دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هفتم، پاییز ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

# روش مش لس برای مسئله کنترل بهینه معادلات انتگرال ولترا با استفاده از توابع پایه شعاعی چند درجه دو

ژینوس نظری مله [۱*]، هما الماسیه [۲]

[(۱و۲)] دانشکده ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اصفهان (خوراسگان)، اصفهان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۷/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۹/۲۱

**چکیده**

در این مقاله، یک روش عددی برای حل مسئله کنترل بهینه معادلات انتگرال ولترا پیشنهاد می‌شود که این روش تقریب تابع مجهول را با استفاده از توابع پایه شعاعی شامل چند درجه دوها نتیجه می‌دهد. در واقع با استفاده از درونیابی، بردار کنترل و بردار حالت در دستگاه دینامیکی خطی به گونه‌ای تقریب زده می‌شوند که تابعی هزینه درجه دو مینیمم شود. همچنین برای دقت بیشتر، انتگرال‌های موجود در معادله انتگرال ولترا و تابعی هزینه، با استفاده از قاعده انتگرال‌گیری گاوس–لوباتو–لژاندر تقریب زده می‌شوند و از نقاط گاوس–لوباتو–لژاندر به عنوان نقاط گره در روش هم محلی استفاده می‌شود. مسئله کنترل بهینه به یک مسئله مینیمم‌سازی تبدیل می‌شود که عناصر بردارهای حالت و کنترل به عنوان تقریبی از بردارهای جواب بر حسب توابع پایه شعاعی هستند. برای بررسی کارایی و دقت روش پیشنهاد شده، نتایج عددی بدست آمده در دو مثال با مقادیر دقیق مقایسه می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات انتگرال ولترا، کنترل بهینه، توابع پایه شعاعی چند درجه دو.

*. jinoosnazari@yahoo.com

## ۱- مقدمه

مسائل بسیاری در اقتصاد، بیولوژی، پزشکی و علوم مربوط به تاثیرات حافظه را می‌توان به صورت یک مسئله کنترل ولترا مدل‌سازی کرد که با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی پویا قابل حل هستند [۷-۱]. نظریه کنترل بهینه معادلات دیفرانسیل (عادی یا جزئی) از توجه زیادی برخوردار است و روش‌های متفاوت بسیاری برای حل مسائل کنترل بهینه کنترل شده توسط معادلات انتگرال ولترا وجود دارند. محسن رزاقی و همکارانش یک روش برای یافتن کنترل بهینه دستگاه‌های تکین خطی با تابعی هزینه درجه دوم ارائه کرده‌اند که در آن از توابع چند جمله‌ای به‌طور قطعه‌ای خطی می‌شود [۸].

مالک نژاد و همکارانش در [۹] یک روش تقریبی برای حل مسئله کنترل بهینه معادلات انتگرال ولترا ارائه نموده‌اند. مرزبان و همکارانش یک روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی شامل محدودیت‌های نامساوی کنترل و حالت نشان داده‌اند که روش آنها بر اساس توابع هار گویا تنظیم شده است [۱۰]. در این مقاله، یک روش مش لس برای حل مسئله کنترل بهینه معادلات انتگرال ولترا ارائه می‌دهیم که این روش بر اساس توابع پایه شعاعی استوار است و در آن از ریشه‌های چندجمله‌ای های لژاندر به عنوان نقاط هم محلی استفاده می‌شود. همچنین انتگرال‌های موجود را با استفاده از نقاط و وزن‌های موجود در روش گاوس-لوباتو-لژاندر تقریب می‌زنیم. در دهه های اخیر، استفاده از روش‌های مش لس توجه بسیاری از محققان را برای یافتن جواب عددی معادلات خطی و غیر خطی [۱۸-۱۱] و همچنین تقریب جواب معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی در ابعاد بالا به خود جلب کرده است [۲۴-۱۹].

روش تابع پایه شعاعی روش معروفی است که با استفاده از یک ابزار قوی مساله درونیابی را برای داده‌های پراکنده انجام می‌دهد. و در واقع مزیت اصلی استفاده از روش‌های بر اساس توابع پایه شعاعی، خاصیت مش لس بودن این روش‌ها است. این مقاله را به صورت زیر ساماندهی می‌کنیم: در بخش ۲، درونیابی با استفاده از چند درجه دوها توصیف می‌شود. در بخش ۳، نقاط و وزن‌های گاوس-لوباتو-لژاندر معرفی می‌شوند. در بخش ۴، با استفاده از روش پیشنهاد شده، مسئله کنترل بهینه را تقریب می‌زنیم. در بخش ۵، چند مثال عددی را برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی تشریح می‌کنیم. نتایج در بخش ۶ مورد بحث قرار می‌گیرند.

## ۲- درونیابی $MQ$ ها :

به صورت زیر تقریب زد، $\phi(r)$را می‌توان با درونیابی تابع $f(x)$ باشد و $MQ$ یک تابع $\phi(r)$فرض کنید

$$f(x)\approx\sum_{i=0}^{N}C_{i_1}\phi_i(x)=\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\Phi(x), \qquad (۱)$$

که در آن

$$\phi_i=\phi_i(x)=\phi(\|x-x_i\|)=\sqrt{\|x-x_i\|^2+c^2}, \qquad (۲)$$

$$\Phi(x)=[\phi_0(x),\quad \phi_1(x),\quad \ldots,\quad \phi_N(x)]^T, \qquad (۳)$$

و

$$C^T=[C_0,\quad C_1,\quad \ldots,\quad C_N]^T. \qquad (۴)$$

همچنین $i=0,1,\ldots,N,\ x_i$ نقاط گاوس-لوباتو-لژاندر هستند.

## ۳- نقاط و وزن های گاوس-لوباتو-لژاندر:

فرض کنید$H_N[-1,1]$ نمایش فضای چند جمله‌ایهای جبری از درجه حداکثر $N$ باشد و

$$< p_i, p_j >=\frac{2}{2j+1}\delta_{ij}.$$

بنابراین$<.,.>$ نمایش حاصلضرب داخلی روی $L^2[-1,1]$ باشد و $\{p_i\}_{i\geq 0}$ چندجمله‌ای‌های لژاندر از مرتبه $i$ است که نسبت به تابع وزن $w(x)=1$ روی بازه$[-1,1]$ متعامد هستند و در فرمول زیر صدق می کنند:

$$p_0(x)=1, \qquad p_1(x)=x,$$

$$p_{i+1}(x)=\left(\frac{2i+1}{i+1}\right)x\,p_i(x)-\left(\frac{i}{i+1}\right)p_{i-1}(x),$$

$$i=1,2,3,\ldots.$$

سپس، فرض می‌کنیم $\{x_j\}_{j=0}^{N}$ به صورت زیر باشند،

$$(1-x_j^2)\,\dot{p}(x_j)=0,$$
$$-1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=1,$$

که در آن $\dot{p}(x)$ مشتق تابع $p(x)$ است.
اکنون فرض می‌کنیم $f\in H_{2N-1}[-1,1]$ ، بنابراین داریم:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx\sum_{j=0}^{N} w_j\, f(x_j), \qquad (۵)$$

که در آن $w_j$ وزن‌های گاوس–لوباتو–لژاندر هستند [۱۹].

## ۴- حل عددی مسئله کنترل بهینه معادلات انتگرال ولترا با استفاده از $MQ$ ها :

دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(\tau)=A(\tau)X(\tau)+B(\tau)U(\tau),\quad 0\le\tau\le t_f$$
(مقید یا آزاد) (۶)

با شرط اولیه

$$x(0)=x_0. \qquad (۷)$$

در اینجا $U(\tau),X(\tau)$ به ترتیب بردارهای حالت و کنترل با ابعاد $N\times1$ و $M\times1$ هستند.
مسئله تعیین کنترل بهینه $U(\tau)$ و بردار حالت متناظر $X(\tau)$ است با توجه به معادلات (۶) و (۷) است که تابعی

$$J=\frac{1}{2}X^T(t_f)SX(t_f)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[X^T(\tau)Q(\tau)X(\tau)+U^T(\tau)R(\tau)U(\tau)\right]d\tau, \qquad (۸)$$

را مینیمم کند و در آن $S$، $Q(\tau)$ و $R(\tau)$ ماتریس‌های با ابعاد مناسب هستند.
$S$، $Q(\tau)$ ماتریس‌های نیمه معین مثبت متقارن هستند و $R(\tau)$ ماتریس معین مثبت متقارن است [۲۵].

**الگوریتم:**

**۱**- با انتگرال‌گیری از معادله (۶)، داریم:

$$x(\tau)=x(0)+\int_0^{t_f}\left[A(\tau)X(\tau)+B(\tau)U(\tau)\right]d\tau, \qquad (۹)$$

**۲**- با استفاده از معادله (۱) می‌توان توابع مجهول را بر حسب توابع پایه شعاعی به صورت زیر بسط داد:

$$x(\tau)=\sum_{i=0}^{N}x_i\varphi_i(\tau)=X^T\Phi(\tau), \qquad (۱۰)$$

$$u(\tau)=\sum_{i=0}^{N}u_i\varphi_i(\tau)=U^T\Phi(\tau), \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$X^T=[x_0,\quad x_1,\quad \ldots,\quad x_N]^T,$$
$$U^T=[u_0,\quad u_1,\quad \ldots,\quad u_N]^T, \qquad (۱۲)$$

که در آن $X^T$ و $U^T$ بردارهای مجهول هستند.

**۳**- با جایگذاری معادلات (۱۰) و (۱۱) در معادله (۹)، داریم:

$$X^T\Phi(\tau)=x(0)+\int_0^{t_f}\left[A(\tau)X^T\Phi(\tau)+B(\tau)U^T\Phi(\tau)\right]d\tau, \qquad (۱۳)$$

**۴**- انتگرال‌های روی بازه $[0,t_f]$ را با استفاده از تبدیل زیر به بازه $[-1,1]$ منتقل می‌کنیم

$$\tau=\frac{t_f}{2}(t+1),\quad \tau\in[0,t_f]. \qquad (۱۴)$$

**۵**- معادله (۱۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X^T\Phi(t)=x(0)+\frac{t_f}{2}\int_{-1}^{1}\left[A(t)X^T\Phi(t)+B(t)U^T\Phi(t)\right]dt. \qquad (۱۵)$$

**۶**- یک معادله جدید به صورت زیر خواهیم داشت:

$$R^*\left(X,U,t\right)=X^T\Phi\left(t\right)-x\left(0\right)-\frac{t_f}{2}\int_{-1}^{1}\left[A\left(t\right)X^T\Phi\left(t\right)+B\left(t\right)U^T\Phi\left(t\right)\right]dt=0. \quad (۱۶)$$

**۷**- با استفاده از فرمول انتگرال‌گیری گاوس–لوباتو–لژاندر به معادله زیر می‌رسیم:

$$R^*\left(X,U,t\right)=X^T\Phi\left(t\right)-x\left(0\right)-\frac{t_f}{2}\sum_{k=0}^{r_1}w_k\left(A\left(t_k\right)X^T\Phi\left(t_k\right)+B\left(t_k\right)U^T\Phi\left(t_k\right)\right)=0. \quad (۱۷)$$

**۸**- با جایگذاری معادلات (۱۰) و (۱۱) در معادله (۸) خواهیم داشت:

$$J=\frac{1}{2}\Phi^T\left(t_f\right)XSX^T\Phi\left(t_f\right)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\begin{bmatrix}\Phi^T\left(\tau\right)XQ\left(\tau\right)X^T\Phi\left(\tau\right)+\\ \Phi^T\left(\tau\right)UR\left(\tau\right)U^T\Phi\left(\tau\right)\end{bmatrix}d\tau. \quad (۱۸)$$

**۹**- با استفاده از معادله (۱۴) داریم:

$$J\left(X,U,t\right)=\frac{1}{2}\Phi^T\left(t_f\right)XSX^T\Phi\left(t_f\right)+\frac{t_f}{4}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}\Phi^T\left(t\right)XQ\left(t\right)X^T\Phi\left(t\right)+\\ \Phi^T\left(t\right)UR\left(t\right)U^T\Phi\left(t\right)\end{bmatrix}d\tau. \quad (۱۹)$$

**۱۰**- با استفاده از فرمول انتگرال گیری گاوس–لوباتو–لژاندر داریم:

$$J\left(X,U,t\right)=\frac{1}{2}\Phi^T\left(t_f\right)XSX^T\Phi\left(t_f\right)+\frac{t_f}{4}\sum_{l=0}^{r_2}w_l\begin{bmatrix}\Phi^T\left(t_l\right)XQ\left(t_l\right)X^T\Phi\left(t_l\right)+\\ \Phi^T\left(t_l\right)UR\left(t_l\right)U^T\Phi\left(t_l\right)\end{bmatrix}=0. \quad (۲۰)$$

**۱۱**- مسئله کنترل بهینه یافتن $U,X$ است به طوری‌که $J\left(X,U,t\right)$ در معادله (۱۹) نسبت به محدودیت $R^*\left(X,U,t\right)$ در معادله (۱۶) مینیمم شود. قرار می‌دهیم

$$J^*\left(X,U,t\right)=J\left(X,U,t\right)+\lambda^T R^*\left(X,U,t\right), \quad (۲۱)$$

که در آن $\lambda$ها ضرائب لاگرانژ هستند. شرایط لازم برای مینیمم سازی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial J^*}{\partial x_i}=0,\quad \frac{\partial J^*}{\partial u_i}=0,\quad \frac{\partial J^*}{\partial \lambda}=0,\quad i=0,1,\dots,N. \quad (۲۲)$$

یک دستگاه شامل $2\left(N+1\right)+1$ معادله و $2\left(N+1\right)+1$ مجهول وجود دارد که می‌تواند برای ضرایب $\{x_i\}_{i=0}^N$ ، $\{u_i\}_{i=0}^N$ و $\lambda$ ها در معادله (۲۲) حل شود. در معادله (۲۲) از معادلات (۱۷) و (۲۰) برای تقریب انتگرال‌ها استفاده می‌شود.
در معادله (۲۲) روش کالوکیشن را در نقاط $t=ih,\ h=0.1,\ i=0,1,\dots,N$ به کار می‌بریم. همچنین $t$ها را به عنوان نقاط گاوس–لوباتو–لژاندر هم در نظر می‌گیریم.

## ۵- تشریح مثال‌های عددی:

برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهاد شده با استفاده از توابع پایه شعاعی، به ارائه دو مثال برای تقریب جواب مسئله کنترل بهینه می پردازیم. برای ارائه خطای مطلق بین جواب‌های دقیق و تقریبی توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$e_1\left(x\right)=\left|\,x\left(t\right)-x_m\left(t\right)\right|,$$
$$e_2\left(x\right)=\left|\,u\left(t\right)-u_m\left(t\right)\right|,$$
$$e_3\left(x\right)=\left|\,J-J_m\right|,$$
$$e_4\left(x\right)=\left|\,w-w_m\right|,$$

که در آن $x\left(t\right),u\left(t\right),w\left(t\right)$ و $J$ جواب‌های دقیق و $x_m\left(t\right),u_m\left(t\right),w_m\left(t\right)$ و $J_m$ جواب‌های تقریبی محاسبه شده هستند. محاسبات مربوط به مثال‌ها با استفاده از نرم افزار مطلب نسخه ۷،۱۲ در یک کامپیوتر خانگی انجام شده است.

**مثال ۵،۱:** مسئله مینیمم سازی زیر را در نظر بگیرید [۱۵و۹]:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1\left[2x^2(t)+u^2(t)\right]dt,\quad 0\le t\le 1,$$

نسبت به

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{2}x(t)+u(t),\quad x(0)=1.$$

جواب دقیق به صورت زیر است [۱۵]:

$$x(t)=-\frac{1}{2}x(t)+u(t),\quad x(0)=1.$$

$$u(t)=\frac{2}{2+e^{-3}}\left(-e^{\frac{-3t}{2}}+e^{-3+\frac{3t}{2}}\right),\quad 0\le t\le 1.$$

نتایج عددی در جداول ۴-۱ و شکل‌های ۲-۱ نشان داده می‌شوند.

**مثال ۵،۲:** دستگاه متغیر با زمان خطی زیر را در نظر بگیرید [۱۵و۹]:

$$\dot{x}(t)=t\,x(t)+u(t),\quad x(0)=1,$$

با تابعی هزینه زیر

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x^2(t)+u^2(t)\right]dt,\quad 0\le t\le 1.$$

کنترل بهینه به صورت $u(t)=-k(t)x(t)$ است که در آن $k(t)$ ماتریس کنترل‌گر بازخورد است و از معادله ریکاتی زیر به دست می‌آید:

$$\dot{k}(t)=k^2(t)-2tk(t)-1,\quad k(1)=0.$$

نتایج عددی در جدول ۵ و شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده می‌شوند.

خاطر نشان می‌کنیم که بازه پایداری $[0,2]$، $c$ است و در جدول ۵ با افزایش $N$ برای مقادیر مختلف $c$ کاهش خطا را مشاهده می‌کنیم.

## نتیجه‌گیری:

در این مقاله، یک روش ساده برای حل کنترل بهینه معاادلات انتگرال ولترا ارائه شد که بر اساس توابع پایه شعاعی چند درجه دوها است. همچنین انتگرال‌های موجود با استفاده از روش گاوس–لوباتو–لژاندر تقریب زده شده‌اند. نتایج در دو مثال عددی برای اثبات دقت و کارایی روش نشان داده شده‌اند.

## فهرست منابع


[1] K. Maleknejad, M. Hadizadeh, *A new computational method for Volterra-Fredholm integral equations, Appl. Math. Comput. 37 (9), 1999, 1-8*.

[2] K. Maleknejad, S. Sohrabi, Y. Rostami, *Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by using chebyshev polynomials, Appl. Math. Comput. 188, 2007, 123-128*.

[3] S. A. Belbas, *A new method for optimal control of Volterra integral equations, Appl. Math. Comput. 189, 2007, 1902-1915*.

[4] N. G. Medlin, *Optimal processes governed by integral equations, J. Math. Anal. Appl. 120, 1986, 1-12*.

[5] L. W Neustadt, J. Warga, *Comments on the optimal control of processes described by integral equations by V. R. Vinkurov, SIAM. J. Control 8 (4), 1970, 572*.

[6] V. R. Vinokurov, *Optimal control of processes described by integral equations, parts I, ii and iii, SIAM. J. Control 7, 1969, 324-355.*

[7] S. A. Belbas, *A reduction method for optimal control of Volterra integral equations, Appl. Math. Comput. 197 (1), 2008, 880-890*.

[8] M. Razzaghi, H. R. Marzban, *Optimal control of singular systems via piiecewise linear polynomial functions, Math. Meth. Appl. Sci. 25, 2002, 399-408*.

[9] K. Maleknejad, H. Almasieh, *Optimal control of Volterra integral equations via triangular functions, Math. Comput. Model. 53, 2011, 1902-1909*.

[10] H. R. Marzban, M. Razzaghi, *Rationalized haar approach for nonlinear constrained optimal control problems, Appl. Math. Model. 34, 2010, 174-183*.

[11] H. Almasieh, J. Nazari Meleh, *Hybrid functions method based on radial basis functions for solving nonlinear Fredholm integral equations, Journal of Mathematical Extention 7 (3), 2013, 29-38*.

[12] H. Almasieh, J. Nazari Meleh, *A meshless method for the numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations using radial basis functions, 2012 International Conference on Mathematical Science & Computer Engineering (ICMSCE 2012)*

[13] A. A. Panah, M. Dehghan, Numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations by positive definite functions, *Appl. Math. Comput. 190, 2007, 1754-1761*.

[14] M. Dehghan, A. Shokri, Numerical solution of the nonlinear Klein Gordon equation using radial basis functions, *J. Comput. Appl. 230, 2009, 400-410*.

[15] G. N. Elnagar, M. Razzaghi, *Acollocation-type method for linear quadratic optimal control problems, Optimal cont. Appl. Meth. 18, 1998, 227-235.*

[16] S. U. Islam, S. Haqb, A. Ali, *A meshfree for numerical solution of the rlw equation, Optimal Cont. Appl. Meth. 223, 2009, 997-1012*.

[17] K. Maleknejad, H. Almasieh, M. Roodaki, *Triangular functions (TF) method for the solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations,*

*Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 15, 2010, 3293-3298*.

[18] K. Parand, J. Rad, *Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations via collocation method based on radial basis functions, Appl. Math. Comput. 218, 2012, 5292-5309*.

[19] H. Almasieh, J. Nazari Meleh, *Numerical solution of a class of mixed two-dimensional nonlinear Volterra-Fredholm integral equations using multiquadric radial basis functions, J. Comput. Appl. Math. 260, 2014, 173-179*.

[20] A. Yildirim, *Homotopy perturbation method for the mixed Volterra-Fredholm integral equations, J. Comput. Appl. Math. 58, 2009, 2172-2176.*

[21] K. Maleknejad, K. Mahdian, *Solving nonlinear mixed Volterra-Fredholm integral equations, Chaos Solutions Fractals 42, 2009, 2760-2764*.

[22] A. Alipanah, S. Esmaeili, Numerical solution of the two-dimensional Fredholm integral equations using Gaussian radial basis function, *J. Comput. Appl. Math. 235, 2011, 5342-5347*.

[23] J.Shen, T. Tang, High order numerical methods and algorithms, *Abstract and Applied Analysis, Chinese Sciences Press, 2005*.