است و عبارات غیرخطی را می‌توان به راحتی با استفاده از چند جمله‌ای آدومیان مدیریت کرد. روش پیشنهادی مسائل غیرخطی را بدون هیچ گونه گسسته‌سازی یا فرضیات محدود کننده حل می‌کند. صدقی‌اصل و همکاران (۲۰۱٤) یک جواب تحلیلی برای محاسبه پروفایل سطح آب در داخل لایه متخلخل سنگدانه ارائه کردند. جواب آنها نسبت به جواب‌های دیگر همبستگی قابل قبول‌تری داشت، اما برای شیب‌های افقی مناسب و معتبر بود. صدقی‌اصل و انصاری (۲۰۱٦) یک جواب تحلیلی برای جریان آشفته کاملاً توسعه‌یافته بر اساس نظریه توسعه‌یافته دوپویی- فرشهایمر ارائه کردند. لیو[5] و همکاران (۲۰۲۲) با استفاده از روش آنالیز هموتوپی (HAM) را برای جریان غیرخطی MHD و انتقال حرارت یک سیال کاسون روی یک ورق نمایی کوچک شده با مکش اعمال کرد.

هدف از این تحقیق ارائه یک حل تحلیلی زودیافت با دقت قابل قبول برای جریان غیردارسی در محیطهای درشت دانه بود که محققان قبلی به انجام تحقیقات بیشتر در این زمینه توصیه کرده بودند. در واقع به علت غیرخطی بودن ارتباط بین گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان در محیط های درشت دانه شاخص های عمومی جریان دارسی مانند عدد رینولدز دیگر در محدوده قانون دارسی و جریان آرام نبودند. هدف کلی این تحقیق حل تحلیلی معادله جریان غیرخطی در محیط‌های متخلخل درشت دانه با استفاد از HAM می‌باشد. باید توجه داشت که در مصالح ریز دانه مساله ساده تر است زیر قانون دارسی برقرار است و در شرایط دارسی ارتباط بین گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان خطی می‌باشد. عمده مشکل فعلی در مسایل جریان درون مصالح درشت دانه این است که جریان دارسی نیست و تحقیقات زیادی انحراف از قانون دارسی را نشان داده اند. در این شرایط جریان غیرخطی یا غیردارسی می‌شود. نواوری این پژوهش بطور مشخص غیردارسی بودن مساله است که بطور واضح در محیط های درشت دانه رخ میدهد. این پژوهش برای اولین بار معادله حاکم بر جریان غیردارسی در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه به روش HAM با استفاده از سری تیلور حل شده است و نتایج پروفیل سطح آب بدست‌آمده از روش HAM برای جریان‌های غیردارسی در محیط‌های متخلخل با مصالح درشت‌دانه گرد و تیزگوشه با داده‌های تجربی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) مورد ارزیابی قرار گرفته است.

---
[1] Khan
[2] Khan et al
[3] Eck et al
[4] Khan
[5] Liu

مواد و روش‌ها

۱. مدل آزمایشگاهی:

برای اثبات نتایج حاصله از حل تحلیلی این پژوهش نیازمند یک مدل راستی‌آزمایی است. در این پژوهش سعی گردید تا نتایج با داده‌های آزمایشگاهی نسبتاً دقیق مقایسه شوند. با این تفاسیر از داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) که از مدل آزمایشگاهی دانشگاه اشتوتگارت آلمان استخراج شده، برای مقایسه پروفیل های سطح آب استفاده شده است. این مدل آزمایشگاهی به شکل یک کانال مستطیل با مشخصات طول، عرض و ارتفاع به ترتیب ۶،۴، ۰۸ و ۱ متر برای بررسی پروفیل‌های جریان حرکت آب در محیط‌های متخلخل با مصالح درشت‌دانه، گرد و تیزگوشه در نظر گرفته شد.

این مطالعه آزمایشگاهی در شیب نزدیک به افق S = 0.00001 برای مصالح درشت‌دانه، گرد و تیزگوشه توسط صدقی‌اصل (۲۰۱۰) انجام گرفت. داده‌های پروفیل سطح آب در آزمایشگاه توسط یک صفحه مدرج متصل به دیوار کانال پلکسی‌گلاس به دست آمده بود. با استفاده از داده‌های این مدل آزمایشگاهی، پروفیل‌های حرکت جریان آب در محیط‌های متخلخل با مصالح درشت‌دانه، گرد و تیزگوشه مورد بررسی و با پروفیل‌های سطح آب روش HAM مورد ارزیابی قرار گرفته که در بخش‌های دیگر این مطالعه ارائه شده است.

۲. حل معادله حاکم بر جریان غیردارسی در محیط متخلخل به روش HAM:

معادله‌ی دیفرانسیل به شکل عملگری زیر داده شده است:

$$A[u(y)]=0, \qquad (11)$$

که A عملگر غیرخطی، y نمایانگر زمان و $u(y)$ تابع مجهول است. فرض کنید $u_0(y)$ تقریب اولیه از $u(y)$ و L عملگر خطی کمکی باشد با خاصیت زیر:

$$(12)$$

وقتی $f = 0$ آنگاه $L(f) = 0$

هموتوپی که لیائو در ۱۹۹۲ برای معادله (11) معرفی کرد، عبارتست از:

$$(13)$$

$$H[\varphi(y;p);p]=(1-p)\, L[\varphi(y;p) - u_0(y)]+pA[\varphi(y;p)].$$

که $p\in[0,1]$ پارامترجانشانده و $\varphi(y;p)$ تابعی از y و p است.

وقتی $p=0$ باشد آنگاه داریم:

$$H[\varphi(y;p);p]_{p=0}=L[\varphi(y;0)-u_0(y)].$$

با توجه به (12)، $(L(0)= 0)$ جواب معادله‌ی

$$H[\varphi(y;p);p]_{p=0}=0.$$

عبارت است از $\varphi(y;0)=u_0(y)$.

همچنین وقتی $p = 1$ باشد، داریم:

$$H[\varphi(y;1);1]=A[\varphi(y;1)].$$

لذا جواب معادله $H[\varphi(y;1);1]=0$ عبارتست از:

$$\varphi(y;1)=u\,(y).$$

شکل ۱. نمای کلی کانال آزمایشگاهی تحقیق صدقی‌اصل(۲۰۱۰)

وقتی p از ۰ به ۱ افزایش یابد، جواب $\varphi[y;p]$ مربوط به معادله‌ی $[\varphi(y;p);p]=0$ وابسته به p است و از تقریب اولیه $u_0(y)$ به جواب دقیق $u\,(y)$ مربوط به معادله‌ی $A[u\,(y)]=0$ تغییر می‌کند.

لذا معادله‌ی دگردیسی مرتبه – صفر عبارتست از:

(۱۴)

$$(1-p)L[\varphi(y;p)-u_0(y)]+pA[\varphi(y;p)]=0.$$

بسط سری مکلورن تابع $\varphi(y;p)$ نسبت به پارامتر p عبارتست از:

$$\varphi(y;p)=u_0(y)+\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y)p^n. \quad (۱۵)$$

که آن را «سری هموتوپی» نامیده‌اند و ضرایب $u_n(y)(n\geq 1)$ عبارتند از:

$$u_n(y)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi(y;p)}{\partial p^n}\bigg|_{p=0} \quad (۱۶)$$

۳. پیاده سازی روش HAM روی معادله جریان غیردارسی در محیط متخلخل:

معادله جریان غیردارسی در محیط متخلخل بصورت (۱۷) می‌باشد.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(\cos\theta)^3}{aq^2}(y-x\tan\theta)^2. \quad (۱۷)$$

برای سادگی و استفاده از نمادگذاری‌های آشناتر تغییر متغیرهای زیر را اعمال می‌کنیم.

$$u=y-x\tan\theta. \quad (۱۸)$$

$$du=dy-\tan\theta dx. \quad (۱۹)$$

$$\omega^2=\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{aq^2}. \quad (۲۰)$$

با اعمال روش تغییر متغیر، شکل کلی معادله (۱۷) به صورت $\frac{du}{dy}=1-\omega^2u^2$ می‌باشد، که برای راحتی کار، در این معادله مقدار ω^2 را برابر λ گرفته و معادله را به روش هموتوپی حل کرده و در اخر هرجا λ بود مقدار ω^2 جاییگرین می‌شود.
در واقع هموتوپی بالا شکل خاص از فرمول کلی زیر است.

$$H(\varphi,p,h,H)=(1-p)L(\varphi(y,p)-u_0(y))-ph\,H(y)A(\varphi(y,p)) \quad (۲۱)$$

در این‌جا رابطه (۲۱) به پارامتر کمکی $p\in[0,1]$ و تابع کمکی H (y) و پارامتر کمکی h بستگی دارد و L یک تبدیل خطی است، به طوری که وقتی T=0 باشد آنگاه L(T)= 0 خواهد بود. هم‌چنین A تبدیلی غیرخطی است که باز هم براساس معادله دیفرانسیل اصلی اولیه داده می‌شود.

هدف تعیین $\varphi(y,p)$می‌باشد. یاداور می‌شویم، زمانیکه p=0 باشد جواب معادله (۲۱)، $u_0(y)$است و در p =۱ داریم $\varphi(y,1)=u(y)$ که همان جواب معادله اصلی است.

مطابق روش آنالیز هموتوپی معادله دگردیسی مرتبه – صفر به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۲۲)

$$(1-p)L[\varphi(y,p)-u_0(y)]=p\,h\,H(y)A(\varphi(y,p)).$$

بنابراین با افزایش p از ۰ به ۱ حدس اولیه $u_0(y)$ به جواب $u(y)$ تبدیل می‌شود. حال فرض شود، بسط تیلور (مکلورن) $\varphi(y=1)$ به صورت زیر نوشته شود.

$$\varphi(y,p)=u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)p^n. \quad (۲۳)$$

$$u_n(y)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi(y;p)}{\partial p^n} \quad (۲۴)$$

اگر عملگر خطی کمکی و حدس اولیه u_0 و پارامتر کمکی h و تابع کمکی $H(y)$ طوری انتخاب شوند که حدس (۲۲) در $p=1$ همگرا باشد، خواهیم داشت:

$$u(y)=u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y).$$

که معادله فوق توسط لیائو در سال ۱۹۹۲ به دست آمده است. اگر $h=-1$ و $H(y)=1$ باشد، آنگاه معادله (۲۲) به صورت زیر می‌باشد .

(۲۵)

$$(1-p)L\left[(\varphi(y,p)-u_0(y)\right]+pA[\varphi(y,p)]=0.$$

با فرض اولیه $u_0(y)=\alpha y+\beta$ که در آن α و β اعدادی ثابت هستند و جایگذاری معادله (۲۳) در معادله (۲۵) خواهیم داشت:

(۲۶)

$$(1-p)L\left[u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)p^n-u_0(y)\right]+pA\left[u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)p^n\right]=0.$$

پس با استفاده از معادلات

$$L[\varphi(y,p)]=\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y,p)$$

و

$$A[\varphi(y,p)]=\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y,p)+\lambda\left(\varphi(y,p)\right)^2-1$$

از معادله (۲۶)، معادله (۲۷) حاصل می‌شود:

(۲۷)

$$(1-p)\left(u_0'(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(y)p^n-u_0'(y)\right)+p\left[u_0'(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(y)p^n+\lambda\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)p^n\right)^2-1\right]$$
$$=0.$$

چون $u_0(y)=\alpha y+\beta$ می‌باشد، پس $u_0'(y)=\alpha$ و معادله (۲۷) به صورت زیر ساده می‌شود.

(۲۷–۱)

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(y)p^n+p\left[u_0'(y)+\lambda\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)p^n\right)^2-1\right]=0.$$

اگر از معادله (۲۷–۱) نسبت به p مشتق گرفته شود، آنگاه خواهیم داشت:

(۲۸)

$$\sum_{n=1}^{\infty}nu_n'(y)p^{n-1}+\left(u_0'(y)+\lambda\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)p^n\right)^2-1\right)+2p\lambda(\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,u_n(y)p^{n-1}\right)$$
$$\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)p^n\right)=0.$$

اگر در معادله (۲۸)، p مساوی صفر قرار داده شود، خواهیم داشت: (جملاتی که توان‌های مثبت p دارند حذف می-شوند).

$$1\times u_1'(y)+u_0'(y)+\lambda\left(u_0(y)\right)^2-1=0$$
$$\Rightarrow u_1'(y)=-u_0'(y)-\lambda\left(u_0(y)\right)^2+1$$

$$\Rightarrow u_1'(y)=-\alpha-\lambda(\alpha y+\beta)^2+1$$
$$\Rightarrow u_1'(y)=-\alpha-\lambda\alpha^2y^2-2\lambda\alpha\beta y-\lambda\beta^2+1$$
$$\Rightarrow u_1(y)=-\alpha y-\frac{\lambda\alpha^2y^3}{3}-\frac{2\lambda\alpha\beta y^2}{2}-\lambda\beta^2y+y$$
$$\Rightarrow u_1(y)=\left(1-\alpha-\lambda\beta^2\right)y-(\lambda\alpha\beta)y^2-\left(\frac{\lambda\alpha^2}{3}\right)y^3.$$

اگر مجدداً از معادله (۲۸) نسبت به p مشتق گرفته شود، آنگاه خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(n-1\right)u_n'(y)p^{n-2}+2\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n'(y)p^{n-1}\right)\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)p^n\right)$$
$$+2\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n(y)p^{n-1}\right)\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)p^n\right)+2p\lambda[\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)u_n(y)p^{n-2}\right)$$
$$\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)p^n\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n(y)p^{n-1}\right)^2]=0.$$

که می‌توان آن را به شکل زیر خلاصه نمود:

(۲۹)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)u_n'(y)p^{n-2}+4\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_np^{n-1}\right)\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)p^n\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)u_n'(y)p^{n-2}$$
$$+4\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_np^{n-1}\right)\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)p^n\right)+2p\lambda[\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)u_n(y)p^{n-2}\right)\left(u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)p^n\right)$$
$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,u_n(y)p^{n-1}\right)^2]=0.$$

اگر در معادله (۲۹) عدد p مساوی صفر قرارداده شود، خواهیم داشت:

$$(2\times1)u_2'(y)+4\lambda(2u_1(y)u_0(y))=0$$
$$2u_2'(y)=-8\lambda u_1(y)u_0(y)$$
$$\Rightarrow u_2'(y)=-4\lambda\left(u_1(y)u_0(y)\right)$$
$$\Rightarrow u_2'(y)=-4\lambda[\left(1-\alpha-\lambda\beta^2\right)y-(\lambda\alpha\beta)y^2-\left(\frac{\lambda\alpha^2}{3}\right)y^3][\alpha y+\beta]$$
$$\Rightarrow u_2'(y)=(-4\lambda\alpha y-4\lambda\beta)[\left(1-\alpha-\lambda\beta^2\right)y-(\lambda\alpha\beta)y^2-(\tfrac{\lambda\alpha^2}{3})y^3]$$
$$\Rightarrow u_2'(y)=-4\lambda\alpha y^2+4\lambda\alpha^2y^2+4\lambda^2\alpha\beta^2y^2+4\lambda^2\alpha^2\beta y^3+\frac{4\lambda^2\alpha^3y^4}{3}-4\lambda By+4\alpha\lambda\beta y$$
$$+4\lambda^2\beta^3y+4\lambda^2\alpha\beta^2y^2+\frac{4\lambda^2\alpha^2\beta y^3}{3}$$
$$\Rightarrow u_2'(y)=\left(-4\lambda\beta+4\alpha\lambda\beta+4\lambda^2\beta^3\right)y+\left(4\lambda\alpha^2-4\lambda\alpha+8\lambda^2\alpha\beta^2\right)y^2+(4\lambda^2\alpha^2\beta+\frac{4\lambda^2\alpha^2\beta}{3})y^3+(\frac{4\lambda^2\alpha^3}{3})y^4$$
$$\Rightarrow u_2(y)=\left(-2\lambda\beta+2\alpha\lambda\beta+2\lambda^2\beta^3\right)y^2+\left(\frac{4}{3}\lambda\alpha^2-\frac{4}{3}\lambda\alpha+\frac{8}{3}\lambda^2\alpha\beta^2\right)y^3+\left(\frac{4}{3}\lambda^2\alpha^2\beta\right)y^4+\left(\frac{4\lambda^2\alpha^3}{15}\right)y^5.$$

نهایتا معادله نهایی جریان غیر دارسی در محیط متخلخل به روش ریاضی آنالیز هموتوپی به صورت زیر خواهد بود.

(۳۰)

$$\alpha y+\beta+\left(1-\alpha-\lambda\beta^2\right)y-(\lambda\alpha\beta)y^2-\left(\frac{\lambda\alpha^2}{3}\right)y^3+\left(-2\lambda\beta+2\alpha\lambda\beta+2\lambda^2\beta^3\right)y^2$$

$$+\left(\frac{4}{3}\lambda\alpha^2-\frac{4}{3}\lambda\alpha+\frac{8}{3}\lambda^2\alpha\beta^2\right)y^3+\left(\frac{4}{3}\lambda^2\alpha^2\beta\right)y^4+\left(\frac{4\lambda^2\alpha^3}{15}\right)y^5-y+x\tan\theta=0.$$

اگر $\lambda=\omega^2$ قرار داده شود:

(۳۱)

$$\alpha y+\beta+\left(1-\alpha-\omega^2\beta^2\right)y-(\omega^2\alpha\beta)y^2-\left(\frac{\omega^2\alpha^2}{3}\right)y^3+\left(-2\omega^2\beta+2\,\alpha\omega^2\beta+2\omega^4\beta^3\right)y^2$$
$$+\left(\frac{4}{3}\omega^2\alpha^2-\frac{4}{3}\omega^2\alpha+\frac{8}{3}\omega^4\alpha\beta^2\right)y^3+\left(\frac{4}{3}\omega^4\alpha^2\beta\right)y^4+\left(\frac{4\omega^4\alpha^3}{15}\right)y^5-y+x\tan\theta=0.$$

۴. ارزیابی روش آنالیز هموتوپی

در این بخش برای بررسی درستی جواب‌های روش HAM، به فرمول‌های تابع هدف نرمال (NOF) پرداخته می‌شود، که در ادامه این پژوهش، نتایج روش HAM با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) با استفاده از تابع هدف نرمال (NOF) مورد ارزیابی قرار گرفته است.

$$NOF=\frac{RMSE}{X} \quad (۳۲)$$

$$RMSE=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_{obs}-y_{HAM})^2}{N}} \quad (۳۳)$$

$$X=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{obs} \quad (۳۴)$$

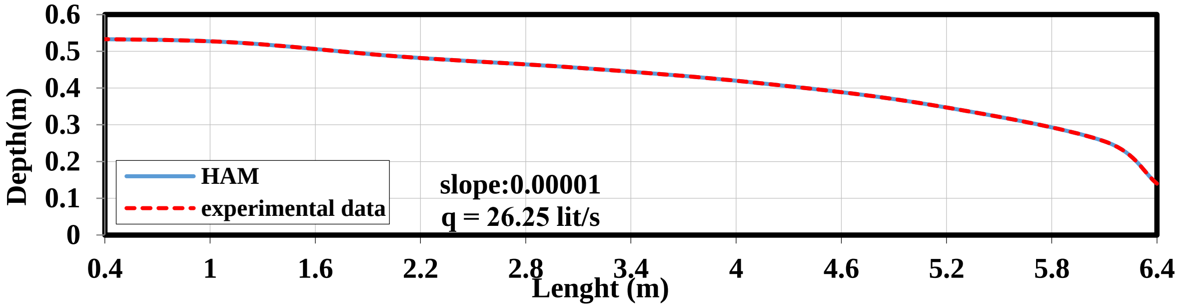
NOF یا تابع هدف نرمال، نسبت ریشه میانگین مربعات خطای داده‌ها به میانگین داده‌های آزمایشگاهی و (RMSE) ریشه میانگین مربعات خطای داده‌های (X) می‌باشد Moutsopoulos K.N. (2009). y_{obs} پروفیل سطح آب داده‌های آزمایشگاهی، y_{HAM} مقادیراعماق محاسبه شده توسط معادله شماره (۳۱) و N تعداد کل مشاهدات است. برای پیدا کردن یک تطابق عالی، NOF باید کمتر از ۱،۰ باشد. در چنین حالتی، روش نظری همچنان قابل اعتماد است و می‌تواند با دقت قابل قبولی مورد استفاده قرار گیرد Moutsopoulos K.N. (2009) و Gikas, G.D et al (2006).

نتایج و بحث

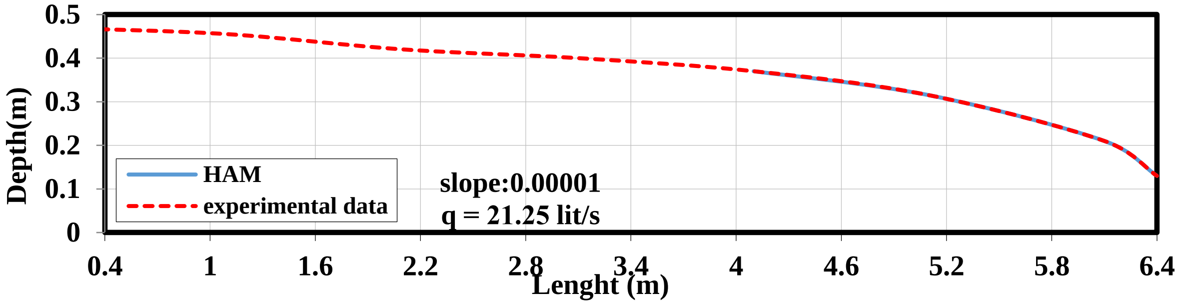
در این بخش از تحقیق برای اولین یک راه‌حل مبتنی بر روش‌های آشفتگی برای جریان غیردارسی درون محیط‌های درشت‌دانه ارائه گردید و از این رو نوآوری این تحقیق خود حل HAM است. یادآور می‌شود در مسائل ریاضی اغلب از مسایل فرضی برای حل استفاده می‌شود لیکن در این تحقیق برای ارزیابی دقیق راه‌حل ریاضی از داده‌های آزمایشگاهی بسیار دقیقی که در متن مقاله شرح آن رفته، استفاده گردید و نتایج رضایت بخشی حاصل گردید. پس مهمترین نوآوری و سافته تحقیق درگام اول پاسخ گرفتن حل تحلیلی HAM و درگام بعدی منطقی و فیزیکی بودن پاسخ حل ارائه شده است که در این تحقیق بخوبی انجام شده است. در این تحقیق صرفا از داده‌ها استفاده شده است و تحلیل فیزیکی و مقایسه شرایط داده‌ها در حیطه اختیار تحقیق صدقی اصل(۲۰۱۰) بوده است. بعبارت دیگر فرض صحت کامل داده است و صرفا ضعف یا قوت روش HAM باید در برابر این داده‌های آزمایشگاهی ارزیابی شوند.در این تحقیق ابتدا معادله جریان غیردارسی به روش HAM حل گردیده و نتایج پروفیل سطح آب آن بدست آورده شده و با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) که درآزمایشگاه اشتوتگارت آلمان بدست آمده، مقایسه شده است. با توجه به اینکه نتایج حل تحلیلی به روش HAM با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) در شیب‌های متفاوت و بالاتر از افق در بعضی از نقاط پروفیل‌های سطح آب آن‌ها دارای نوسانات زیادی بوده ودر شیب های افق دارای جواب های منطقی و پروفیل های سطح آب در روش HAM و داده‌های آزمایشگاهی در اکثر نقاط برهم منطبق و یا نزدیک به هم بوده است، لذا نتایج به‌دست‌آمده از روش HAM با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه با شیب های افقی

در این تحقیق آمده است و از ذکر ارائه نتایج در شیب های بالاتر که هدف اصلی تحقیق نبود خودداری گردید. البته این روش در شیب های بالاتر به علت تاثیر شیب و نیروی گرانش دچار نوعی تورم در پروفیل جریان می‌شود که از مبحث جریان ماندگار و یکنواخت خارج است و خود نیازمند تحقیق دیگری است و یا شاید نیازمند اصلاحات دیگری در روش می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده از روش HAM با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گردگوشه در شرایط شیب تقریباً افقی در ادامه تحقیق با هم مقایسه می‌شود (شکل‌های ۲ تا ۷ ملاحظه شود).

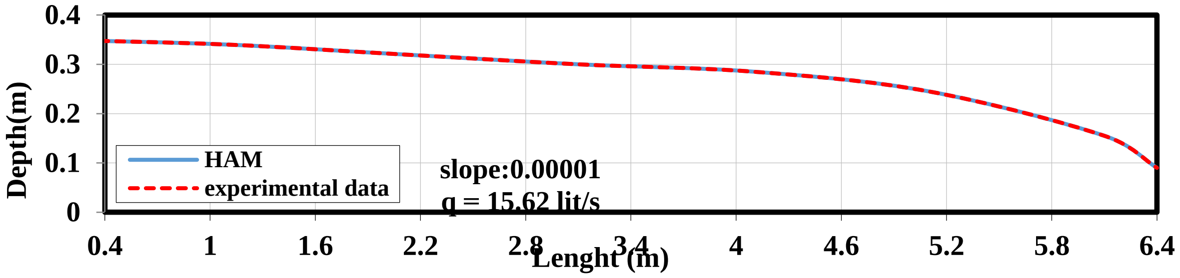
در این تحقیق روش HAM نتایج قابل قبولی از پروفیل‌های سطح آب برای دبی‌های بالاتر (۲۶،۲۵ لیتر در ثانیه) در مقایسه با دبی‌های پایین (۱۵،۶۲ لیتر در ثانیه) در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گردگوشه را در مقایسه با داده‌های صدقی‌اصل (2010) نشان دادند.



شکل ۲. مقایسه نتایج داده‌های آزمایشگاهی پروفیل‌های سطح آب صدقی‌اصل(۲۰۱۰) با روش HAM در شیب نزدیک به افق S = ۰/۰۰۰۰۱ برای دبی q = ۲۶/۲۵ لیتر بر ثانیه در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گردگوشه

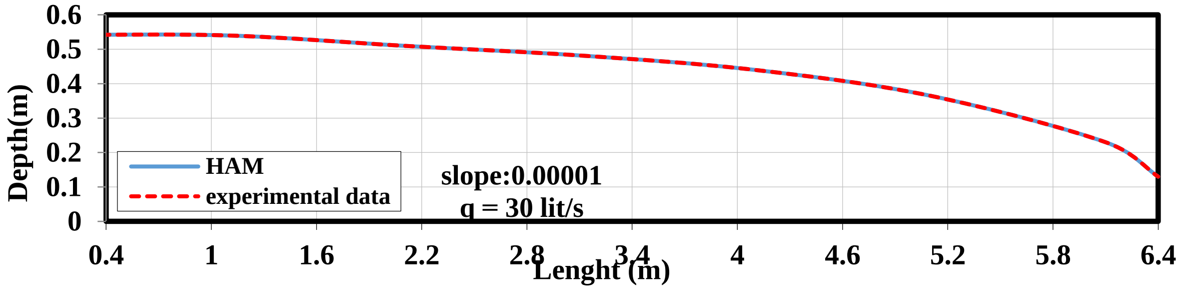


شکل ۳. مقایسه نتایج داده‌های آزمایشگاهی پروفیل‌های سطح آب صدقی‌اصل(۲۰۱۰) با روش HAM در شیب نزدیک به افق S = ۰/۰۰۰۰۱ برای دبی q=۲۱/۲۵ لیتر بر ثانیه در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گردگوشه

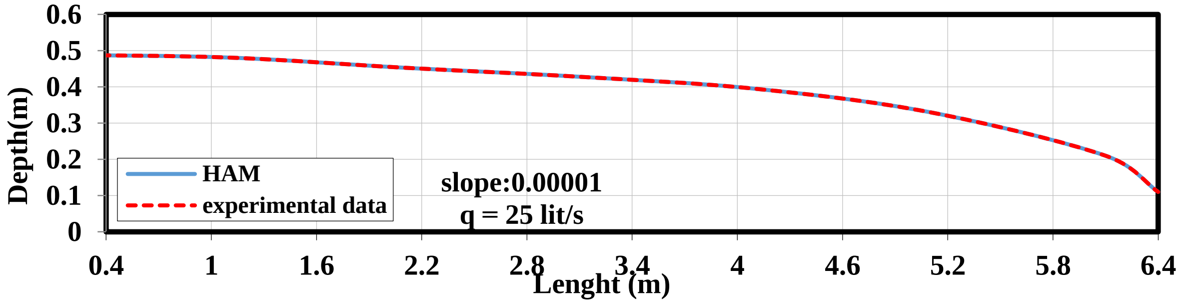


شکل ۴. مقایسه نتایج داده‌های آزمایشگاهی پروفیل‌های سطح آب صدقی‌اصل(۲۰۱۰) با روش HAM در شیب نزدیک به افق S = ۰/۰۰۰۰۱ برای دبی q=۱۵/۶۲ لیتر بر ثانیه در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گردگوشه

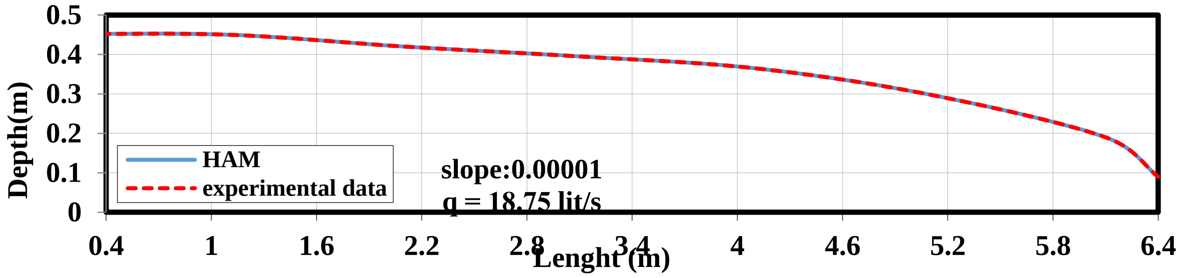
شکل‌های ۵ تا ۷ مقایسه پروفیل‌های سطح آب به‌دست آمده از نتایج روش HAM با پروفیل‌های سطح آب داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل (2010) را در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه در شرایط شیب تقریباً افقی نشان می‌دهد. نتایج روش HAM مقادیر قابل قبولی را در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل(۲۰۱۰) نشان داده است. مشاهده می‌شود که پروفیل‌های سطح آب حاصله از روش ریاضی HAM دقت بهتری را برای دبی بالاتر (۳۰ لیتر در ثانیه) در مقایسه با دبی کمتر (۱۸،۷۵ لیتر در ثانیه) برای محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه ارائه می‌دهد. سرعت جریان در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه در مقایسه با محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گرد به دلیل تخلخل بالا افزایش یافته است. بنابراین، محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه دبی جریان بیشتری را به دلیل سرعت جریان و تخلخل بالا از طریق منافذ دارا می‌باشند.



شکل ۵. مقایسه نتایج داده‌های آزمایشگاهی پروفیل‌های سطح آب صدقی‌اصل(۲۰۱۰) با روش HAM در شیب نزدیک به افق S = ۰/۰۰۰۰۱ برای دبی q = ۳۰ لیتر بر ثانیه در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه



شکل ۶. مقایسه نتایج داده‌های آزمایشگاهی پروفیل‌های سطح آب صدقی‌اصل(۲۰۱۰) با روش HAM در شیب نزدیک به افق S = ۰/۰۰۰۰۱ برای دبی q = ۲۵ لیتر بر ثانیه در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه



شکل ۷. مقایسه نتایج داده‌های آزمایشگاهی پروفیل‌های سطح آب صدقی‌اصل(۲۰۱۰) با روش HAM در شیب نزدیک به افق S = ۰/۰۰۰۰۱ با دبی q = ۱۸/۷۵ لیتر بر ثانیه در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه

جدول ۱ مقایسه درصد خطای NOF بین نتایج پروفیل سطح آب در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه روش HAM با شرایط مرزی متفاوت و شیب نزدیک به افق را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، NOF در محیط متخلخل موادگرد به ترتیب ۰،۰۰۰۱۰۲۱۶۲، ۰،۰۰۰۱۱۰۳۰۱ و ۰،۰۰۰۱۵۵۰۸۱ برای دبی‌های q = ۲۶/۲۵ لیتر بر ثانیه، q = ۲۱/۲۵ لیتر در ثانیه و q = ۱۵/۶۲ لیتر در ثانیه می‌باشد. نتایج نشان داد که NOF در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گرد با کاهش جریان (q) افزایش می‌یابد.

جدول ۱. ارزیابی حل تحلیلی HAM با تابع هدف نرمال (NOF) برای محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه گردگوشه

اطلاعات	سطح آب بالادست (متر)	سطح آب پایین دست (متر)	درصد خطای NOF
سنگدانه‌های گرد، q= ۲۶/۲۵ لیتر بر ثانیه	۰/۵۳۵	۰/۱۴	۰،۰۰۰۱۰۲۱۶۲
سنگدانه‌های گرد، q= ۲۱/۲۵ لیتر بر ثانیه	۰/۴۷	۰/۱۳	۰،۰۰۰۱۱۰۳۰۱
سنگدانه‌های گرد،q= ۱۵/۶۲ لیتر برثانیه	۰/۳۵	۰/۰۹	۰،۰۰۰۱۵۵۰۸۱

جدول ۲ مقایسه درصد خطای NOF بین نتایج پروفیل سطح آب در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه روش HAM با شرایط مرزی متفاوت و شیب نزدیک به افق را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، NOF در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه به ترتیب ۰،۰۰۰۰۹۹۸۲۸، ۰،۰۰۰۱۱۱۶۵۲ و ۰،۰۰۰۱۲۱۵۵۸ برای دبی‌های q = ۳۰ لیتر بر ثانیه، q = ۲۵ لیتر بر ثانیه و **q = ۱۸/۷۵** لیتر بر ثانیه است. نتایج نشان داد که NOF در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه با کاهش جریان (q) افزایش می‌یابد.

لازم به توضیح است، می‌توان نتایج این روش را با روش های دیگر حل تحلیلی و یا حل عددی مقایسه کرد. اما برای صحت سنجی نتایج حل این روش، بهتر است نتایج آن را با نتایج داده‌های آزمایشگاهی مورد اطمینان که در آزمایشگاه‌های معتبر دنیا بدست آمده است، مقایسه شود.

جدول ۲. ارزیابی حل تحلیلی HAM با تابع هدف نرمال (NOF) برای محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تیزگوشه

اطلاعات	سطح آب بالادست (متر)	سطح آب پایین دست (متر)	درصد خطای NOF
سنگدانه‌های تیز، q= ۳۰ لیتر بر ثانیه	۰/۵۴۲	۰/۱۳	۰،۰۰۰۰۹۹۸۲۸
سنگدانه‌های تیز، q= ۲۵ لیتر بر ثانیه	۰/۴۸۹	۰/۱۱	۰،۰۰۰۱۱۱۶۵۲
سنگدانه‌های تیز،q=۱۸/۷۵ لیتر بر ثانیه	۰/۴۵۲	۰/۰۹	۰،۰۰۰۱۲۱۵۵۸

نتیجه‌گیری

با ارزیابی صورت گرفته بین نتایج روش HAM و داده‌های آزمایشگاهی صدقی‌اصل (۲۰۱۰) تحت شرایط مرزی بالادست و پایین دست به ازای دبی‌های متفاوت و با شیب نزدیک به افق s=۰/۰۰۰۰۱ درصد با استفاده از تابع هدف نرمال (NOF) نتایج زیر مشاهده گردید:

۱- نتایج در بیشتر موارد به هم نزدیک هستند و این صحت روابط روش HAM موجود و محاسبات انجام گرفته را می‌رساند.

۲- در این پژوهش نشان داده شد که به ازای ۶ دبی ورودی با شرایط مرزی متفاوت در دو محیط با مصالح گرد و تیزگوشه، دبی‌های q = ۳۰ لیتر بر ثانیه، با درصدخطای NOF برابر ۰،۰۰۰۰۹۹۸۲۸ در محیط متخلخل تیزگوشه و q= ۲۶/۲۵ لیتر بر ثانیه، با درصدخطای NOF برابر ۰،۰۰۰۱۰۲۱۶۲ در محیط متخلخل گردگوشه به ازای دبی‌های ورودی بیشتر، دقت بهتری نسبت به داده‌های آزمایشگاهی را دارند.

۳- هنگامی که اختلاف تراز آب بالادست و پایین دست زیاد می‌شود، درصد خطا بالا می‌رود. به عبارت دیگر با افزایش گرادیان هیدرولیکی در محیط متخلخل خطا نیز افزایش می‌یابد.

۴ - روش HAM در محیط متخلخل با مصالح تیزگوشه نسبت به مصالح گردگوشه به ازای دبی‌های بیشتر به دلیل سرعت جریان و تخلخل بالا از طریق منافذ دقت بهتری را نسبت به داده‌های آزمایشگاهی نشان داده اند.

۵ – در این تحقیق جریان در محیط درشت دانه در حال آزمایشگاهی ماندگار steady-state flow بود که مستقل از زمان است و به همین علت ترم زمان در معادله دیفرانسل ارائه شده وجود ندارد.

۶ - نقطه قوت این روش حل معادلات غیرخطی و پیچیده است که هزینه محاسبات را بشدت می‌کاهد. در سایرحل‌های تحلیلی به علت تعداد بیشمار جملات موجود در حل هزینه محاسبات افزایش می‌یابد و یا اینکه سایر روش‌ها قادر به حل دقیق معادلات غیرخطی نیستند. مدلهای عددی هم تنها در بخشی از دامنه حل به نام گره node یا المان element قادر به ارائه جواب هستند که باز نیازمند هزینه محاسبات بالا جهت حل می‌باشند. روش حاضر تنها از جملات محدودی با دقت قابل قبول استفاده می‌کند و می‌تواند از هزینه محاسبات دیگر روش‌های تحلیلی سنتی بکاهد و همینطور نیاز به داده‌های آزمایشگاهی که مستلزم هزینه هنگفتی اجرای آزمایش است را کم می‌کند.

خاطر نشان می‌شود، چون معادله حاکم بر جریان غیردارسی در محیط متخلخل با مصالح درشت‌دانه تاکنون به روش‌های تحلیلی دیگری حل نشده است و اولین باراست که به روش HAM حل و با داده های آزمایشگاهی مقایسه می‌شود، و با توجه به اینکه داده های سالم و بهینه ای در مقایسه با داده های آزمایشگاهی معتبر دنیا به محقق می‌دهد، انگیزه ادامه کار را برای محقق با توجه به زمان بر بودن حل آن مهیا خواهد کرد. لذا پیشنهاد می‌گردد این معادله با روش‌های تحلیلی دیگری تحت شیب‌های متفاوت داده‌های آزمایشگاهی پژوهشگران دیگر، حل و مقایسه شود.

Reference:

D. Xu, Z. Lin, S. Liao, M. Stiassnie, (2012). On the steady-state fully resonant progressive waves in water of finite depth, J. Fluid Mech.710. 379.

Eck, B.J., Barrett, M.E., Charbeneau, R.J. (2012). Forchheimer flow in gently sloping layers: Application to drainage of porous asphalt. Water Resour. Res. 48, W01530. Doi: 10.1029/2011WR010837.

Gikas, G.D., Yiannakopoulou, T., Tsihrintzis, V.A. (2006). Modeling of non-point source pollution in a mediterranean drainage basin. Environmental Modeling and Assessment 11, 219–233.

Hoseini, S., Pirbodaghi, T., Ahmadian, M., Farrahi, G, (2009). On the large amplitude free vibrations of tapered beams: an analytical approach. Mech. Res. Commun. 36(8), 892–897.

Kimiaeifar, A., Domairry, G., Mohebpour, S., Sohouli, A., Davodi, A, (2011). Analytical solution for large deflections of a cantilever beam under nonconservative load based on Homotopy analysis method. Numer. Methods Partial Differ. Equ. 27(3), 541–553.

Khan, Y., Wu, Q. (2011). Homotopy perturbation transform method for nonlinear equations using He’s polynomials. Computers and Mathematics with Applications, 61: 1963-1967.

Khan, Y.; Faraz, N.; Yildirim, A.; Wu, Q. (2011) A Series Solution of the Long Porous Slider. Tribol. Trans., 54, 187–191.

Kimiaeifar, A., Lund, E., Thomsen, O.T, (2012). Series solution for large deflections of a cantilever beam with variable flexural rigidity. Meccanica 47(7), 1787–1796.

Khan, Y., Vazquez-Leal, H., Faraz, N. (2013). An auxiliary parameter method using Adomian polynomials and Laplace transformation for nonlinear differential equations. Applied Mathematical Modelling, 37: 2702-2708.

Liu, Ling ; Li, Jing ; Liao, Shijun, (2022). Explicit Solutions of MHD Flow and Heat Transfer of Casson Fluid over an Exponentially Shrinking Sheet with Suction, Nanomaterials (Basel, Switzerland), Vol.12 (19), p.3289.

Liu, L.; Rana, J.; Liao, S, (E 2021). Analytical solutions for the hydrogen atom in plasmas with electric, magnetic, and Aharonov-Bohm flux fields. Phys. Rev. 103, 023206.

M. Ayub, H. Zaman, M. Sajid, T. Hayat, (2008). Analytical solution of stagnation-point flow of a viscoelastic fluid towards a stretching surface, Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul. 13. 1822–1835.

M. Sajid, I. Ahmad, T. Hayat, M. Ayub, (2008). Series solution for unsteady axisymmetric flow and heat transfer over a radially stretching sheet, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 13. 2193–2202.

Moutsopoulos K.N. (2009) Exact and approximate analytical solutions for unsteady fully developed turbulent flow in porous media and fractures for time dependent boundary conditions. J. of Hydrology 369(1-2), 78-89.

M. Sajid, Z. Abbas, T. Hayat, (2009). Homotopy analysis for boundary layer flow of a micropolar fluid through a porous channel, Appl. Math. Model. 33. 4120–4125.

Maleki, M., Tonekaboni, S.A.M., Abbasbandy, S, (2014). A Homotopy analysis solution to large deformation of beams under static arbitrary distributed load. Appl. Math. Model. 38(1), 355–368.

Ramzan, M.; Bilal, M.; Chung, J.D.; Lu, D.C, Farooq, U, ,(2017). Impact of generalized Fourier's and Fick's laws on MHD 3D second grade nanofluid flow with variable thermalconductivity and convective heat and mass conditions. Phys. Fluids , 29, 093102.

S. J. Liao, (1992).The proposed Homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University.

S. J. Liao, (2003). Beyond perturbation: introduction to Homotopy analysis method. Chapman & Hall/CRC.

S. Abbasbandy, A.S. Bataineh, M.S.M. Noorani, I. Hashim,(2006). The application of Homotopy analysis method to nonlinear equations arisingin heat transfer. Phys. Lett. A, 360: 109-113.

Sedghi-Asl, M. (2010) Investigation of Dupuit Approximate Limits for gradually varied flow in coarse grained porous media. PhD Dissertation, Department of Irrigation and Reclamation, College University of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran.

S. J. Liao, (2012). Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag.

Sedighi, H.M., Shirazi, K.H., Zare, J, (2012). An analytic solution of transversal oscillation of quintic non-linear beam with Homotopy analysis method. Int. J. Non-Linear Mech. 47(7), 777–784.

Sedghi-Asl, M., Rahimi, H., Farhoudi, J., Hoorfar, A., Hartmann, S. (2014). 1-D fully-developed turbulent flow through coarse porous medium. J. Hydrol. Eng. ASCE. Doi: 10.1061/ (ASCE) HE.1943-5584. 0000937.

Sedghi-Asl, M. and Ansari, E. (2016). Adoption of extended Dupuit–Forchheimer assumptions to non-Darcy flow problems. Transp. Porous Med. 113(3): 457-468.

T. Hayat, F. Shahzad, M. Ayub,(2007). Analytical solution for the steady flow of the third grade fluid in a porous half space, Appl. Math. Model. 31. 2424– 2432.

Wang, J., Chen, J.-K., Liao, S, (2008). An explicit solution of the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip. J. Comput. Appl. Math. 212(2), 320–330.

Xinhui Si, Liancun Zheng, Xinxi n Zhang, Xinyi Si, (2012). Homotopy analysis method for the asymmetric laminar flow and heat transfer of viscous fluid between contracting rotating disks, Appl. Math. Model. 36. 1806–1820.

X. Yang, Y. Li, (2022). On bi-chromatic steady-state gravity waves with an arbitrary included angle, Phys. Fluids 34. 032107.

X. Zhong, S. Liao, (2018). On the limiting Stokes wave of extreme height in arbitrary water depth, J. Fluid Mech. 843. 653.

Xu, D.L.; Liu, Z.(2020). A study on nonlinear steady-state waves at resonance in water of finite depth by the amplitude-based Homotopy Analysis Method. J. Hydrodyn. 32, 888–900.

Yang, X.Y.; Li, Y.(2022). On bi-chromatic steady-state gravity waves with an arbitrary included angle. Phys. Fluids, 34, 032107.

Yu, Q.(2020). Wavelet-based homotopy method for analysis of nonlinear bending of variable-thickness plate on elastic foundations. Thin-Walled Struct.157, 107105.

Z. Liu, D. Xie,(2019). Finite-amplitude steady-state wave groups with multiple near-resonances in finite water depth, J. Fluid Mech. 867. 348.

Print ISSN: 2251-7480
Online ISSN: 2251-7400

Journal of
Water and Soil Resources Conservation (WSRCJ)

Web site:
https://wsrcj.srbiau.ac.ir

Email:
iauwsrcj@srbiau.ac.ir
iauwsrcj@gmail.com

Vol. 12
No. 3 (47)
Spring 2023

Received:
2022-10-29

Accepted:
2022-12-19

Pages: 97-110

An Analytical Solution of the non-Darcy Flow Governing Equation the Homotopy Analysis Method Using

Amirhossein Arvin[1], Mohammad Hadi Fatahi[1*], Mohammad Sedghi Asl[2] and Seyed Abbas Mohammadi[3]

1) Department of Civil Engineering, Marvdasht Branch, Islamic Azad University, Marovdasht, Iran.
2) Department of Soil Science, Faculty of Agriculture, Yasouj University, Yasouj, Iran.
3) Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Yasouj University, Yasouj, Iran.
*Corresponding author email: fattahi.mh@miau.ac.ir

Abstract:

Background and Aim: The Homotopy Analysis Method (HAM) was first proposed by Liao (1992) to solve functional equations. This method is based on homotopy and provides an approximate-analytical solution for functional equations. In recent years, this method and its modifications have been effectively used to solve a wide range of linear and nonlinear problems in applied sciences to find solutions to series of various types of nonlinear equations, including algebraic equations, ordinary differential equations, partial differential equations, and differential-integral equations (Abbasbandy et al. 2006). The purpose of this research is to provide an analytical solution of time delay with acceptable accuracy for the non-linear equation of non-Darcy flow in coarse-grained media using the HAM method, which previous researchers had recommended to conduct further research in this field.

Method: In this research, the governing equation of the non-Darcy flow was solved by the HAM method for the first time, then the water level profiles of the final equation of the HAM method obtained for the 6 inlet flow rates with different boundary conditions and in two coarse-grained porous media including rounded and sharp-edged materials. The results of the water level profile using the HAM method have been compared with the laboratory data of Sedghi Asal (2010) reported at the Stuttgart laboratory in Germany. The normal objective function (NOF) has been used to compare the HAM method results with the experimental data of Sedghi Asal (2010).

Results: The comparison of the results of HAM method with the experimental data of Sedghi Asal (2010) has been done under upstream and downstream boundary conditions for different discharges and with a slope close to the horizon S = 0.00001. The results have shown that flow rates of q=30 lit/s, with a NOF error percentage of 0.000099828 in the porous medium of sharp corners and q = 26.25 lit/s, with a NOF error percentage of 0.000102162 in the porous medium of round corners depict better accuracy than the experimental data in higher input flow rates. This method has logical solutions in horizon slopes and the water level profiles in HAM method and experimental data have coincided or are close to each other in most of the points. However, the subject of permanent and uniform flow needs a dependent research.

Conclusion: The results showed that the water level profiles are close to each other in most cases. This illustrates the accuracy of the developed approach based on HAM method. However, when the difference between the upstream and downstream water levels increases, the percentage of error escalates. In other words, with the increase of the hydraulic gradient in the porous medium, the error also grows. Finally, by evaluating the results of the HAM method compared to the laboratory data, it can be concluded that this method shows better accuracy in the porous medium with sharp-cornered materials compared to round-cornered materials due to higher flow rates and higher porosity of this media.

Keywords: Porous media, round and sharp materials, HAM method, analytical solution, experimental data, water surface profile

10.30495/WSRCJ.2022.70054.11329