

مدلسازی مشخصات رویدادهای بارش با استفاده از مفصل دی-واین

مریم شفائی^{۱*}، احمد فاخری فرد^۲، یعقوب دین پژوه^۳ و رسول میرعباسی^۴

(۱) دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب؛ گروه مهندسی آب؛ دانشگاه تبریز؛ تبریز؛ ایران

* نویسنده مسئول مکاتبات: m.shafaei@tabrizu.ac.ir

(۲) استاد؛ گروه مهندسی آب؛ دانشگاه تبریز؛ تبریز؛ ایران

(۳) دانشیار؛ گروه مهندسی آب؛ دانشگاه تبریز؛ تبریز؛ ایران

(۴) استادیار؛ گروه مهندسی آب؛ دانشگاه شهرکرد؛ شهرکرد؛ ایران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۴/۱۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۱/۱۱

چکیده

بررسی ویژگی‌های بارش در شناخت و پیش‌بینی پدیده‌های حاصل از بارش مانند رواناب و سیلاب ضروری است، لذا در این مطالعه وابستگی میان ویژگی‌های مهم رویدادهای بارش (عمق بارش (R)، ماکزیمم بارش (M)، مدت خشک (D) و مرطوب (L)) با استفاده از ساختار دی-واین مدلسازی شد. ابتدا توزیع‌های احتمالی چند متغیره با توجه به جایگشت‌های مختلف متغیرهای شرطی ساخته شد و سپس خانواده‌های مفصل‌های ارشمیدسی و بیضوی جهت برازش بر جفت-مفصل‌های ساختارهای دی-واین مورد آزمون قرار گرفتند و مناسب‌ترین خانواده مفصل جهت برازش بر هر جفت-مفصل با توجه به معیارهای مختلف انتخاب گردیدند. در مرحله بعد با توجه به معیارهای اطلاعات آکائیکه (AIC) و بیزین (BIC) ساختار M-R-D-L (یعنی D با R، L با D و M با L، R با D و L شرطی شده‌اند) بعنوان بهترین ساختار شناخته شد. در نهایت با استفاده از ساختار منتخب دی-واین ویژگی‌های مهم رویداد بارش شبیه‌سازی شد و به منظور ارزیابی دقت شبیه‌سازی مدل پیشنهادی، آماره‌های مهم هر یک از متغیرهای شبیه‌سازی شده‌ی رویداد بارش با آماره‌های متغیرهای مشاهداتی مقایسه گردیدند. نتایج نشان دادند که اکثر آماره‌های شبیه‌سازی شده توسط مدل چهار بعدی دی-واین دارای تطابق خوبی با آماره‌های متغیرهای مشاهداتی می‌باشند.

کلید واژه‌ها: توزیع احتمالی؛ جفت-مفصل؛ شبیه‌سازی؛ عمق بارش؛ ماکزیمم بارش؛ مفصل ارشمیدسی

مقدمه

بکارگیری یک تابع مفصل و توزیع‌های حاشیه‌ای تک متغیره بیان شود (Sklar, 1959). تاکنون مطالعات گسترده‌ای در زمینه کاربرد مفصل‌ها در هیدرولوژی انجام شده‌اند. از کاربردهای توابع مفصل در هیدرولوژی می‌توان به کاربرد آن

مفصل‌ها توزیع‌های احتمالی چند متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت می‌باشند (Salvadori et al., 2007) و امکان بررسی ساختار وابستگی میان متغیرها را مستقل از رفتار احتمالی هر یک از متغیرها فراهم می‌آورند. مطابق با نظریه اسکالر، هر توزیع توأم چند متغیره می‌تواند با

را بطور گرافیکی ارائه نمودند. مفصل‌های واین اخیرا در علوم مختلف مانند مالی (Nikololoupoulos et al., 2012; Zhang, 2014) و همچنین ژئوفیزیک و هیدرولوژی (Gyasi Agyei and Melching, 2012; Gräler et al., 2013; Xiong et al., 2014; Pham et al., 2015) نشان داده اند. در این مطالعه، مفصل‌های چهار بعدی دی-واین چهار ویژگی مهم رویدادهای بارش (یعنی ماکزیمم عمق، عمق کل، مدت دوره مرطوب و خشک رویدادهای بارش) ساعتی جمع آوری شده از ایستگاه بن واقع در استان چهارمحال و بختیاری ساخته شدند. بدین منظور جایگشت-های مختلف متغیرها مورد بررسی قرار گرفتند و سپس مفصل‌های ارشمیدسی و بیضوی جهت برازش بر جفت-مفصل‌های ساختار دی-واین مورد آزمون قرار گرفتند و سپس مطابق با معیارهای مختلف بهترین مفصل دی-واین چهار بعدی انتخاب گردید و در نهایت مفصل واین منتخب جهت شبیه‌سازی ویژگی‌های رویدادهای بارش مورد استفاده قرار گرفت.

مواد و روش‌ها

مفصل واین

Bedford و Cooke (2001) و (2002) مدلی گرافیکی با عنوان واین نرمال^۱ را برای توزیع‌های با ابعاد بالا ارائه دادند. واین نرمال دارای یک ساختار کلی و عمومی می‌باشد و شامل تعداد زیادی از تجزیه‌های جفت-مفصل (Aas et al., 2009) می‌باشد. لازم بذکر است که جفت-مفصل‌ها همان مفصل‌های دوبعدی می‌باشند. دو نوع مشخص از واین نرمال یعنی واین متعارفی^۲ (C-vine) و دی-واین (D-vine) معرفی شده‌اند، که هر کدام از واین‌ها روش مشخصی را برای تجزیه تابع چگالی ارائه می‌دهند. انواع واین‌ها از شکل گرافیکی آنها قابل تشخیص است، چرا که واین‌ها

در تحلیل فراوانی سیل (De Michele et al., 2005, Zhang and Singh, 2006; Karmakar and Simonovic, 2009; Reddy and Ganguli, 2012a; Sraj et al., 2015) خشکسالی (Kao and Govindaraju, 2010; Reddy and Ganguli, 2012b; Mirabbasi et al., 2012; Mirabbasi et al., 2013; Salvadori and De Michele, 2015) ویژگی‌های بارش (Salvadori and De Michele, 2006; Zhang and Singh 2006; Singh and Zhang, 2007) اشاره نمود. با این حال، ذکر این نکته ضروری است که استفاده از تابع مفصل در مسائل هیدرولوژی با ابعاد بالاتر از سه محدود می‌باشد. بطوریکه Grimaldi و Serinaldi (2007)، Genest و همکاران (2007)، در تحلیل رویدادهای سیل، Govindaraju و Kao (2008) و De Michele و Song (2010) در مطالعات بارش، Singh و Song (2010) در مطالعات خشکسالی، سه متغیر را مورد توجه قرار دادند. کاربرد مفصل‌های چهاربعدی در هیدرولوژی بسیار نادر می‌باشد و در این زمینه تنها می‌توان به مطالعه De Michele و همکاران (2007) اشاره کرد که آنها رویدادهای توفان دریا را با استفاده از یک مفصل چهار بعدی مورد ارزیابی قرار دادند. Pham و همکاران (2015) با استفاده از مفصل سی-واین سه بعدی و چهار بعدی وابستگی بین داده‌های تبخیر-تعرق، بارش، دما و دوره خشکی متعلق به ایستگاه آکل در بلژیک را مدلسازی نمودند و نتیجه گرفتند که مفصل سی-واین قادر به حفظ وابستگی آماری بین داده‌های مذکور می‌باشد. با این حال بکارگیری مفصل‌های واین فاقد موانع و مشکلات مذکور در هنگام حل مسایل با ابعاد بالاتر از ۲ می‌باشد. ساختار درختی مفصل واین روشی جهت ساختن توزیع‌های احتمالی با ابعاد بالا بر مبنای اختلاط توزیع‌های دو بعدی شرطی می‌باشد. این روش توسط Joe در سال 1996 معرفی شده و تاکنون پتانسیل بالایی را در زمینه هیدرولوژی نشان داده است. Cooke و Bedford (2001, 2002) تکنیک تجزیه چگالی‌های چند متغیره را توسعه دادند و روش واین

¹ Regular vine

² Canonical vine

توابع مفصل

مدلسازی تابع مفصل بر اساس تئوری اسکالر پایه گذاری شده است. مطابق با نظریه اسکالر تابع توزیع تجمعی n متغیره‌ی پیوسته $F_{12\dots n}(x)$ شامل متغیره‌های تصادفی X_i با توزیع حاشیه پیوسته $F_i(x_i) = u_i$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{12\dots n}\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n), \theta\} = C_{12\dots n}(u_1, u_2, \dots, u_n, \theta) \quad (1)$$

$$C_{12\dots n}(u_1, u_2, \dots, u_n, \theta) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad (2)$$

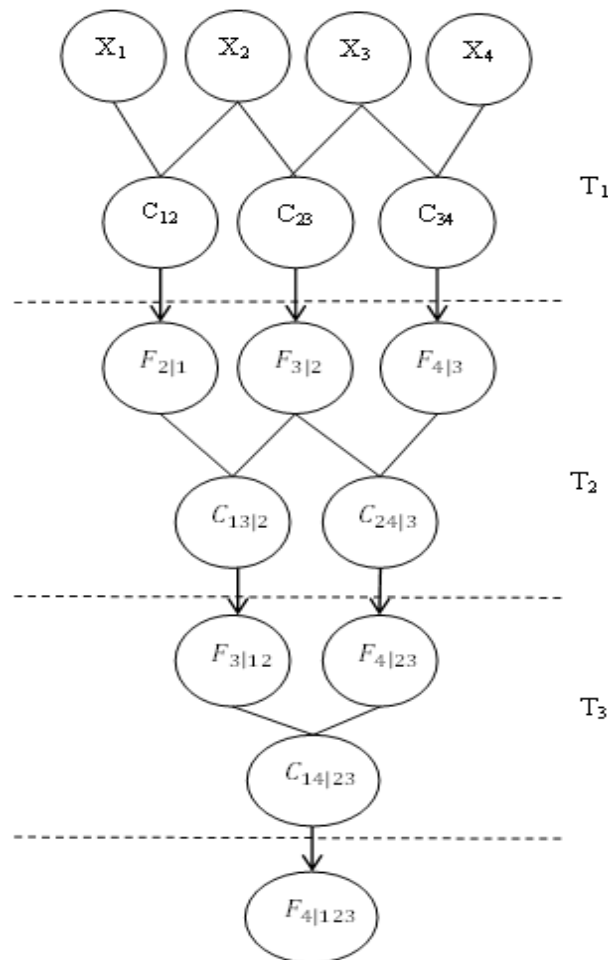
$C_{12\dots n}$ یک تابع مفصل منحصر بفرد n بعدی می‌باشد که توزیع‌های یکنواخت حاشیه‌ای تک متغیره را به توزیع تجمعی n بعدی توأم نگاشت می‌کند؛ بطوریکه C نگاشت $[0,1] \rightarrow [0,1]^n$ می‌باشد. θ پارامتر تابع مفصل می‌باشد که مقدار وابستگی بین توزیع‌های حاشیه‌ای را نشان می‌دهد. تئوری معکوس نظریه اسکالر بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{12\dots n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = F_{12\dots n}\{F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)\} \quad (3)$$

u_n در رابطه بالا توابع توزیع حاشیه‌ای متغیر m و $F_n^{-1}(\cdot)$ تابع چندک $F_i(\cdot)$ می‌باشند. خانواده‌های توابع مفصلی مختلفی برای تعیین ساختمان همبستگی توابع موجود هستند که با انتخاب مناسب آنها می‌توان ساختار وابستگی چند متغیره را به خوبی مدلسازی نمود (Aas et al., 2009).

مجموعه‌ای از درخت‌ها می‌باشند که از لحاظ ترتیب اتصال متغیرها با هم تفاوت دارند. هر یک از ساختارهای واین از مجموعه‌ای از گره‌ها^۱ (دایره) و لبه‌ها^۲ (خط) تشکیل شده‌اند. گره‌ها و لبه‌ها در ساختار واین به ترتیب همان متغیرها (x) و مفصل‌های دو بعدی (C) می‌باشند که در شکل (۱) مشخص شده‌اند. در درخت‌های T_1, T_2, T_3 ترکیب هر دو گره منجر به تشکیل یک جفت-مفصل (C) یا لبه می‌شوند. در یک دی-واین n بعدی کل تجزیه‌ها توسط $n(n-1)/2$ لبه و یا مفصل دو متغیره (جفت-مفصل) تعیین می‌گردد. گره‌های درخت T_j برای مشخص نمودن برچسب لبه‌های درخت T_{j+1} ضروری هستند. بطوریکه برازش یک مفصل دو بعدی بر دو گره منجر به تشکیل یک لبه در درخت بعدی می‌شود. بنابراین لبه‌های درخت T_j گره‌های درخت T_{j+1} را تشکیل می‌دهند. و شرط اتصال دو لبه در درخت T_{j+1} اشتراک دو لبه مورد نظر در یک گره در درخت T_j می‌باشد. یکی از مزایای واین انعطاف در انتخاب خانواده‌های مفصل مختلف در هر لبه می‌باشد. در شکل ۱ درخت T_1 شامل ۴ گره و ۳ لبه و درخت T_2 شامل ۳ گره و ۲ لبه و درخت T_3 شامل ۲ گره و ۱ لبه می‌باشد. بعنوان مثال در درخت ۱ متغیره‌های x_1, x_2, x_3, x_4 گره‌های درخت ۱ و C_{12}, C_{23}, C_{34} جفت-مفصل‌ها و یا لبه‌های درخت ۱ می‌باشند. توابع توزیع شرطی یا گره‌ها در درخت دوم و سوم به ترتیب با استفاده از مشتق جزئی مفصل‌های (لبه‌های) درخت اول و دوم صورت می‌پذیرد. در این مطالعه برای شبیه‌سازی مشخصه‌های مهم رویدادهای بارش از ساختار دی-واین استفاده شد (Aas et al., 2009).

¹ Nodes² Edges



شکل ۱. ساختار دی-واین چهار بعدی.

تخمین پارامترهای مفصل دی-واین

تخمین پارامترهای ساختار دی-واین چهار بعدی با توجه به مراحل زیر صورت می‌گیرد:

۱- برآزش یک مفصل دو بعدی بر u_1 و u_2 جهت تخمین پارامتر θ_{12} .

۲- برآزش یک مفصل دو بعدی بر u_2 و u_3 جهت تخمین پارامتر θ_{23} .

۳- برآزش یک مفصل دو بعدی بر u_3 و u_4 جهت تخمین پارامتر θ_{34} .

۴- تولید سری v_{12} با استفاده از مفصل برآزش داده شده بر u_1 و u_2 با استفاده از رابطه زیر:

$$v_{12} = F(x_2|x_1) = \frac{\partial C_{12}\{F(x_1), F(x_2), \theta_{12}\}}{\partial F(x_1)} \quad (۳)$$

۵- تولید سری v_{23} با استفاده از مفصل برآزش داده شده بر u_2 و u_3 با استفاده از رابطه زیر:

$$v_{23} = F(x_3|x_2) = \frac{\partial C_{32}\{F(x_3), F(x_2), \theta_{32}\}}{\partial F(x_2)} \quad (۴)$$

مفصل‌های ارشمیدسی خانواده‌های (فرانک^۱، جو^۲، گامبل^۳ و کلایتون^۴) و بیضوی^۵ (تی-استیودنت^۶، گوسین^۷) انتخاب خواهد.

انتخاب بهترین مفصل‌های دی-واین

برای انتخاب بهترین مفصل و این چهار متغیره مشخصات مهم رویدادهای بارش یعنی (ماکزیم عمق، عمق کل، مدت زمان دوره خشک و مرطوب رویدادهای بارش) سه مرحله زیر اجرا گردید: (۱) محاسبه ضریب تاو-کندال بین همه جفت-متغیرها جهت اتصال متغیرهای وابسته در مفصل دی-واین و همچنین حذف جفت-متغیرهای غیروابسته در صورت لزوم. ضریب تاو کندال بصورت اختلاف احتمال انطباق و احتمال عدم انطباق تعریف می‌شود. اگر فرض کنیم $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ، n جفت متغیر تصادفی باشند دو جفت نمونه (x_i, y_i) و (x_j, y_j) سازگارند اگر $[(x_j - x_i)(y_j - y_i)] > 0$ در غیر اینصورت ناسازگارند. در نهایت ضریب تاو-کندال بصورت $\tau = (c - d) / \binom{n}{2}$ تعریف می‌گردد. که c و d به ترتیب تعداد جفت‌های سازگار و ناسازگار و n تعداد جفت‌ها می‌باشد. (۲) جایگشت متغیرها (مشخصات رویداد بارش) در ساختار مفصل دی-واین به منظور بدست آوردن ساختارهای دی-واین مختلف. بطوریکه در هر جایگشت هر یک از متغیرهای بارش می‌توانند در مکان‌های متغیر x_1, x_2, x_3 و x_4 در ساختار دی-واین جایگزین شوند و در نهایت منجر به ایجاد ساختارهای مختلف گردند. (۳) استفاده از خانواده‌های ارشمیدسی و بیضوی مختلف جهت برآزش بر جفت-مفصل‌های موجود در ساختارهای ایجاد شده دی-واین حاصل از مرحله قبل.

۶- تولید سری v_{34} با استفاده از مفصل برآزش داده شده بر u_3 و u_4 با استفاده از رابطه زیر:

$$v_{34} = F(x_4 | x_3) = \frac{\partial C_{43}\{F(x_4), F(x_3), \theta_{43}\}}{\partial F(x_3)} \quad (5)$$

۷- برآزش یک مفصل دو بعدی بر v_{12} و v_{23} جهت تخمین پارامتر $\theta_{13|2}$.

۸- برآزش یک مفصل دو بعدی بر v_{23} و v_{34} جهت تخمین پارامتر $\theta_{24|3}$.

۹- تولید سری $\vartheta_{31|2}$ با استفاده از مفصل برآزش داده شده بر ϑ_{12} و ϑ_{23} با استفاده از رابطه زیر:

$$\vartheta_{31|2} = \frac{\delta C_{31|2}(F(x_3 | x_2), F(x_2 | x_1); \theta_{13|2})}{\delta F(x_2 | x_1)} \quad (6)$$

۱۰- تولید سری $\vartheta_{24|3}$ با استفاده از مفصل برآزش داده شده بر ϑ_{34} و ϑ_{23} با استفاده از رابطه:

$$\vartheta_{24|3} = \frac{\delta C_{24|3}(F(x_3 | x_2), F(x_4 | x_3); \theta_{24|3})}{\delta F(x_4 | x_3)} \quad (7)$$

۱۱- برآزش یک مفصل دو بعدی بر $\vartheta_{31|2}$ و $\vartheta_{24|3}$ جهت تخمین پارامتر $\theta_{41|32}$.

ذکر این نکته ضروری است که در کلیه مراحل بالا تخمین پارامترهای θ با استفاده از روش حداکثر لوگ-درست نمائی اجرا گردید. بطوریکه قرار دادن پارامترهای محاسبه شده منتخب بایستی سبب ماکزیم شدن رابطه زیر شود (Aas et al., 2009).

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \{\log c_{i,j}(u_{i,t}, u_{j,t}; \theta)\} \quad (8)$$

در رابطه بالا $c_{i,j}$ تابع چگالی مفصل دو بعدی، $u_{i,t}$ و $u_{j,t}$ سری‌های توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرها در زمان t می‌باشند. توسط روش‌های عددی می‌توان لوگ درست نمائی را در رابطه بالا ماکزیم نمود و در نهایت پارامترها را تخمین زد و بدین ترتیب بهترین تابع مفصل را از میان خانواده‌های

¹ Frank

² Joe

³ Gumbel

⁴ Clayton

⁵ Elliptical

⁶ T-student

⁷ Gaussian

$$u_2 = h_{2|1}^{-1}(w_2|u_1) \quad (۱۲)$$

$$h_{2|1}(u_2|u_1; \theta_{12}) = \frac{\partial}{\partial u_1} C_{12}(u_2, u_1; \theta_{12})$$

$$u_3 = h_{3|12}^{-1}(w_3|u_1, u_2; \theta_{13|2}), \quad (۱۳)$$

$$h_{3|12}(u_3|u_1, u_2; \theta_{13|2}) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{123}(u_1, u_2, u_3)}{\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{12}(u_1, u_2; \theta_{12})} \quad (۱۴)$$

$$u_4 = h_{4|123}^{-1}(w_4|u_1, u_2, u_3) \quad (۱۵)$$

$$h_{4|123}(u_4|u_1, u_2, u_3) = \frac{\frac{\partial^3}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} C_{1234}(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\frac{\partial^3}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} C_{123}(u_1, u_2, u_3)} \quad (۱۶)$$

بدست آوردن $h_{4|123}$ منوط به محاسبه برخی مشتق جزئی می‌باشد که در زیر آورده شده‌اند:

$$\frac{\partial^3}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} C_{1234}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{\partial}{\partial u_1} C_{14|23}(h_{1|23}(u_1|u_2, u_3), h_{4|23}(u_4|u_2, u_3)) \quad (۱۷)$$

$$h_{1|23}(u_1|u_2, u_3) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_3} C_{123}(u_1, u_2, u_3)}{\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_3} C_{23}(u_2, u_3; \theta_{23})} \quad (۱۸)$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u_3} C_{13|2} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} C_{12}(u_1, u_2; \theta_{12}), \frac{\partial}{\partial u_2} C_{23}(u_2, u_3; \theta_{23}); \theta_{13|2} \right)}{\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_3} C_{23}(u_2, u_3; \theta_{23})}$$

$$h_{4|23}(u_4|u_2, u_3) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_3} C_{234}(u_2, u_3, u_4)}{\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_3} C_{23}(u_2, u_3; \theta_{23})} = \quad (۱۹)$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u_3} C_{24|3} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} C_{23}(u_2, u_3; \theta_{23}), \frac{\partial}{\partial u_3} C_{34}(u_3, u_4; \theta_{34}); \theta_{24|3} \right)}{\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_3} C_{23}(u_2, u_3; \theta_{23})}$$

در معادلات بالا θ پارامترهای مفصل می‌باشند که روش بکار برده شده جهت تخمین آنها در بخش قبل توضیح داده شده است (De Michele et al., 2007).

مطالعه موردی

در این مطالعه آمار بارش ساعتی ایستگاه بن واقع در استان چهارمحال و بختیاری به مدت ۷ سال (۱۳۹۴-

عبارت دیگر بر هر یک از جفت-مفصل‌های موجود در درخت‌های اول، دوم و سوم ساختار دی-واین همگی خانواده‌های مفصل ارشمیدسی و بیضوی مورد آزمون قرا می‌گیرند تا بهترین خانواده مفصل جهت برازش بر جفت-مفصل‌های مختلف انتخاب شوند. ۴) تخمین پارامترهای جفت-مفصل‌های خانواده‌های مختلف مطابق با روش شرح داده شده در بخش (تخمین پارامترهای مفصل دی-واین) ۵) انتخاب مناسب ترین خانواده مفصل برای هر جفت-مفصل که در نهایت بزرگترین لوگ درست نمائی و کمترین مقدار معیار اطلاعات آکائیکه^۱ (AIC) و اطلاعات بیزین^۲ (BIC) را ارائه می‌دهند. محاسبه معیارهای مذکور در زیر شرح داده شده‌اند: (Brechmann. et al. 2012)

$$L(u, \vartheta, \theta) = \sum_{t=1}^T \{ \log c_{12}(u_{1,t}, u_{2,t}; \theta_{12}) + \log c_{23}(u_{2,t}, u_{3,t}; \theta_{23}) + \log c_{34}(u_{3,t}, u_{4,t}; \theta_{34}) \} + \log c_{31|2}(\vartheta_{21,t}, \vartheta_{32,t}; \theta_{31|2}) + \log c_{24|3}(\vartheta_{32,t}, \vartheta_{43,t}; \theta_{24|3}) + \log c_{14|23}(\vartheta_{31|2,t}, \vartheta_{24|3,t}; \theta_{14|23}) \quad (۹)$$

$$AIC = -2L(u, \vartheta, \theta) + 2k \quad (۱۰)$$

$$BIC = -2L(u, \vartheta, \theta) + 2 \ln(n)k \quad (۱۱)$$

در معادلات بالا $L(u, \vartheta, \theta)$ لوگ درست نمائی، k تعداد پارامترهای مفصل و n به تعداد داده‌ها اشاره دارد.

شبیه‌سازی مشخصات رویدادهای بارش

در این مطالعه، شبیه‌سازی مشخصات رویدادهای بارش با استفاده از تبدیل انتگرال احتمالی و تئوری اسکالر انجام پذیرفت. بدین منظور ابتدا نمونه‌های تصادفی w_1, w_2, w_3 و w_4 با استفاده از توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ تولید می‌شوند و سپس:

$$u_1 = w_1$$

¹ Akaike information criterion

² Bayesian information criterion

نتایج و بحث

توسعه ساختار دی-واین و شبیه‌سازی ویژگی‌های بارش

اولین مرحله شبیه‌سازی چند بعدی بارش استخراج توزیع‌های حاشیه‌ای چهار ویژگی مهم بارش می‌باشد. در این تحقیق، توابع توزیع ناپارامتری به منظور برازش بر سری‌های زمانی هر کدام از چهار ویژگی بارش به کار گرفته شد. در این مطالعه از تابع چگالی احتمال ناپارامتریک از نوع کرنل نرمال استفاده شد که در زیر رابطه این تابع چگالی احتمال آورده شده است:

$$f(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (20)$$

که در آن:

$$h = \left(\frac{4}{3n}\right)^{1/5} \sigma, \quad K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty \quad (21)$$

که در آن h ، σ و n به ترتیب باند کرنل، انحراف معیار و تعداد داده‌ها می‌باشند. ارزیابی انطباق توزیع حاشیه‌ای ناپارامتریک بر توزیع تجربی ویبول با استفاده از معیارهای ریشه میانگین مربعات خطا ($RMSE$)، میانگین خطای مطلق (MAE) و ضریب تبیین (R^2) صورت گرفت.

(۱۳۸۷) مورد بررسی قرار گرفت. ایستگاه بارانسنجی بن واقع در شهر بن می‌باشد. شهر بن در ۲۵ کیلومتری شمال شهرکرد و درحاشیه جاده ای که شهرکرد مرکز استان را به سد زاینده رود و از آنجا به داران و از طرف دیگر به استان مرکزی متصل می‌سازد، قرار دارد. این شهر بر روی عرض جغرافیایی ۳۲ درجه ۳۳ دقیقه و طول جغرافیایی ۵۰ درجه و ۴۵ دقیقه قرار گرفته است و ارتفاع آن از سطح دریا ۲۲۰۰ متر می‌باشد. شهر بن از شمال به سد زاینده رود، از جنوب به کوه بن و روستای وردنجان، از غرب به کوه افغان و روستای لارک (لاطان) و از شرق به کوه شیراز و سامان محدود می‌شود. این شهرستان دارای اقلیم نیمه مرطوب معتدل سرد می‌باشد. میانگین بارش سالانه در این شهر ۳۰۰ تا ۵۰۰ میلی متر می‌باشد. در این مطالعه یک دوره خشکی با مدت حداقل ۷ ساعت به منظور جداسازی رویدادهای بارش مورد استفاده قرار گرفت و بدین ترتیب ۲۴۰ رویداد بارش شناسائی شدند و سپس ویژگی‌های مهم این رویدادها یعنی عمق کل بارش (R)، ماکزیمم بارش (M)، مدت زمان دوره مرطوب (L) و خشک (D) استخراج شدند که مشخصات آماری ویژگی‌های مهم بارش در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱. مشخصات آماری چهار ویژگی بارش

مشخصات بارش	D (hr)	L (hr)	M (mm)	R (mm)
ماکزیمم	۱۸	۴۷	۶۲/۹	۹۶/۲
مینیمم	۰	۱	۰/۰۲	۰/۰۲
انحراف معیار	۳/۸۰	۸/۱۹	۴/۳۸	۱۱/۷۹
چولگی	۱/۲۰	۱/۸۱	۱۱/۴۳	۳/۵۵
میانگین	۳/۵۵	۹/۰۸	۱/۹۶	۷/۱۶

¹ Determination Coefficient

² Mean Absolute Error

³ Root Mean of Square Error

(۲۴=۱×۲×۳×۴) محاسبه گردید. بنابراین ۲۴ ساختار دی-واین مختلف حاصل گردید که تنها ۱۲ ساختار اتصالات مختلف ایجاد می‌نمایند. ضرایب وابستگی تاوکنندال، اسپیرمن و پیرسون بین جفت-متغیرها در جدول ۳ ارائه شده‌اند. با توجه به مقادیر *P-value* و از آنجا که این مقادیر در کلیه جفت-متغیرها کوچکتر از ۵ درصد بودند بنابراین وابستگی میان همه جفت-متغیرها در سطح ۵ درصد معنی دار می‌باشند. بنابراین برای محاسبات بعدی می‌توان کلیه جفت-متغیرها و در نتیجه ۱۲ ساختار دی-واین حاصل را در نظر گرفت. ابتدا در هر ساختار همه خانواده‌های مفصل ارشمیدسی (فرانک، جو، گامبل و کلاتون) و بیضوی (تی-استیودنت، گوسین) بر هر جفت-مفصل برازش داده شدند و پارامترها با استفاده از روش ترتیبی تخمین زده شدند. سپس معیارهای ارزیابی برای همه خانواده‌های ارشمیدسی و بیضوی محاسبه شدند و در نهایت مفصل‌های وایبی که کمترین مقدار معیارهای *AIC* و *BIC* و بیشترین لوگ درستنمایی را در کل ساختار ارائه می‌دهند انتخاب گردیدند ساختارهای دی-واین مختلف به همراه پارامترهای تخمین زده شده و معیارهای *AIC* و *BIC* و لوگ درست نمایی در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

معیارهای ارزیابی از روابط زیر می‌توانند محاسبه شوند:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (F_{ti} - F_{ei})^2}{n}} \quad (22)$$

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |F_{ti} - F_{ei}|}{n} \quad (23)$$

$$R^2 = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (F_{ti} - F_{ei})^2}{\sum_{i=1}^n F_{ti}^2 - \frac{\sum_{i=1}^n F_{ei}^2}{n}}\right) \quad (24)$$

در رابط بالا F_t و F_e به ترتیب توزیع حاشیه ای ناپارامتری و تجربی می‌باشند و n تعداد داده‌ها و i شماره داده‌ها می‌باشد. لازم بذکر است که توزیع تجربی با توجه به رابطه $P(X \leq x_i) = \frac{i}{n+1}$ مین مشاهده و i رتبه مشاهده در یک سری مشاهداتی است که بصورت صعودی مرتب شده‌اند. نتایج معیارهای ارزیابی در جدول (۲) نشان داده شده‌اند و حاکی از انطباق توزیع‌های حاشیه‌ای حاصل از توزیع تجمعی پارامتریک و تجربی می‌باشند. در این پژوهش به منظور ایجاد ساختارهای مختلف دی-واین چهار بعدی توسط چهار ویژگی مهم رویداد بارش، جایگشت‌های مختلف ۴ ویژگی رویداد بارش (عمق کل بارش، ماکزیمم بارش، زمان دوره مرطوب و خشک) در ۴ گره ساختار دی-واین چهار بعدی طبق رابطه

جدول ۲. معیارهای ارزیابی تطابق توزیع تجربی و ناپارامتریک

مشخصات بارش	RMSE	MAE	R ²
M	۰/۰۰۱	۰/۰۳۲	۰/۹۹۹
R	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸	۰/۹۹۹
L	۰/۰۰۹	۰/۰۰۵	۰/۹۹۹
D	۰/۱۳۵	۰/۰۷۰	۰/۸۸۹

جدول ۳. ضرائب همبستگی میان جفت-متغیرها (مقادیر داخل پرانتز مقادیر P-value می‌باشند)

جفت-متغیرها	اسپیرومن	پیرسون	تاو کندال
MR	(۰)۰/۹۰۴	(۰)۰/۹۰۷	(۰)۰/۷۴۷
ML	(۰)۰/۴۴۳	(۰)۰/۴۴۳	(۰)۰/۳۱۵
MD	(۰)۰/۱۴۶	(۰)۰/۱۴۹	(۰)۰/۱۰۶
RL	(۰)۰/۷۰۹	(۰)۰/۷۰۱	(۰)۰/۵۲۸
RD	(۰/۰۱)۰/۳۰۲	(۰/۰۲)۰/۲۹۰	(۰/۰۲)۰/۲۱۵
LD	(۰)۰/۵۵۵	(۰)۰/۵۳۳	(۰)۰/۴۳۲

شبیه‌سازی مشخصه‌های رویدادهای بارش

بطور کلی سنجش کارائی مدل‌های شبیه‌سازی با مقایسه‌ی آماره‌های متغیرهای شبیه‌سازی شده با متغیرهای مشاهداتی انجام می‌شود. با این حال با توجه به ویژگی استوکاستیک مدل‌ها، وجود مقداری تغییر پذیری در آماره‌های متغیرهای شبیه‌سازی شده اجتناب ناپذیر می‌باشد. از اینرو در این مطالعه مدل‌های چهار بعدی حاصل از ساختار دی-واین جهت شبیه‌سازی ۱۰۰ سری زمانی ۷ ساله (طول سری‌های زمانی مشاهداتی) توزیع‌های حاشیه‌ای عمق کل، ماکزیمم بارش، مدت زمان دوره مرطوب و خشک بکار گرفته شدند و سپس برای تبدیل توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای شبیه‌سازی شده به سری زمانی مشاهداتی از توزیع‌های حاشیه‌ای منتخب استفاده شد.

با توجه به معیارهای لوگ درست نمائی، AIC و BIC ساختار $M-R-D-L$ بعنوان بهترین مفصل دی-واین شناخته شد بنابراین این ساختار به منظور شبیه‌سازی مشخصه‌های رویدادهای بارش مورد استفاده قرار گرفت. به منظور ارزیابی دقت شبیه‌سازی مشخصه‌های بارش توسط ساختار دی-واین مهمترین آماره‌ها یعنی میانگین، انحراف معیار، ماکزیمم، مینیمم و چولگی سری‌های زمانی مشخصه‌های بارش شبیه‌سازی شده محاسبه گردیدند و در شکل ۲ نمایش داده شدند.

در این مطالعه به منظور آزمون نکوئی برازش پارامترهای بدست آمده از تست انتگرال احتمالی^۱ (PIT) استفاده شد (*Aas et al., 2009*). از جدول ۴ می‌توان نتیجه گرفت که کلیه پارامترهای مفصل محاسباتی در ۱۲ ساختار در سطح ۵ درصد معنی دار می‌باشند از آنجا که مقادیر PIT بزرگتر از ۵ درصد می‌باشند. مرور مطالعات اخیر (*Aas et al., 2009; Vernieuwe et al., 2015*) نشان می‌دهد که محققان برای رسیدن به دقیق‌ترین ساختار دی-واین از جفت-متغیرهای با قویترین همبستگی در درخت اول T_1 ساختار دی-واین استفاده نمودند در حالیکه نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که ساختارهای شامل جفت-متغیرهای با وابستگی بالا، الزاما منجر به بیشترین دقت نمی‌شوند از آنجا که ساختار $M-R-L$ شامل جفت-متغیرهای با بالاترین ضریب تاو کندال ($\tau_{MR} = 0.74, \tau_{RL} = 0.52, \tau_{DL} = 0.43$) دقیق‌ترین مدل را ارائه نمی‌نماید بطوریکه لوگ درست‌نمائی، معیار اطلاعات آکائیکه و بیزین آن به ترتیب $4.28, 2.84, -1.18$ می‌باشد. اما ساختار $M-R-D-L$ با مقادیر تاو کندال $\tau_{DL} = 0.43, \tau_{RD} = 0.21, \tau_{MR} = 0.74$ بالاترین مقادیر تاو کندال نمی‌باشند، مناسب‌ترین ساختار را با توجه به معیارهای لوگ درست‌نمائی $6.44, 1.87, -1.18$ معیار اطلاعات آکائیکه و بیزین $0.8, -0.85$ ارائه می‌نماید.

¹ probability integral transform (PIT)

جدول ۴. ساختارهای دی-واین مختلف به همراه پارامترهای تخمین زده شده و معیارهای AIC و BIC و لوگ درست نمائی

۱-۲-۳-۴	θ_{12}	θ_{23}	θ_{34}	$\theta_{13 2}$	$\theta_{24 3}$	$\theta_{14 23}$	Log-Lik	AIC	BIC
RMLD	C(۴/۶۴)	Ga(۰/۴۷)	T(۰/۶۳, ۵)	F(۸/۶۶)	F(-۰/۹۴)	F(-۰/۸۰)	۴۱۹/۸	-۸۲۵/۶	۸۰۱/۲
RMDL	C(۴/۶۴)	Ga(۰/۱۷)	T(۰/۶۳, ۵)	F(۲/۷۷)	T(۰/۴۴, ۸/۲)	F(-۰/۹۲)	۴۲۱/۰	-۸۲۱/۱	۷۹۸/۳
RLDM	Ga(۰/۷۳)	T(۰/۶, ۵)	Ga(۰/۱۷)	F(-۱/۱)	T(۰/۴۴, ۸/۲)	T(۰/۹۳, ۳/۲۴)	۴۲۱/۵	-۸۲۵/۱	۷۹۳/۸
RLMD	Ga(۰/۷۳)	Ga(۰/۴۷)	Ga(۰/۱۷)	T(۰/۹۳, ۳/۳)	G(۱/۷۱)	G(-۰/۰۹)	۴۲۰/۱	-۸۲۶/۳	۸۰۱/۹
RDML	Ga(۰/۳۵)	Ga(۰/۱۷)	Ga(۰/۴۷)	C(۴/۷۸)	G(۱/۷۱)	F(۷/۰۵)	۴۱۴/۲	-۸۱۶/۵	۷۲۵/۲
RDLM	Ga(۰/۳۵)	T(۰/۶۳, ۵)	Ga(۰/۴۷)	G(۱/۹)	F(-۰/۹۴)	T(۰/۹۳, ۲/۲۵)	۴۲۲/۷	-۸۲۹/۵	۸۰۱/۷
MDRL	Ga(۰/۱۷)	Ga(۰/۳۵)	Ga(۰/۷۳)	C(۴/۷۸)	G(۱/۶۰)	F(-۴/۵۰)	۴۱۶/۴	-۸۲۰/۲	۷۹۹/۹
MRLD	F(۴/۶۴)	Ga(۰/۷۳)	T(۰/۶۳, ۵)	F(-۵/۷۰)	F(-۱/۱۲)	C(-۰/۰۹)	۴۲۸/۲	-۸۴۲/۴	۸۱۸/۰
MRDL	C(۴/۶۴)	Ga(۰/۳۵)	T(۰/۶۳, ۵)	F(-۲/۱۷)	G(۱/۹۰)	F(-۵/۸۲)	۴۴۴/۶	-۸۷۵/۱	۸۵۰/۸
MLRD	Ga(۰/۴۷)	Ga(۰/۷۳)	Ga(۰/۳۵)	T(۰/۹۳, ۳/۳)	G(۱/۶۰)	Ga(۰/۰۱)	۴۱۹/۴	-۸۲۴/۸	۸۰۰/۵
LMRD	Ga(۰/۴۷)	C(۴/۶۴)	Ga(۰/۳۵)	F(۸/۶۶)	F(-۲/۱۷)	G(۱/۴۴)	۴۱۴/۲	-۸۱۶/۶	۷۹۵/۶
LRMD	Ga(۰/۷۳)	C(۴/۶۴)	Ga(۰/۱۷)	F(-۵/۷۰)	F(۲/۷۷)	Ga(۰/۴۴)	۴۱۴/۹	-۸۱۷/۹	۷۹۷/۰

* در جدول بالا حروف F, T, G, Ga, C به ترتیب نشاندهنده مفصل‌های فرانک، تی استیودنت، گوسین، کلایتون می‌باشند.

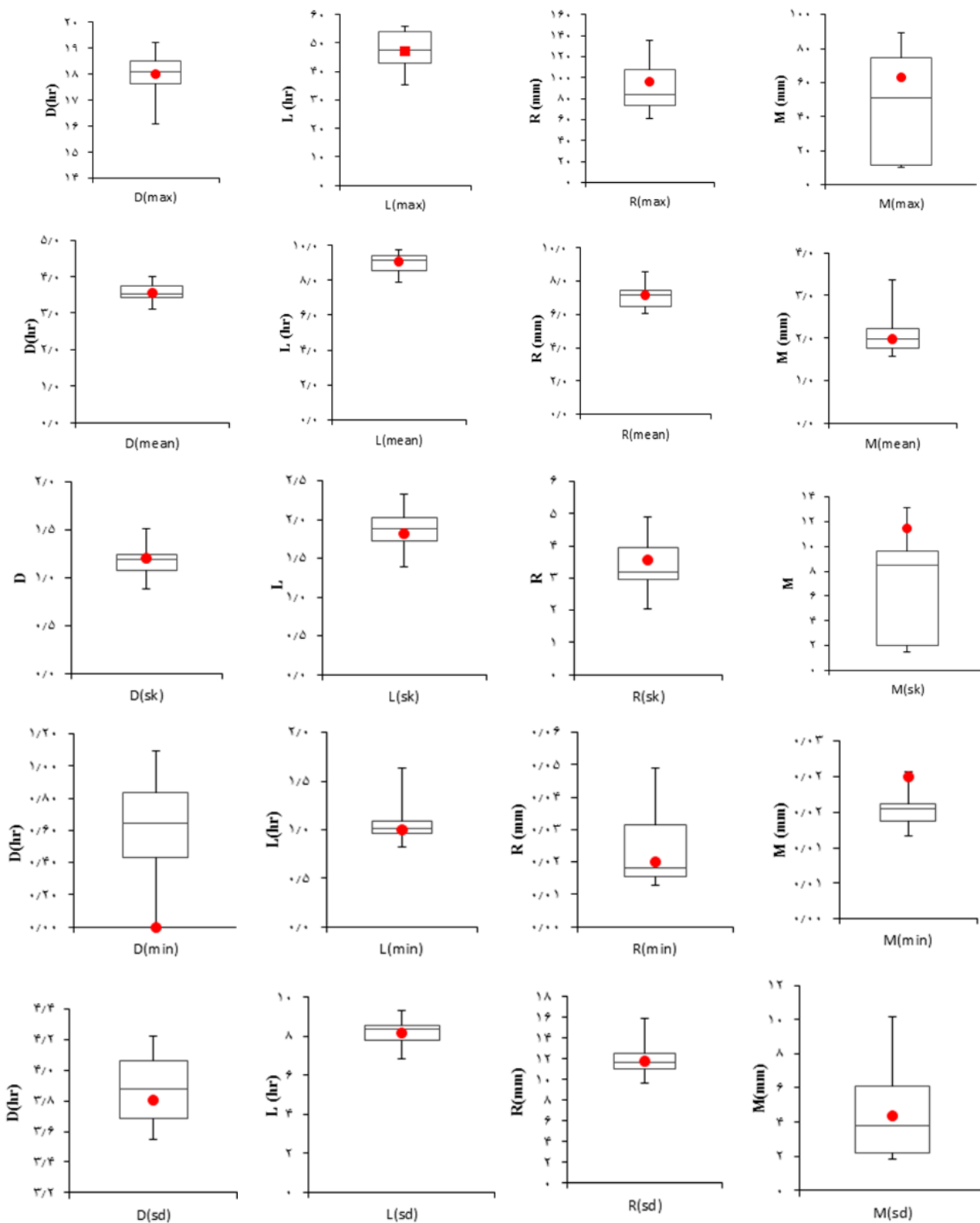
استفاده شد. با استفاده از جایگشت متغیرها در ساختارهای دی-واین چهار بعدی ۱۲ ساختار مختلف توسعه داده شد و خانواده‌های مفصل مختلف از خانواده‌های ارشمیدسی و بیضوی بر جفت- مفصل‌ها مورد آزمون قرار گرفتند و مطابق با معیارهای مختلف مناسب‌ترین خانواده مفصل به منظور برآزش بر هر جفت-مفصل انتخاب گردید.

در مرحله بعدی مناسب‌ترین ترکیب‌ها با توجه به معیارهای *AIC*, *BIC* و حداکثر لوگ درست نمائی انتخاب شدند و در نهایت مطابق با معیارهای مذکور ساختار *M-R-D-L* بعنوان بهترین ساختار جهت شبیه‌سازی مشخصه‌های مهم رویدادهای بارش انتخاب گردید و نتایج زیر حاصل گردید: (۱) لزوما استفاده از همبسته ترین جفت-متغیرها در درخت اول سبب رسیدن به مناسب‌ترین ساختار نمی‌گردد. بنابراین برای دستیابی به دقیق‌ترین ساختار بایستی همه جایگشت‌های ممکن متغیرها توسعه یافته و همه مفصل‌های واین با ساختار اتصالی متفاوت ساخته شوند و سپس اقدام به انتخاب بهترین مفصل واین نمود.

شکل ۲ نشان می‌دهد که میانگین، ماکزیمم و انحراف معیار در همه مشخصه‌های بارش شبیه‌سازی شده به خوبی حفظ شده است چرا که میانگین، ماکزیمم و انحراف معیارهای کلیه مشخصه‌های رویداد بارش مشاهداتی در باکس پلات‌ها قرار گرفته اند. همچنین چولگی سه متغیر عمق بارش، مدت زمان دوره مرطوب و دوره خشک به خوبی توسط مفصل واین حفظ شده‌اند با این حال چولگی ماکزیمم عمق مشاهداتی در باکس پلات قرار ننگرفته و در نتیجه چولگی این متغیر به خوبی شبیه‌سازی نشده است. از شکل ۲ می‌توان مشاهده نمود که مینیمم متغیرهای عمق بارش و مدت زمان دوره مرطوب به خوبی شبیه‌سازی شده‌اند با این وجود مینیمم دو متغیر مدت زمان دوره خشک و ماکزیمم عمق بارش به خوبی نگهداری نشده‌اند.

نتیجه گیری

در این مطالعه از ساختار دی- واین به منظور شبیه‌سازی چهار مشخصه مهم رویدادهای بارش یعنی ماکزیمم عمق، عمق کل، مدت زمان دوره مرطوب و خشک رویداد بارش



شکل ۲. باکس پلات‌های حاصل از شبیه‌سازی مفصل دی-واین (دایره‌های قرمز نمایش دهنده آماره‌های مشاهداتی ویژگی‌های بارش می‌باشند)

و توانایی خوبی در شبیه‌سازی مشخصه‌های رویدادهای بارش می‌باشد. بنابراین پیشنهاد می‌شود که در مطالعات آینده، از مدل چهار بعدی دی-واین به منظور شبیه‌سازی دیگر مشخصه‌های متغیرهای هیدرولوژیکی استفاده شود.

(۲) انعطاف ساختار دی-واین در انتخاب مناسب‌ترین و دقیق‌ترین خانواده مفصل از میان خانواده‌های ارشمیدسی و بیضوی برای هر جفت-مفصل منجر به حاصل شدن دقیق‌ترین ساختار می‌گردد. (۳) نتایج شبیه‌سازی متغیرها توسط مفصل دی-واین حاکی از حفظ آماره‌های متغیرهای مشاهداتی می‌باشند و در نتیجه مفصل دی-واین دارای دقت

فهرست منابع

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. and Bakken, H. 2009. Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44 (2): 182–198.
- Bedford, T. and Cooke, R. 2001. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 32 (1): 245–268.
- Bedford, T. and Cooke, R. 2002. Vines – A new graphical model for dependent random variables, *Annals of Statistics*. 30 (4), 1031–1068.
- Brechmann, E. C., Czado, C. and Aas, K. 2012. Truncated regular vines in high dimensions with applications to financial data. *Canadian Journal of Statistics*, 40 (1): 68-85.
- De Michele, C., Salvadori, G., Canossi, M., Petaccia, A. and Rosso, R. 2005. Bivariate statistical approach to check adequacy of dam spillway. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10 (1): 50–57.
- De Michele, C., Salvadori, G., Passoni, G., and Vezzoli, R. 2007. A multivariate model of sea storms using copulas. *Coastal Engineering*, 54 (10): 734–751.
- Genest, C., Favre, A., Beliveau, J., and Jacques, C. 2007. Metaelliptical copulas and their use in frequency analysis of multivariate hydrological data. *Water Resources Research*. 43 (9), W09401, doi:10.1029/2006WR00527.
- Genest, C. and Rivest, L.-P. 1993. Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88 (423): 1034–1043.
- Gräler, B., van den Berg, M. J., Vandenberghe, S., Petroselli, A., Grimaldi, S., De Baets, B., and Verhoest, N. E. C. 2013. Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation. *Hydrology and Earth System Science*, 17 (4): 1281–1296
- Gyasi-Agyei, Y. and Melching, C. 2012. Modelling the dependence and internal structure of storm events for continuous rainfall simulation. *Journal of Hydrology*, 464-465: 249–261.
- Joe, H. 1996. Families of m-variate distributions with given margins and $m(m-1)/2$ bivariate dependence parameters. In L. Rueschendorf, B. Schweizer, and M. D. Taylor (Eds.), *Distributions with fixed marginal and related topics*. Vol. 28, pp. 120-141. Hayward: Institute of Mathematical Statistics.
- Kao S, and Govindaraju, R. 2008. Trivariate statistical analysis of extreme rainfall events via the Plackett family of copulas. *Water Resources Research* 44, (2) W02415, doi:10.1029/2007WR006261.
- Kao, SC. and Govindaraju, RS. 2010. A copula-based joint deficit index for droughts. *Journal of Hydrology*, 380(1–2):121–134.
- Karmakar, S., and Simonovic, SP. 2009. Bivariate flood frequency analysis. Part 2: a copula-based approach with mixed marginal distributions. *Journal of Flood and Risk Management*, 2(1):32–44.

- Mirabbasi, R., Fakhri-Fard, A., and Dinpashoh, Y. 2012. Bivariate drought frequency analysis using the copula method. *Theoretical and Applied Climatology*, 108 (1): 191–206.
- Mirabbasi, R., Anagnostou, E.N., Fakhri-Fard, A., Dinpashoh, Y. and Eslamian, S. 2013. Analysis of meteorological drought in northwest Iran using the Joint Deficit Index. *Journal of Hydrology*, 492: 35–48.
- Nikololoupoulos, A., Joe, H. and Li, H. 2012. Vine copulas with asymmetric tail dependence and applications to financial return data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 56 (11): 3659–3673.
- Pham, M. T., Vernieuwe, H., De Baets, B., Willems, P. and Verhoest, N.E.C. 2015. Stochastic simulation of precipitation-consistent daily reference evapotranspiration using vine copulas. *Stochastic Environmental and Research Risk Assessment*, 1-18. DOI 10.1007/s00477-015-1181-7
- Reddy, MJ. and Ganguli, P. 2012a. Application of copulas for derivation of drought severity–duration– frequency curves. *Hydrological Processes*, 26 (11): 1672–1685
- Reddy, MJ., Ganguli, P. 2012b. Bivariate flood frequency analysis of upper Godavari River flows using Archimedean copulas. *Water Resources Management*, 26 (14): 3995–4018.
- Salvadori, G. and De Michele, C. 2006. Statistical characterization of temporal structure of storms. *Advances in Water Resources*, 29 (6): 827–842.
- Salvadori, G., De Michele, C., Kottegoda, N.T. and Rosso, R. 2007. *Extremes in nature: an approach using copulas*, Springer, Dordrecht.
- Salvadori, G. and De Michele, C. 2015. Multivariate real-time assessment of droughts via copula-based multi-site Hazard Trajectories and Fans. *Journal of Hydrology*, 526: 101-115.
- Serinaldi, F. and Grimaldi, S. 2007. Fully nested 3-copula: procedure and application on hydrological data. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12 (4): 420–430.
- Sklar, A. 1959. *Fonction de repartition a n dimensions et leurs marges*, vol. 8. Publications de L’Institute de Statistique, Universite’ de Paris: Paris, pp 229–231.
- Singh, V. P. and Zhang, L. 2007. IDF curves using the Frank Archimedean copula. *J Hydrol Eng*, 12 (6): 651–662.
- Song, S. and Singh, V. 2010. Meta-elliptical copulas for drought frequency analysis of periodic hydrologic data. *Stochastic Environmental and Research Risk A*, 24 (3): 425–444.
- Sraj, M., Bezak, N. and Brilly, M. 2015. Bivariate flood frequency analysis using the copula function: a case study of the Litija station on the Sava River. *Hydrologic Processes*, 29 (2): 225–238.
- Vernieuwe, H., Vandenberghe, S., De Baets, B. and Verhoest NEC. 2015. A continuous rainfall model based on vine copulas. *Hydrology and Earth System Science*, 19(6):2685–2699
- Xiong, L., Yu, K. and Gottschalk, L. 2014. Estimation of the distribution of annual runoff from climatic variables using copulas. *Water Resources Research*, 50 (9): 7134–7152.
- Zhang, L., Singh, V. P. 2006. Bivariate flood frequency analysis using copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11 (2): 150–164.
- Zhang, D. 2014. Vine copulas and applications to the European Union sovereign debt analysis, *International Review of Financial Analysis*, 36: 46–56.



ISSN 2251-7480

Modeling rainfall event characteristics using D-vine copulas

Maryam Shafaei^{1*}, Ahmad Fakheri-Fard², Yagob Dinpashoh³ and Rasoul Mirabbasi⁴

^{1*} Ph.D student, Water Resources Engineering, Department of Water Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

* Corresponding author email: m.shafaei@tabrizu.ac.ir

² Professor, Department of Water Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

³ Associate Professor, Department of Water Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

⁴ Assistant Professor, Department of Water Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Received:30-03-2016

Accepted:03-07-2016

Abstract

Investigation of precipitation characteristics is necessitate in understanding and predicting phenomena of precipitation such as runoff and flood. Therefore in this study, dependence among the main characteristics of a rainfall event (i.e., rainfall depth R, maximum rainfall depth M, wet period L, and dry period D) were modeled using D-vine structure. Firstly, different multivariate probability distributions were built, making all the permutations of the conditioning variables and then Archimedean and Elliptic copulas were used for fitting each pair-copula. The best copula family was selected for fitting on each pair-copula according to different criteria. In the next stage, M-R-D-L structure, i.e., with D conditioned by L, R by D and L, and M by R, D, and L, was known as the most suitable structure considering to AIC and BIC criteria. Finally, rainfall event characteristics were simulated using the selected structure. In order to evaluation of simulation accuracy of proposed model, the main statistics of simulated variables were compared with those of observed variables. The results showed that the majority of simulated statistics have good accordance with observed statistics.

Keywords: archimedean copula; maximum rainfall depth; probability distributions; pair-copula; rainfall depth; simulation