دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای حالت تاخیری محدود

داود ناصح[۱*]، ناصر پریز[۲]، علی وحیدیان کامیاد[۳]

[۱ و ۲] گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
[۳] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

در این مقاله معیارهایی برای بررسی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای تاخیر محدود در حالت ارائه می‌گردد. ابتدا، قضیه مقایسه جدیدی برای کرانداری پاسخ سیستم دیفرانسیل فازی در قیاس با سیستم دیفرانسیل معمولی تعینی در فضای N بعدی بر اساس مفهوم توابع غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بیان می‌گردد؛ همچنین، برای تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی فازی، توابع شبه لیاپانوف برداری تعریف می‌گردند. سپس با استفاده از این توابع برداری شبه لیاپانوف به همراه قضیه مقایسه جدیدی که مطرح شده است، برخی قضایا برای بررسی انواع مفاهیم پایداری (پایداری نهایی، پایداری مجانبی، پایداری قوی و پایداری یکنواخت) برای سیستم دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای حالت تاخیردار مطرح می‌شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می‌رسند. در انتها مثالی روشنگر برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی، قضیه مقایسه، توابع شبه لیاپانوف برداری، غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی، پایداری کاربردی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:naseh@mail.um.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه نظریه پایداری لیاپانوف[1] کاملا شناخته شده است و تئوری و کاربردهای آن در [1, 2] ارائه شده‌اند. از آن جایی که یافتن تابع لیاپانوف امری مشکل است، در عمل مفهوم پایداری بر حسب دو معیار[2] مطرح شده که روشی بسیار قدرتمند است [3-6]. در برخی موارد، از جمله نگه داشتن دمای یک پروسه شیمیایی بین کران‌هایی خاص، نوسان فضاپیما حول یک مسیر و غیره، حالت سیستم شاید ناپایدار باشد، ولی سیستم می‌تواند به اندازه کافی نزدیک به حالت مطلوب نوسان داشته باشد به گونه‌ای که عملکرد سیستم عملا مناسب باشد. در این موارد مفهوم پایداری کاربردی[3] معرفی شده است [7-9]. در مراجع فوق، نویسندگان پایداری سیستم‌های بدون ضربه[4] (جهش حالت) را بررسی کرده‌اند. این در حالی است که در مدلسازی بسیاری از مسائل دنیای واقعی، از جمله سیستم‌های سوئیچ شونده[5]، باید اثرات ضربه‌ای را نیز در نظر بگیریم. در مراجع [5, 10-20] پایداری معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای[6] بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در کارهای قبلی نویسندگان فوق فرض کرده‌اند که حالت‌ها فقط به حالت کنونی بستگی دارد؛ این در حالی است که در بسیاری موارد که تاخیر زمانی داریم، آن ها به حالت گذشته هم وابستگی دارند [21-23].

چنانچه مشاهده می‌گردد، در کارهای پیشین، فازی بودن[7] پدیده‌ها لحاظ نشده است؛ در حالی که این مساله در دنیای واقعی غیرقابل اجتناب است؛ چرا که فازی، راهی برای مدلسازی سیستم‌های دارای عدم قطعیت[8] و بطور یقینی مشخص نشده است [24-29]. بنابراین، ما در این مقاله قضایایی برای بررسی انواع پایداری (پایداری نهایی[9]، پایداری مجانبی[10]، پایداری قوی[11] و پایداری یکنواخت[12]) معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای حالت تاخیری ارائه خواهیم کرد.

بخش‌های این مقاله بدین شرح است: در بخش ۲، برخی مفاهیم و تعاریف پایه که در ادامه مقاله از آن‌ها استفاده می‌کنیم را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، ابتدا قضیه مقایسه[13] سیستم دیفرانسیل فازی[14] با سیستم دیفرانسیلی معمولی[15] در N بعد بر اساس مفهوم غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی[16] بیان می‌گردد. در اینجا برای تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی فازی، توابع شبه لیاپانوف برداری[17] تعریف می‌گردند. سپس با استفاده از این توابع به همراه قضیه مقایسه جدید برخی قضایا برای بررسی انواع مفاهیم پایداری برای سیستم دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای تاخیر مطرح می‌شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می‌رسند. پس از آن مثالی روشنگر برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می‌گردد. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۴ آورده شده است.

۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

در این بخش برخی نمادها، تعاریف و نتایج را که در ادامه مقاله استفاده می‌شوند از مراجع [7, 28, 17, 10, 9 , 30] ذکر می‌شوند.

فضای توابع فازی را بصورت زیر نمایش و تعریف می‌کنیم

$$\boldsymbol{E^n} = \{\boldsymbol{u}: \mathbb{R}^n \to [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]\}$$

به قسمی که $\boldsymbol{u}$ شرایط زیر را ارضا می‌کند:

(الف) $\boldsymbol{u}$ نرمال است، یعنی $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به گونه‌ای که $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{1}$؛

1. Lyapunov stability theory
2. stability in terms of two measurements
3. practical stability
4. impulse
5. switching systems
6. impulsive differential equations
7. fuzziness
8. uncertainty
9. eventual stability
10. asymptotic stability
11. strong stability
12. uniform stability
13. comparison theorem
14. fuzzy differential system
15. ordinary differential equation
16. upper quasi-monotone nondecreasing
17. vector lyapunov-like functions

(ب) u محدب فازی[18] است، یعنی برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [0,1]$ داریم:
$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{u(x), u(y)\};$$

(ج) u شبه پیوسته از بالا[19] است؛

(د) $[u]^0 = cl\{x \in \mathbb{R}^n | \, u(x) > 0\}$ فشرده است.

برای $\alpha \in (0,1]$، تعریف می‌کنیم: [28]
$$[u]^\alpha = cl\{x \in \mathbb{R}^n | \, u(x) \geq \alpha\}.$$

سپس فضای فازی N-بعدی
$$(E^n)^N \equiv E^n \times E^n \times \ldots \times E^n \,, \quad N \text{ بار}, \; N \in \mathbb{N}$$

را به همراه متر فازی برداری[20] زیر بر روی آن
$$\widetilde{D_0}(X,Y) = (D_0(X_1,Y_1), D_0(X_2,Y_2), \ldots, D_0(X_N,Y_N))$$

در نظر می‌گیریم که در آن:
$$D_0(X_i,Y_i) \equiv \sup_{0\leq\alpha\leq 1} D([X_i]^\alpha, [Y_i]^\alpha)$$

متر فازی بر روی E^n است، به طوری که فاصله هاسدورف[21] بصورت زیر تعریف می‌گردد
$$D[A,B] \equiv max\{\sup_{x\epsilon B} d(x,A) \, , \sup_{y\epsilon A} d(y,B)\}$$

که منظور از $d(x,A) \equiv \inf_{y\epsilon A} d(x,y)$ فاصله عنصر x تا مجموعه A است.
همچنین، مشتق هاکوهارا[22] برای توابع فازی بصورت زیر تعریف می‌گردد:
$$D_H F(t) \triangleq \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t)-F(t-h)}{h}$$

با تعریف نرم ماکزیمم بصورت
$$\|U\| \equiv \|U\|_M \triangleq \max_{1\leq i\leq N} |U_i|$$

کره فازی بصورت زیر قابل فرض است
$$S(\rho) \triangleq \{X \in (E^n)^N : \|\widetilde{D_0}(X, \widehat{0})\| < \rho\}$$

تعریف ۲-۱: فرض کنید $\mathcal{T}$ یک مقیاس زمانی[23] با کوچکترین عضو[24] $t_0 \geq 0$ و بدون بزرگترین عضو[25] باشد. نگاشت‌های (عملگرهای پرش[26]) $\sigma, \rho: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ بصورت زیر تعریف می‌شوند [9]
$$\sigma(t) = \inf(s \in \mathcal{T}; s > t)$$
$$\rho(t) = \sup(s \in \mathcal{T}; s < t) \, .$$

تعریف ۲-۲: تابع $G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ که $\mathcal{G}$ ناحیه‌ای در فضای $\mathbb{R}^N$ است، را غیرنزولی شبه یکنوا در $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ گوییم اگر برای هر جفت نقطه (t,α) و (t,β) از $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ و $j = 1,2,\ldots,N$، نامساوی $G_j(t,\alpha) \geq G_j(t,\beta)$ برقرار باشد بازای $\alpha_j = \beta_j$ و $\alpha_i \geq \beta_i$، با $i \neq j$، $i = 1,2,\ldots,N$، یعنی برای هر $t \in \mathcal{T}$ و $j = 1,2,\ldots,N$ ، توابع $G_j(t,\alpha)$ بر حسب $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_N)$ صعودی باشند [10].

تعریف ۲-۳: تابع $G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N \; (N \geq 1)$ را غیرنزولی شبه یکنوا از بالا بر حسب U گویند، اگر برای $U, W \in \mathbb{R}_+^N$، نامساوی $\|U\| \leq \|W\|$ نتیجه دهد $\|G(t,U)\| \leq \|G(t,W)\|$. [9]

تعریف ۲-٤: کلاس‌هایی از توابع بصورت زیر تعریف می‌شوند
$$\mathcal{K} \triangleq \left\{ \begin{array}{c} \alpha : C[R^+, R^+], \\ \alpha(0) = 0 \text{ و } \alpha(t) \text{ اکیدا صعودی است} \end{array} \right\}$$
$$\Gamma \triangleq \{h \in C[\mathcal{T} \times (E^n)^N, R^+] : \forall t \in \mathcal{T}, \inf_{X\epsilon(E^n)^N} h(t,X) = 0\}$$

18. fuzzy convex
19. upper semicontinuous
20. vector fuzzy metric
21. Hausdorf distance
22. Hukuhara derivative

23. time scale
24. minimal element
25. maximal element
26. jump operators

$$\Gamma_d \triangleq \{h \in C[R_d \times (E^n)^N, R^+]: \forall t \in R_d = [-d,\infty), \inf_{X\epsilon(E^n)^N} h(t,X) = 0\}$$

تعریف ۲-۵: با فرض $h_0 \in \Gamma_d$، $\psi \in PC([-d,0],(E^n)^N)$ و بازای هر $t \in \mathcal{T}$ تعریف می‌کنیم [7]

$$\widetilde{h_0}(t,\psi) \triangleq sup_{-d\le\zeta\le 0}\, h_0\big(t+\zeta,\psi(\zeta)\big)$$

تعریف ۲-۶: عضو غیرماکزیمال $t \in \mathcal{T}$ را پراکنده از راست[27] (rs) گوییم اگر $\sigma(t) > t$ و متراکم از راست[28] (rd) نامیم اگر $\sigma(t) = t$. عضو غیرمینیمال $t \in \mathcal{T}$ را پراکنده از چپ[29] (ls) گوییم اگر $\rho(t) < t$ و متراکم از چپ[30] (ld) نامیم اگر $\rho(t) = t$.[9]

تعریف ۲-۷: نگاشت $H: \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را پیوسته متراکم از راست[31] گوییم و بصورت $H \in C_{rd}[\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ نمایش می‌دهیم اگر

(الف) بازای t ماکزیمال یا متراکم از راست، در هر (t,x) پیوسته باشد؛

(ب) حدود $H(t^-,x) = \lim_{(s,y)\to(t^-,x)} H(s,y)$ و $\lim_{y\to x} H(t,y)$ در هر (t,x) بازای t متراکم از چپ موجود باشند. [9]

تعریف ۲-۸: تابع $V: \mathcal{T} \times S(\rho) \to \mathbb{R}^N$ متعلق به کلاس $\mathbb{V}_0$ است اگر [17]

(الف) تابع V در تمام بازه‌های $[t_{k-1},t_k) \times S(\rho)$ پیوسته باشد و برای تمام $t \in \mathcal{T}$، داشته باشیم $V(t,\widehat{0}) \equiv 0$؛

(ب) تابع $V(t,X)$ لیپ شیتز محلی[32] برحسب X باشد؛ یعنی برای

$$|V(t,X) - V(t,Y)| \le L(t)\widetilde{D_0}(X,Y),$$

که در آن $L(t)$ یک ماتریس $N \times N$ با عناصر غیرمنفی پیوسته بر $\mathbb{R}_+$ است و

$$|V(t,X) - V(t,Y)| \equiv (|V_1(t,X) - V_1(t,Y)|, |V_2(t,X) - V_2(t,Y)|, \dots, |V_N(t,X) - V_N(t,Y)|).$$

در اینجا منظور از $|V(t,X)|$، بردار $(|V_1(t,X)|, |V_2(t,X)|, \dots, |V_N(t,X)|)$ است که V_iها $(i = 1,2,\dots,N)$ عناصر V هستند.

(ج) برای هر $k \in \mathbb{N}$ حدود کراندار زیر وجود داشته باشند

$$\lim_{(t,Y)\to(t_k,X)} V(t,Y) = V(t_k^-,X)$$

تعریف ۲-۹: فرض کنید $V \in \mathbb{V}_0$ است؛ مشتق چپ دینی برای این تابع بصورت زیر تعریف می‌گردد [10]

$$D^-V(t,X) \equiv \lim_{h(t)\to 0^-} \inf \frac{V\Big(t+h(t), X\big(t+h(t)\big) + h(t)F\big(t,X(t),X(t-d)\big)\Big) - V\big(t,X(t)\big)}{h(t)}$$
$$= \frac{V\Big(\sigma(t), X\big(\sigma(t)\big) + (\sigma(t)-t)F\big(t,X(t),X(t-d)\big)\Big) - V\big(t,X(t)\big)}{\sigma(t)-t}$$

۳- نتایج اصلی

سیستم معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای تاخیر زیر را در نظر می‌گیریم:

(۳،۱)

$$\begin{cases} D_H X(t) = F\big(t,X(t),X(t-d)\big), \quad t \in (t_k,t_{k+1}] \\ X({t_0}^+) = X_0,\ \ I_0(X_0) = X_0\ , X(t_0+t) = \psi(t), t \in [-d,0] \\ X(t_k) = X_k, X({t_k}^+) = {X_k}^+\ , {X_k}^+ = X_k + I_k(X_k), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

که در آن $d = const > 0$ تاخیر محدود، $F \in C_{rd}[\mathcal{T} \times \Omega \times \Omega, (E^n)^N]$ که Ω حوزه‌ای شامل مبدا در فضای فازی، $\psi \in C[[-d,0],\Omega]$، $F(t,\widehat{0},\widehat{0},) \equiv 0$، $I_k(\widehat{0}) = 0$، $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \cdots$، $t_k \to \infty$ بازای $k \to \infty$، $X(t^+) = \lim_{r\to t^+} X(r)$ و $X(t^-) = \lim_{s\to t^-} X(s)$ هستند. توابع $I_k: (E^n)^N \to (E^n)^N$ بازای $k = 1,2,\dots$ به گونه‌ای هستند که اگر $\|\widetilde{D_0}(X,\widehat{0})\| < L$ و $I_k(X) \neq \widehat{0}$ باشد، آنگاه $\|\widetilde{D_0}(X + I_k(X),\widehat{0})\| < L$ است که در آن L ثابتی مثبت و $\widehat{0}$ مبدا فازی است.

---

27. right-scattered (rs)
28. right-dense (rd)
29. left-scattered (ls)
30. left-dense (ld)
31. right-dense (rd) continuous
32. locally Lipschitzian

منظور از $PC([-d,0],\mathbb{R}^N)$ مجموعه توابع تکه‌ای پیوسته از چپ $f:[-d,0]\to\mathbb{R}^N$ با نرم سوپریمم $\|f\|=\sup_{-d\le r\le 0}\|f(r)\|$ است، که در آن $\|\cdot\|$ نرمی در فضای $\mathbb{R}^N$ است.

فرض می‌کنیم شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) برای هر تابع $X(s):[t_0-d,\infty)\to(E^n)^N$ که همه جا پیوسته است به جز در t_k که در آن $X(t_k{}^+)$ و $X(t_k{}^-)$ موجود و $X(t_k{}^+)=X(t_k)$ است، تابع $F\big(t,X(t),X(t-d)\big)$ بازای تقریبا هر $t\in\mathcal{T}$ پیوسته است و در نقاط ناپیوستگی‌اش، از چپ پیوسته است.

(ب) تابع $F(t,\varphi)$ بر حسب φ در هر مجموعه فشرده از $PC([-d,0],\mathbb{R}^N)$ لیپ شیتز است.

با شرایط فوق، جواب یکتایی برای سیستم (۳،۱) موجود است [23].

به همراه سیستم دیفرانسیل فازی (۳،۱)، سیستم مقایسه‌ای معمولی (یقینی) زیر را در نظر می‌گیریم:

(۳،۲)

$$\begin{cases} U'(t)=G(t,U), \quad t>t_0, t\in(t_k,t_{k+1}] \\ U(t_0)=U_0, \\ U(t_k)=U_k, U(t_k{}^+)=U_k{}^+, U_k{}^+=U_k+J_k(U_k), k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

در آن $G:\mathcal{T}\times\mathcal{G}\to\mathbb{R}^N$، $J_k:\mathcal{G}\to\mathbb{R}^N, k\in\mathbb{N}$ که $\mathcal{G}$ حوزه‌ای از $\mathbb{R}^N$ شامل مبدا و $U_0\in\mathcal{G}$ است. اگر ماکزیمم بازه به فرم $[t_0,w)$ که جواب سیستم (۳،۲) تعریف شده است را با $J^+(t_0,U_0)$ نمایش دهیم، با فرض برقراری شرایط (الف) و (ب) فوق، $J^+(t_0,U_0)=\mathcal{T}=[t_0,\infty)$ است [10].

حال به تعریف برخی از مفاهیم پایداری می‌پردازیم که با توجه به مراجع [9, 23] استخراج شده‌اند.

تعریف ۳-۱: اگر $U(t)=U(t,t_0,U_0)$ پاسخی از سیستم (۳،۲) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف) پایدار کاربردی نهایی[33] (EPS) نامیم، اگر برای $0<\alpha<\beta$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$، $\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;$

$$\|U_0\|<\alpha \quad\Rightarrow\quad \|U(t)\|<\beta,\quad t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta), t\in\mathcal{T};$$

(ب) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت[۳۴] (UEPS) گوییم، اگر (الف) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ج) شبه پایدار کاربردی نهایی[۳۵] (EPQ) نامیم، اگر $\alpha,\beta,T>0$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$ با:

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\ \|U_0\|<\alpha\Rightarrow t_0+T\in\mathcal{T}, \|U(t)\|<\beta, t\ge t_0+T,\ t_0\ge\tau(\alpha,\beta),\ t\in\mathcal{T};$$

(د) شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت[۳۶] (UEPQ) گوییم، اگر (ج) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ه) پایدار کاربردی نهایی قوی[۳۷] (SEPS) نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی[۳۸] (SUEPS) گوییم، اگر (ب) و (د) بطور توام برقرار باشند.

تعریف ۳-۲: فرض کنید $Q_0,Q\in\mathcal{K}$، و $U(t)=U(t,t_0,U_0)$ پاسخی از سیستم (۳،۲) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف) (Q_0,Q)-پایدار کاربردی نهایی $((Q_0,Q)$-EPS) نامیم، اگر برای $0<\alpha<\beta$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\quad Q_0(\|U_0\|)<\alpha \quad\Rightarrow\quad Q(\|U(t)\|)<\beta,\quad t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta), t\in\mathcal{T};$$

(ب) (Q_0,Q)-پایدار کاربردی نهایی یکنواخت $((Q_0,Q)$-UEPS) گوییم، اگر (الف) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

33. eventual practical stable (EPS)

34. uniform eventual practical stable (UEPS)
35. eventual practical quasistable (EPQ)
36. uniform eventual practical quasistable (UEPQ)
37. strong eventual practical stable (SEPS)
38. strong uniform eventual practical stable (SUEPS)

(ج) (Q_0,Q)-شبه پایدار کاربردی نهایی ((Q_0,Q)-EPQ) نامیم، اگر برای $\alpha,\beta,T>0$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$ با $t_0+T\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\quad Q_0(\|U_0\|)<\alpha \quad\Rightarrow\quad Q(\|U(t)\|)<\beta,\quad t\geq t_0+T,\ t_0\geq\tau(\alpha,\beta),\ t\in\mathcal{T};$$

(د) (Q_0,Q)-شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت ((Q_0,Q)-UEPQ) گوییم، اگر (ج) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ه) (Q_0,Q)-پایدار کاربردی نهایی قوی ((Q_0,Q)-SEPS) نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و) (Q_0,Q)-پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی ((Q_0,Q)-SUEPS) گوییم، اگر (ب) و (د) بطور توام برقرار باشند.

تعریف ۳-۳: فرض کنید $h_0\in\Gamma_d$، $h\in\Gamma$، و $X(t)=X(t,t_0,\psi)$ پاسخی از سیستم (۳،۱) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی ($(\widetilde{h_0},h)$-EPS) نامیم، اگر برای $0<\alpha<\beta$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\quad \widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha \quad\Rightarrow\quad h(t,X(t))<\beta,\ t\geq t_0\geq\tau(\alpha,\beta),\ t\in\mathcal{T};$$

(ب) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی یکنواخت ($(\widetilde{h_0},h)$-UEPS) گوییم، اگر (الف) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ج) $(\widetilde{h_0},h)$-شبه پایدار کاربردی نهایی ($(\widetilde{h_0},h)$-EPQ) نامیم، اگر برای $\alpha,\beta,T>0$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$ با $t_0+T\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\ \widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha \quad\Rightarrow\quad h(t,X(t))<\beta,\quad t\geq t_0+T,\ t_0\geq\tau(\alpha,\beta),\ t\in\mathcal{T};$$

(د) $(\widetilde{h_0},h)$-شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت ($(\widetilde{h_0},h)$-UEPQ) گوییم، اگر (ج) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ه) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی قوی ($(\widetilde{h_0},h)$-SEPS) نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی ($(\widetilde{h_0},h)$-SUEPS) گوییم، اگر (ب) و (د) بطور توام برقرار باشند.

(ز) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار مجانبی کاربردی[39] ($(\widetilde{h_0},h)$-PAS) نامیم، اگر (الف) برقرار باشد و

$$\forall t_0\in\mathcal{T}\ \exists\, T=T(t_0,\varepsilon)>0;$$
$$\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha \quad\Rightarrow\quad h(t,X(t))<\varepsilon,\ t\geq t_0+T;$$

(ح) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار مجانبی کاربردی یکنواخت[40] ($(\widetilde{h_0},h)$-UPAS) گوییم، اگر (ب) برقرار باشد و T در (ز) مستقل از t_0 باشد.

حال اصول مقایسه و قضایای پایداری جدید را برای سیستم معادلات دیفرانسیل فازی دارای تاخیر، در فضای فازی N-بعدی را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۳-٤: فرض کنید

(الف) $V\,\epsilon\, C[\mathcal{T}\times(E^n)^N,R^N]$ و برای $X,Y\,\epsilon\,(E^n)^N$ داشته باشیم $|V(t,X)-V(t,Y)|\leq L(t)\widetilde{D_0}(X,Y)$ که در آن $L(t)$ ماتریس $N\times N$ با عناصر پیوسته نامنفی بر R_+ است و طبق تعریف

$$|V(t,X)-V(t,Y)|\equiv(|V_1(t,X)-V_1(t,Y)|,|V_2(t,X)-V_2(t,Y)|,\dots,|V_N(t,X)-V_N(t,Y)|).$$

در اینجا منظور از $|V(t,X)|$ بردار $(|V_1(t,X)|,|V_2(t,X)|,\dots,|V_N(t,X)|)$ است که V_iها $(i=1,2,\dots,N)$ مولفه های V هستند.

(ب) G غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بر حسب U بازای هر $t\,\epsilon\,\mathcal{T}$ است، و برای $X\,\epsilon\,(E^n)^N$ داریم:

$$D^-V(t,X)\leq G(t,V(t,X))$$

---

39. $(\widetilde{h_0},h)$-practical asymptotic stable ($(\widetilde{h_0},h)$-PAS)

40. $(\widetilde{h_0},h)$-uniform practical asymptotic stable ($(\widetilde{h_0},h)$-UPAS)

(ج) $U \in R^N$، و $M(t) = M(t, t_0, U_0)$ پاسخ ماکزیمال[41] سیستم زیر است:

$$U' = G(t, U), \qquad U(t_0) = U_0$$

آنگاه برای هر پاسخ سیستم فازی

$$D_H X = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0$$

داریم

$$\|V(t, X)\| \le \|U(t)\|, \qquad t \in \mathcal{T},$$

که نتیجه می‌دهد

$$\|V(t_0, X_0)\| \le \|U_0\|$$

اثبات: تعریف می‌کنیم $m(t) = V(t, X(t))$. طبق (الف) داریم

$$m(t + h(t)) - m(t) = V\left(t + h(t), X(t + h(t))\right) - V(t, X(t)) = V\left(t + h(t), X(t + h(t))\right) - V\left(t + h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))\right) + V\left(t + h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))\right) - V(t, X(t)) \le L(t + h(t))\widetilde{D_0}\left(X(t + h(t)), X(t) + h(t)F(t, X(t))\right) + V\left(t + h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))\right) - V(t, X(t))$$

با اعمال خواص متر هاسدورف[42] بدست می‌آوریم:

$$m(t + h(t)) - m(t) \le L(t + h(t))\widetilde{D_0}\left(X(t + h(t)) - X(t), h(t)F(t, X(t))\right) + V\left(t + h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))\right) - V(t, X(t))$$

طبق تعریف مشتق چپ دینی خواهیم داشت:

$$D^- m(t) \equiv \lim_{h(t)\to 0^-} \inf \frac{m(t+h(t)) - m(t)}{h(t)} \le \lim_{h(t)\to 0^-} \inf \left[\frac{L(t+h(t))\widetilde{D_0}\left(X(t+h(t)) - X(t), h(t)F(t,X(t))\right)}{h(t)} + \frac{V(t+h(t), X+h(t)F(t,X)) - V(t,X)}{h(t)}\right] = \lim_{h(t)\to 0^-} \inf L(t + h(t))\widetilde{D_0}\left[\frac{X(t+h(t)) - X(t)}{h(t)}, F(t, X(t))\right] + D^- V(t, X) = L(t)\widetilde{D_0}[D_H X, F(t, X(t))] + D^- V(t, X) = D^- V(t, X)$$

بنابراین

$$D^- m(t) \le G(t, m(t))$$

که می‌توان گفت:

$$\|D^- m(t)\| \le \|G(t, m(t))\|$$

با استفاده از تئوری نامعادلات دیفرانسیلی به این نتیجه می‌رسیم که

$$\|V(t, X)\| \le \|M(t)\|$$

قضیه ۳-۵: فرض کنید

(الف) تابع G غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی و پیوسته بر روی مجموعه‌های $(t_k, t_{k+1}] \times \mathcal{G}$ بازای $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و

$$M(t) = \begin{cases} U_0 & t = t_0 \\ M_0(t, t_0, U_0) & t \in (t_0, t_1] \\ M_1(t, t_1, {U_1}^+) & t \in (t_1, t_2] \\ \quad \cdots & \\ M_k(t, t_k, {U_k}^+) & t \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

جواب ماکزیمال سیستم (۳،۲) است؛

(ب) توابع $\varphi_k(U) = U + J_k(U)$ ، $\varphi_k : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ غیرنزولی یکنوای فوقانی در $\mathcal{G}$ هستند؛

(ج) بازای هر $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\beta \in \mathcal{G}$ حد $lim_{(t,\alpha)\to(t,\beta)}\, G(t, \alpha)$ وجود دارد؛

(د) تابع $V \in \mathbb{V}_0$ به گونه‌ای است که $\|V(t_0, \psi)\| \le \|U_0\|$؛

41. maximal solution
42. Hausdorff metric

(ه) معادلات زیر برقرار هستند:
(۳،۳)

$$D^-V\big(t,X(t)\big) \le G\Big(t,V\big(t,X(t)\big)\Big),\quad t\in(t_k,t_{k+1})$$
$$\Big\|V\Big(t^+,X(t)+I_k\big(X(t)\big)\Big)\Big\| \le \Big\|\varphi_k\Big(V\big(t,X(t)\big)\Big)\Big\|,\quad t=t_k$$

در اینصورت برای هر تابع $X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega]$ به قسمی که

$$\big\|V\big(t+r,X(t+r)\big)\big\| \le \big\|V\big(t,X(t)\big)\big\|,\quad r\in[-d,0].$$

خواهیم داشت
(۳،۴)

$$\big\|V\big(t,X(t,t_0,\psi)\big)\big\| \le \|M(t,t_0,U_0)\|,\quad t\in\mathcal{T}.$$

که $X(t)=X(t,t_0,\psi)$ بیانگر پاسخ سیستم (۳،۱) و $M(t)=M(t,t_0,U_0)$ پاسخ ماکزیمال سیستم (۳،۲) است.

اثبات: از آن جایی که در بازه $(t_{k-1},t_k], k\in\mathbb{N}$، تابع $X(t)$ منطبق بر پاسخ سیستم (۳،۱) است، نتیجه می‌گیریم که برای $t_{k-1}<t\le t_k$ تابع $X(t)$ در معادله انتگرالی زیر صدق می‌کند

$$X(t)=X(t_k)+I_k\big(X(t_k)\big)+\int_{t_k}^{t}F\big(r,X(r),X(r-d)\big)\,dr$$

فرض می‌کنیم $t\in(t_0,t_1]$؛ در اینصورت طبق قضیه ۳-۴ داریم

$$\big\|V\big(t,X(t,t_0,\psi)\big)\big\| \le \|M(t,t_0,U_0)\|,\quad t\in\mathcal{T}.$$

با فرض اینکه نامعادله (۳،۴) بازای هر $t\in(t_{k-1},t_k], k\in\mathbb{N}$ برقرار است، با استفاده از (۳،۳) و توجه به این که توابع φ_k غیرنزولی یکنوا هستند، داریم:

$$\Big\|V\Big({t_k}^+,X({t_k}^+)+I_k\big(X({t_k}^+)\big)\Big)\Big\| \le \Big\|\varphi_k\Big(V\big(t_k,X(t_k)\big)\Big)\Big\| \le \big\|\varphi_k\big(M(t_k,t_0,U_0)\big)\big\| = \big\|\varphi_k\big(M_{k-1}(t_k,t_{k-1},U_{k-1})\big)\big\| = U_k.$$

به طریق مشابه با اعمال قضیه ۳-۴ به بازه‌های بعدی تا $t\in(t_k,t_{k+1}]$ بدست می‌آوریم

$$\big\|V\big(t,X(t,t_0,\psi)\big)\big\| \le \|M_k(t,t_k,U_k)\| = \|M(t,t_0,U_0)\|$$

بنابراین، نامساوی (۳،۴) به استقراء برقرار است و اثبات به اتمام می‌رسد.

قضیه ۳-٦: فرض کنید $\varphi\in\mathcal{K}$، $h\in\Gamma$، $h_0\in\Gamma_d$ و شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است. علاوه بر آن داریم

(الف) $0<\alpha<\beta$؛

(ب) $\widetilde{h_0}(t,X)<\alpha$ نتیجه می‌دهد $h(t,X)\le \varphi\Big(\widetilde{h_0}(t,X)\Big)$ و به اصطلاح گوییم $\widetilde{h_0}$ ظریفتر[43] از h است؛

(ج) برای $V\in \mathbb{v}_0$، وجود دارد $a,b\in\mathcal{K}$ به قسمی که $\big(h(t,X)\big)\le\|V(t,X)\|\le a\Big(\widetilde{h_0}(t,X)\Big)$؛

(د) $a(\alpha)<b(\beta)$ و $\varphi(\alpha)<\beta$.

آنگاه انواع مفاهیم پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳،۲)، منجر به انواع خواص مشابه $(\widetilde{h_0},h)$-پایداری نهایی سیستم فازی ضربه ای تاخیری (۳،۱) می‌گردند.

اثبات: ابتدا به بررسی پایداری یکنواخت می‌پردازیم. فرض کنید سیستم (۳،۲) پایدار به مفهوم UEPS باشد. در اینصورت برای $\big(a(\alpha),b(\beta)\big)$ داده شده با $0<\alpha<\beta$:

$$\forall\, t_0\in\mathcal{T},\ \exists\,\tau(\alpha,\beta)>0\ ;\ \|U_0\|<a(\alpha) \Rightarrow \|U(t,t_0,U_0)\|<b(\beta),\quad t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta),\ t\in\mathcal{T}.$$

43. finer

بازای هر $(t_0,\psi)\in\mathcal{T}\times PC([-d,0],(E^n)^N)$ به گونه ای که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha$ باشد، طبق شرایط (ب) و (د) داریم

$$h(t_0,\psi)\le\varphi(\widetilde{h_0}(t_0,\psi))<\varphi(\alpha)<\beta$$

ادعا می‌کنیم که

(۳،۵)

$$h\big(t,X(t)\big)<\beta\qquad\forall t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta)$$

به برهان خلف ادعای فوق را ثابت می‌کنیم. اگر معادله فوق صحیح نباشد، فرض خلف را به این صورت می‌گیریم که وجود دارد $t^*>t_0$ که $t^*\in(t_k,t_{k+1}]$ برای برخی $k\in\mathbb{N}$، به قسمی که

$$h\big(t^*,X(t^*)\big)\ge\beta\ \ ,h\big(t,X(t)\big)<\beta,\ t_0\le t<t^*$$

فرض می‌کنیم $V(t_0,\psi)=U_0$ باشد، از آن جایی که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha$ است طبق شرط (ج):

$$\|V(t_0,\psi)\|=\|U_0\|\le a(\widetilde{h_0}(t_0,\psi))<a(\alpha)$$

که منجر می‌شود به

$$\|U(t)\|<b(\beta),\ for\quad t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta).$$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳–۵ برقرار است، داریم

$$\big\|V\big(t,X(t)\big)\big\|\le\|M(t)\|,\qquad t\ge t_0,$$

این معادله به همراه (ج) ما را به تناقض زیر می‌رساند

$$b(\beta)\le b\Big(h\big(t^*,X(t^*)\big)\Big)\le\big\|V\big(t^*,X(t^*)\big)\big\|\le\|M(t^*)\|<b(\beta)$$

این تناقض نشانگر باطل بودن فرض خلف و برقراری نامعادله (۳،۵) است، یعنی $\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha$ نتیجه می‌دهد $h\big(t,X(t)\big)<\beta$ بازای هر $t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta)$ که به معنای پایداری $(\widetilde{h_0},h)$-UEPS برای سیستم فازی (۳،۱) است.

حال به بررسی پایداری قوی می‌پردازیم. برای ثوابت $0<\alpha<\beta$ و $T>0$، طبق آنچه در بخش قبل اثبات کردیم، سیستم فازی (۳،۱) پایدار به مفهوم $(\widetilde{h_0},h)$-UEPS است. بنابراین

$$\forall\ t_0\in\mathcal{T},\ \exists\ \tau_1(\alpha,\beta)>0;\ \widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha\Rightarrow h\big(t,X(t)\big)<\beta,\ \ t\ge t_0\ge\tau_1(\alpha,\beta).$$

فرض کنید سیستم مقایسه‌ای (۳،۲) پایدار به مفهوم UEPQ است؛ آنگاه بازای $(a(\alpha),b(\beta))$ داده شده

$$\forall\ t_0\in\mathcal{T},\ \exists\ \tau_2(\alpha,\beta)>0\ ;\ \|U_0\|<a(\alpha)\Rightarrow\ \ \|U(t)\|<b(\beta),\qquad t\ge t_0+T,t_0\ge\tau_2(\alpha,\beta).$$

با تعریف

$$\tau(\alpha,\beta)\equiv\max\{\tau_1(\alpha,\beta),\tau_2(\alpha,\beta)\}\ ،$$

ثابت می‌کنیم

(۳،۶)

$$h\big(t,X(t)\big)<\beta,\quad t\ge t_0+T,\ t_0\ge\tau(\alpha,\beta),t\in\mathcal{T}$$

فرض کنید $V(t_0,\psi)=U_0$ باشد، از آن جایی که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha$ است، از (ج) نتیجه می‌گیریم

$$\|V(t_0,\psi)\|=\|U_0\|\le a(\widetilde{h_0}(t_0,\psi))<a(\alpha)$$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\|<b(\beta),\quad t\ge t_0\ge\tau_2(\alpha,\beta).$$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳–۵ برقرار است داریم

$$\big\|V\big(t,X(t)\big)\big\|\le\|M(t)\|,\qquad t\ge t_0,$$

این معادله به همراه (ج) منجر به تناقض زیر می‌شود

$$b\Big(h\big(t,X(t)\big)\Big)\le\big\|V\big(t,X(t)\big)\big\|\le\|M(t)\|<b(\beta),\quad t\ge t_0+T,\quad t_0\ge\tau(\alpha,\beta)$$

بنابراین (۳،۶) برقرار است، یعنی

$$\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<u\quad\Rightarrow\quad h\big(t,X(t)\big)<\beta,t\ge t_0+T,t_0\ge\tau(\alpha,\beta)$$

و سیستم فازی ضربه‌ای (۳،۱) پایدار $(\widetilde{h_0},h)$- SUEPS است.

قضیه ۳-۷: فرض کنید شرایط قضیه ۳-۶ برقرار است به غیر از شرط (د) که با شرط زیر جایگزین شده است

(ذ) $\varphi(\alpha)<\beta$

آنگاه خواص شبه پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳،۲) بیانگر خواص $(\widetilde{h_0},h)$–شبه پایداری نهایی سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری متناظر (۳،۱) خواهند بود.

اثبات: فرض کنید سیستم (۳،۲)، UEPQ باشد؛ در اینصورت بازای $\big(a(\alpha),b(\beta)\big)$ داده شده با $\alpha,\beta,T>0$ داریم:

$$\forall\, t_0\in\mathcal{T},\ \exists\,\tau(\alpha,\beta)>0\ ;\ \|U_0\|<a(\alpha)\ \Rightarrow\ \|U(t)\|<b(\beta),\quad t\ge t_0+T,t_0\ge\tau(\alpha,\beta).$$

بازای هر $(t_0,\psi)\in\mathcal{T}\times PC([-d,0],(E^n)^N)$ به گونه‌ای که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha$، از (ب) و (ذ) می‌یابیم

$$h(t_0,\psi)\le\varphi(\widetilde{h_0}(t_0,\psi))<\varphi(\alpha)<\beta$$

ادعا می‌کنیم که:

(۳،۷)
$$h\big(t,X(t)\big)<\beta,\quad t\ge t_0+T,\quad t_0\ge\tau(\alpha,\beta)$$

فرض می‌گیریم $V(t_0,\psi)=U_0$ باشد، چون $\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha$ است از (ج) داریم:

$$\|V(t_0,\psi)\|=\|U_0\|\le a(\widetilde{h_0}(t_0,\psi))<a(\alpha)$$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\|<b(\beta),\quad t\ge t_0+T,\quad t_0\ge\tau(\alpha,\beta).$$

پس چون شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است

$$\big\|V\big(t,X(t)\big)\big\|\le\|M(t)\|,\qquad t\ge t_0,$$

این به همراه (ج) به تناقض زیر می‌انجامد:

$$b\Big(h\big(t,X(t)\big)\Big)\le\big\|V\big(t,X(t)\big)\big\|\le\|M(t)\|<b(\beta),\quad t\ge t_0+T,\quad t_0\ge\tau(\alpha,\beta)$$

بنابراین (۳،۷) برقرار است یعنی:

$$\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha\ \Rightarrow\ h\big(t,X(t)\big)<\beta,\ t\ge t_0+T,t_0\ge\tau(\alpha,\beta)$$

پس سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری(۳،۱)، $(\widetilde{h_0},h)$- UEPQ است.

قضیه ۳-۸: فرض کنید $\varphi\in\mathcal{K}$ ، $h\in\Gamma$ ، و $h_0\in\Gamma_d$

(الف) $0<\alpha<\beta$؛

(ب) $\widetilde{h_0}(t,X)<\alpha$ نتیجه می‌دهد $h(t,X)\le\varphi\Big(\widetilde{h_0}(t,X)\Big)$ و به اصطلاح گوییم $\widetilde{h_0}$ ظریفتر از h است؛

(ج) برای $V\in\mathbb{V}_0$، وجود دارد $a,b\in\mathcal{K}$ به قسمی که

$$b\big(h(t,X)\big)\le\|V(t,X)\|\le a\Big(\widetilde{h_0}(t,X)\Big);$$

(د) $$D^-V\big(t,X(t)\big)\le 0,\quad X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega],\quad t\in(t_k,t_{k+1}),k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

(ه) $$\Big\|V\Big(t^+,X(t)+I_k\big(X(t)\big)\Big)\Big\|\le\big\|V\big(t,X(t)\big)\big\|,\quad X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega],\qquad t=t_k,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

(و) $a(\alpha)<b(\beta)$ و $\varphi(\alpha)<\beta$.

آنگاه سیستم تاخیری فازی ضربه‌ای (۳،۱)، $(\widetilde{h_0},h)$- *UEPS* است.

اثبات: از (الف) و (ب) نتیجه می‌شود

$$h(t_0,\psi)\le\varphi(\widetilde{h_0}(t_0,\psi))<\varphi(\alpha)<\beta$$

سپس ثابت می‌کنیم $(\widetilde{h_0},h)$-*UEPS* است، یعنی

$h(t,X) < \beta, \quad t \in \mathcal{T} \Rightarrow \widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \varphi(\alpha)$

اگر اینگونه نباشد، وجود دارد جوابی از سیستم (۳،۱) با $t^* \in (t_k,t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$ و $\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \varphi(\alpha)$

به گونه‌ای که:

(۳،۸)

$$h\big(t^*,X(t^*)\big) = \beta, \quad X \in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega], \; t \in [t_0,t^*).$$

حال با تعریف $m(t) = V\big(t,X(t)\big)$، بازای $t \in [t_0,t^*)$، از (د) و (ه) می‌یابیم:

(۳،۹)

$$m(t^*) \le m({t_k}^+) \le m(t_k) \le \cdots \le m({t_0}^+).$$

با استفاده از (ج)، (و)، (۳،۸)، و (۳،۹) نتیجه می‌گیریم

$$b(\beta) \le b\Big(h\big(t^*,X(t^*)\big)\Big) \le m(t^*) \le m({t_0}^+) \le a\Big(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)\Big) \le a(\alpha) < b(\beta)$$

که تناقض است و اینگونه اثبات به اتمام می‌رسد.

قضیه ۳–۹: فرض کنید شرایط قضیه ۳–۸ برقرار باشند به جز شرط (د) که با شرط زیر جایگزین گردد

(ذ) $$D^-V\big(t,X(t)\big) \le -c\Big(V\big(t,X(t)\big)\Big), \quad X \in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega], t \in (t_k,t_{k+1}), \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c \in \mathcal{K}$$

آنگاه سیستم تاخیری فازی ضربه‌ای (۳،۱)، $(\widetilde{h_0},h)$-$UPAS$ است.

اثبات: از آن جایی که (ذ) بطور ضمنی (د) را نتیجه می‌دهد، طبق قضیه ۳–۸، سیستم (۳،۱) پایدار $(\widetilde{h_0},h)$-UEPS است، یعنی:

$$\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha \quad \Rightarrow \quad h(t,X(t)) < \beta, \; t \ge t_0 \ge \tau(\alpha,\beta), t \in \mathcal{T}$$

برای هر $\varepsilon \in (0,\alpha)$ داده شده، فرض می‌کنیم $T = \frac{a(\alpha)}{c(b(\varepsilon))} > 0$.

ثابت می‌کنیم $t^* \in [t_0,t_0+T]: t_k < t^* \le t_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به قسمی که:

(۳،۱۰)

$$m(t^*) < b(\varepsilon).$$

اگر چنین نباشد، آنگاه

$$m(t) \ge b(\varepsilon), t \in [t_0,t_0+T].$$

با فرض $t_1,t_2,\dots,t_p \in [t_0,t_0+T]$ ، از (ه) و (ذ) داریم:

$$m(t_0+T) - m({t_0}^+) = \big[m(t_0+T) - m(t_p)\big] + \big[m(t_p) - m(t_{p-1})\big] + \cdots + [m(t_2) - m(t_1)] + [m(t_1) - m({t_0}^+)] \le \big[m(t_0+T) - m({t_p}^+)\big] + \big[m(t_p) - m({t_{p-1}}^+)\big] + \cdots + [m(t_2) - m({t_1}^+)] + [m(t_1) - m({t_0}^+)] \le \int_{{t_p}^+}^{t_0+T} D^-V\big(t,X(t),X_p\big)dt + \int_{{t_{p-1}}^+}^{t_p} D^-V\big(t,X(t),X_{p-1}\big)dt + \cdots + \int_{{t_1}^+}^{t_2} D^-V(t,X(t),X_1)dt + \int_{{t_0}^+}^{t_1} D^-V(t,X(t),X_0)dt \le -c\big(b(\varepsilon)\big)T$$

این نامساوی به همراه (ج) منجر می‌شود به

$$-a(\alpha) \le -m({t_0}^+) \le m(t_0+T) - m({t_0}^+) \le -c\big(b(\varepsilon)\big)T < -a(\alpha) - 1$$

که تناقض است. بنابراین نامعادله (۳،۱۰) برقرار است.

با استفاده از (ج)، (ه)، (ذ) و (۳،۱۰) بدست می‌آوریم

$$b\big(h(t,X)\big) \le m(t) \le m(t^*) < b(\varepsilon), \; t \ge t^*,$$

چون b تابعی از کلاس $\mathcal{K}$ (اکیداً صعودی) است نتیجه می‌شود

$$h(t,X) < \varepsilon, \;\; t \ge t_0 + T.$$

بنابراین سیستم دیفرانسیل فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۱)، پایدار به مفهوم $(\widetilde{h_0},h)$-UPAS است.

قضیه ۳-۱۰: فرض کنید شرایط قضیه ۳-۶ برقرار است بجز شرط (چ) که با شرط زیر جایگزین شده است

(چ) بازای $\boldsymbol{a, b, Q_0, Q \in \mathcal{K}}$

$$\boldsymbol{Q(\|V(t,X)\|) \ge b\big(h(t,X)\big),}$$
$$\boldsymbol{Q_0(\|V(t,X)\|) \le a(\widetilde{h_0}(t,X)).}$$

آنگاه مفاهیم $\boldsymbol{(Q_0, Q)}$–پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳،۲) به معنای مفاهیم مشابه $\boldsymbol{(\widetilde{h_0}, h)}$–پایداری نهایی سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲) است.

اثبات: فرض کنید سیستم (۳،۲)، $\boldsymbol{(Q_0,Q)}$-EPS است. آنگاه $\boldsymbol{(a(\alpha), b(\beta))}$ داریم به گونه‌ای که:

$$\boldsymbol{Q_0(\|U_0\|) < a(\alpha) \quad \Rightarrow \quad Q(\|U(t)\|) < b(\beta),\ t \ge t_0 \ge \tau(\alpha,\beta),\ t_0 \in \mathcal{T}.}$$

فرض کنید سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲)، $\boldsymbol{(\widetilde{h_0}, h)}$-EPS نباشد، آنگاه مشابه آنچه در اثبات قضیه ۳-۶ بیان شد، با استفاده از قضیه ۳-۵، (ب) و (چ) می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\boldsymbol{Q_0(\|V(t,X(t))\|) \le a\left(\widetilde{h_0}(t,X(t))\right) \le a\left(\widetilde{h_0}(t^*,X(t^*))\right) \le a(\alpha).}$$

سپس با استفاده از (چ) داریم

$$\boldsymbol{b(\beta) \le b\left(h(t^*,X(t^*))\right) \le Q(\|V(t^*,X(t^*))\|) \le Q(\|M(t^*)\|) < b(\beta),}$$

که تناقض است و ادعای قضیه برقرار است.

قضیه ۳-۱۱: فرض کنید شرایط قضیه ۳-۷ برقرار است بجز شرط (چ) که با شرط زیر جایگزین شده است

(چ) بازای $\boldsymbol{a, b, Q_0, Q \in \mathcal{K}}$

$$\boldsymbol{Q(\|V(t,X)\|) \ge b\big(h(t,X)\big),}$$
$$\boldsymbol{Q_0(\|V(t,X)\|) \le a(\widetilde{h_0}(t,X)).}$$

آنگاه مفاهیم $\boldsymbol{(Q_0, Q)}$–شبه پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳،۲) متناظر با $\boldsymbol{(\widetilde{h_0}, h)}$–شبه پایداری نهایی سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲) است.

اثبات: فرض کنید سیستم (۳،۲)، $\boldsymbol{(Q_0,Q)}$-EPQ است. آنگاه $\boldsymbol{(a(\alpha), b(\beta))}$ داریم به گونه‌ای که

$$\boldsymbol{Q_0(\|U_0\|) < a(\alpha) \quad \Rightarrow \quad Q(\|U(t)\|) < b(\beta), \quad t \ge t_0 + T,\ t_0 \ge \tau(\alpha,\beta),\ t_0 \in \mathcal{T}, T > 0.}$$

فرض کنید سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲)، $\boldsymbol{(\widetilde{h_0}, h)}$-EPS نباشد، آنگاه مشابه آنچه در اثبات قضیه ۳-۷ بیان شد، با استفاده از قضیه ۳-۵، (ب) و (چ) می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\boldsymbol{Q_0(\|V(t,X(t))\|) \le a\left(\widetilde{h_0}(t,X(t))\right) \le a\left(\widetilde{h_0}(t^*,X(t^*))\right) \le a(\alpha).}$$

سپس با استفاده از (چ) داریم

$$\boldsymbol{b(\beta) \le b\left(h(t^*,X(t^*))\right) \le Q(\|V(t^*,X(t^*))\|) \le Q(\|M(t^*)\|) < b(\beta),}$$

که تناقض است و ادعای قضیه برقرار است.

توجه: در مدلسازی، کنترل و بهینه سازی پروسه‌های شیمیایی باشد عدم قطعیت‌های ناشی از عدم دقت پارامترها، از جمله ضرایب انتقال جرم و حرارت[44]، و خطاهای اندازه‌گیری، مثلاً در اندازه‌گیری در لحظه تشکیل بخار[45] و تقریب ویژگی‌های فیزیکی در نظر گرفته شوند. در این موارد، نظریه فازی ابزار قدرتمندی برای لحاظ کردن عدم قطعیت‌های پروسه است. مثالی عملی از یک پروسه شیمیایی که در آن دما و فشار متغیرهای حالت آن هستند در زیر آورده شده است [31].

44. heat and mass transfer coefficients
45. real-time measurement of steam composition

مثال: سیستم دیفرانسیل فازی تاخیری مربوط به یک پروسه شیمیایی با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

(۳،۱۱)

$$\begin{cases} D_H x_1(t) = -1.5x_1(t) + x_2\big(d(t)\big) + h_1(t) \\ D_H x_2(t) = -1.5x_2(t) + x_1\big(d(t)\big) + h_2(t) \end{cases}, \quad t \geq t_0$$

که شرایط اولیه آن به صورت زیر است

$$\begin{cases} x_1(t+t_0) = \varphi_1(t) \\ x_2(t+t_0) = \varphi_2(t) \end{cases}, \quad t \in [-1,0]$$

که در آن

$$X = (x_1, x_2) \in E^2, \qquad t_0 \geq 0, \quad d \in C(\mathbb{R},\ [-1,0]);\ t-1 \leq d(t) \leq t\ .$$

توجه داریم که $d(t) = t - |\sin t|$ مثالی از تاخیر متغیر با زمان کراندار است.

فرض کنید ثوابت $L_1, L_2 > 0$ وجود دارند به قسمی که $D_0(h_i(t_1), h_i(t_2)) \leq L_i|t_1 - t_2|, i = 1,2$.
همچنین تابع شبه لیاپانوف را بصورت $V(t, x_1, x_2) = D_0(x_1, x_2)$ در نظر بگیرید. اگر $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in S(\rho), \rho > 0$، برای هر $r \in [-1,0]$ نامعادله زیر برقرار است:

$$D_0(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) > D_0(\varphi_1(r), \varphi_2(r))$$

تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} f_1(t,\varphi) = -1.5\varphi(t) + \varphi_2\big(d(t)\big) + h_1(t) \\ f_2(t,\varphi) = -1.5\varphi_2(t) + \varphi_1\big(d(t)\big) + h_2(t) \end{cases}$$

به این خواص E^2 که در مرجع [29] دیده می‌شود توجه کنید:

(الف) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ با فرض $a, b \geq 0$ یا $a, b \leq 0$ و برای هر $X \in E^2$، داریم $(a+b)X = aX + bX$.

(ب) برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $X, Y \in E^2$، داریم $\lambda(X+Y) = \lambda X + \lambda Y$

(ج) برای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و هر $X \in E^2$، داریم $\lambda(\mu X) = (\lambda\mu)X$.

همچنین طبق خواص فاصله $D_0(X,Y)$ از مراجع [23, 28] برای تمام $X, Y, W, Z \in E^n$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم:

(الف) $D_0(X+W, Y+W) = D_0(X,Y)$

(ب) $D_0(\lambda X, \lambda Y) = |\lambda| D_0(X,Y)$

(ج) $D_0(X+W, Y+Z) \leq D_0(X,Y) + D_0(W,Z)$

از تعریف مشتق دینی تابع لیاپانوف و با استفاده از خواص فوق بدست می‌آوریم:

$$D^- V(t,X) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{D_0\Big(t+h, X\big(t+h(t)\big) + h(t)F\big(t, X(t), X(t-d)\big)\Big) - D_0\big(t, X(t)\big)}{h} \leq -D_0(\varphi_1, \varphi_2) + L\rho$$

که در آن $L = \max\{L_1, L_2\}$ است. بنابراین، معادله سیستم اسکالر مقایسه‌ای را در این حالت بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u'(t) = -u + L\rho$$

که دارای پاسخ

$$u(t) = (-L\rho + u_0)e^{-(t-t_0)} + L\rho$$

است. بنابراین، $|u(t)| \leq |u_0| + 2L\rho$ که نشان می‌دهد پاسخ سیستم مقایسه‌ای اسکالر پایدار یکنواخت است، پس طبق قضیه ۳–۸ سیستم فازی (۳،۱۱) پایدار کاربردی یکنواخت است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، قضایایی برای تحلیل پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای تاخیری ارائه کردیم. برای این منظور از توابع شبه لیاپانوف برداری به همراه قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیلی معمولی استفاده شد. در این راستا، پایداری را از دیدگاه‌های مختلف یعنی پایداری نهایی، پایداری قوی، پایداری مجانبی و پایداری یکنواخت بررسی کردیم. همچنین قضایایی برای پایداری کاربردی سیستم های دینامیکی فازی به اثبات رساندیم. در انتها با مثالی کاربردی، کارایی روش را نشان دادیم.

فهرست منابع

[1] J.P. Lasalle, S.Lefschetz: Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York, NY, USA, 1961.

[2] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy: Stability Theory by Lyapunov's Direct Method, Springer, New York, NY, USA, 1997.

[3] V. Lakshmikantham, X.Z. Liu: Stability Analysis in Terms of Two Measures, World Scientific, Singapore, 1993.

[4] S.M.S. de Godoy, M.A. Bena: Stability criteria in terms of two measures for functional differential equations, Applied Mathematics Letters 18 (6) (2005) 701-706.

[5] P. Wang, H. Lian: On the stability in terms of two measures for perturbed impulsive integro-differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 313 (2) (2006) 642-653.

[6] P. Wang, Z. Zhan: Stability in terms of two measures of dynamic system on time scales, Computers and Mathematics with Applications 62 (12) (2011) 4717-4725.

[7] C.H. Kou, S.N. Zhang: Practical stability for finite delay differential systems in terms of two measures, Acta Math. Appl. Sinica 25 (3) (2002) 476–483.

[8] V. Lakshmikantham, V.M. Matrosov, S. Sivasundaram: Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

[9] P. Wang, W. Sun: Practical stability in terms of two measures for set differential equations on time scales, The Scientific World Journal (2014), Article ID 241034, 7 pages.

[10] D.D. Bainov, I.M. Stamova: On the practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations with variable impulsive perturbations, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 272-288.

[11] Z.G. Luo, J.H. Shen: New Razumikhin type theorems for impulsive functional differential equations, Appl. Math. Comput. 125 (2002) 375-386.

[12] A.A. Soliman: Stability criteria of impulsive differential systems, Appl. Math. Comput. 134 (2003) 445–457.

[13] J.T. Sun: Stability criteria of impulsive differential system, Appl. Math. Comput. 156 (2004) 85–91.

[14] J.T. Sun, Y.P. Zhang: Impulsive control of a nuclear spin generator, J. Comput. Appl. Math. 157 (1) (2003) 235–242.

[15] J.T. Sun, Y.P. Zhang: Stability analysis of impulsive control systems, IEE Proc. Control Theory Appl. 150 (4) (2003) 331–334.

[16] J.T. Sun, Y.P. Zhang, Q.D. Wu: Less conservative conditions for asymptotic stability of impulsive control systems, IEEE Trans. Automat. Control 48 (5) (2003) 829–831.

[17] T. Yang: Impulsive Systems and Control: Theory and Applications, Nova Science Publishers, Huntington NY, 2001.

[18] S.G. Hristova, A. Georgieva: Practical stability in terms of two measures for impulsive differential equations with supremum, Int. J. Diff. Eq. 2011 (2011) Article ID 703189, 13 pages.

[19] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive differential systems, Advance in Differential equation and Control Processes 10 (2012) 171-182.

[20] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive functional differential equations, Lecture Notes in Engineering and Computer Science 2197 (2012) 169-171.

[21] J.S. Yu: Stability for nonlinear delay differential equations of unstable type under impulsive perturbations, Applied Mathematics Letters 14 (2001) 849–857.

[22] Y. Zhang, J.T. Sun: Boundedness of the solutions of impulsive differential systems with time-varying delay, Appl. Math. Comput. 154 (1) (2004) 279–288.

[23] Y. Zhang, J. Sun: Eventual practical stability of impulsive differential equations with time delay in terms of two measurements, J. Comput. and Appl. Math. 176 (2005) 223-229.

[24] V. Lakshmikantham, S. Leela: Stability theory of fuzzy differential equations via differential inequalities, Mathematical Inequalities and Applications 2 (1999) 551-559.

[25] V. Lakshmikantham, S. Leela: Fuzzy differential systems and the new concept of stability, Nonlinear Dynamics and Systems Theory 1 (2) (2001) 111-119.

[26] V. Lakshmikantham, R. Mohapatra: Basic properties of solutions of fuzzy differential equations, Nonlinear Studied 8 (2001) 113-124.

[27] C. Yakar, M. Cicek, M.B. Gucen: Practical stability, boundedness criteria and Lagrange stability of fuzzy differential systems, J. Computers and Mathematics with Applications 64 (2012) 2118-2127.

[28] S. Zhang, J. Sun: Stability of fuzzy differential equations with the second type of Hukuhara derivative, IEEE Transaction on Fuzzy Systems (2014).

[29] B. Bede, S. G. Gal: Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Sys. 151 (3) (2005) 581-599.

[30] S. Sun, Z. Han, E. Akin-Bohner, P Zhao, Practical stability in terms of two measures for hybrid dynamic systems, Bulletin of the Polish academy of sciences, Mathematics (210) (2010).

[31] Renhong Zhao, "Application of fuzzy set theory to chemical process optimization and control", Ph.D. Doctoral dissertations, University of Cincinnati, 1992.