

زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم توابع ∂ -تقریباً-منظم

سمیه نادى^{۱*}، جواد وکیلی^۲

^(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران.

^(۲) استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۴/۲۰

چکیده

با اینکه توابع تقریباً-منظم در حالت کلی محدب نیستند، ولی خصوصیتی را دارا هستند که انتظار می‌رود در توابع محدب و یا C^2 -پایینی یافت شود. کلاس توابع تقریباً-منظم، شامل توابع محدب، C^2 -پایینی، قویا متمایل^(۱) و... است. این توابع در ابتدا روی فضاهای با بعد متناهی و با استفاده از زیرمشتق تقریبی تعریف شدند و سپس تعریف این توابع به روی فضاهای باناخ و هیلبرت گسترش داده شد. در این مقاله، توابع تقریباً-منظم پارامتری با استفاده از زیرمشتق حدی تعریف می‌شوند. همچنین به تعریف زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم توابع دو متغیره نسبت به متغیرهایشان با استفاده از هم‌مشتق نگاشت زیرمشتق مرتبه اول می‌پردازیم. سپس ارتباط بین یکنوایی ماکسیمال زیرمشتقات جزئی مرتبه اول این توابع با نیم‌معین مثبت بودن نگاشت هم‌مشتق زیرمشتق جزئی مرتبه اول بررسی می‌شود. سرانجام شرایط لازم و کافی برای محدب بودن توابع ∂ -تقریباً-منظم برحسب نیم‌معین مثبت بودن نگاشت زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: توابع تقریباً-منظم، نگاشت یکنوایی ماکسیمال، زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم، هم‌مشتق، آنالیز تغییرات.

۱. مقدمه

استفاده از زیرمشتق حدى تعريف مى‌كنيم. همچنين به تعريف زیرمشتقات جزئى مرتبه دوم توابع دومتغيره با استفاده از هممشتق نگاهت زیرمشتق مرتبه اول مى‌پردازيم و سپس شرايط لازم و كافي براى محدب بودن توابع ∂ -تقریباً-منظم برحسب نیم‌معین مثبت بودن زیرمشتقات جزئى مرتبه دوم ارائه مى‌دهيم.

۲. مفاهيم اوليه

در اين بخش، بعضى تعاريف و قضايای پایه‌ای مورد استفاده در اين مقاله از مرجع [۷] بازنويسى مى‌شوند. فرض مى‌كنيم X و Y فضاهای باناخ و X^* و Y^* دوگان آنها باشند. در ابتدا یادآوری مى‌كنيم كه براى نگاهت مجموعه مقدار $F: X \rightrightarrows Y$ ، $dom F$ و $gph F$ به صورت $dom F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ و $gph F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$ تعريف مى‌شوند.

تعريف ۱. براى نگاهت مجموعه مقدار $F: X \rightrightarrows X^*$ به صورت زیر تعريف مى‌شود.

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} F(x) :=$$

$$\left\{ x^* \in X^* \mid \exists x_k \rightarrow \bar{x}, x_k \xrightarrow{w^*} x^* \right\}.$$

تعريف ۲. (نرمال‌هاى تعميم‌يافته) فرض كنيد Ω يك زیرمجموعه غيرتهی از X باشد.

الف) مجموعه \mathcal{E} -نرمال‌هاى Ω در $\bar{x} \in \Omega$ به صورت زیر تعريف مى‌شود.

$$\hat{N}_\varepsilon(\bar{x}; \Omega) :=$$

$$\left\{ x^* \in X^* \mid \limsup_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leq \varepsilon \right\}.$$

توابع تقریباً-منظم^۱ براى اولین بار در مرجع [۱۲] در فضاهای با بعد متناهی معرفی شدند. در مراجع [۲، ۱]، تعريف توابع تقریباً-منظم به فضاهای باناخ و هيلبرت گسترش داده شده است و سپس اثبات شده است كه بسيارى از خواص اين توابع روى \mathbb{R}^n همچنان روى اين فضاها نيز برقرارند. همچنين نتايج و خصوصيات و کاربردهاى از اين توابع در مراجع [۶، ۱۰، ۱۱، ۱۳] آورده شده است.

كلاس توابع تقریباً-منظم، شامل توابع محدب، C^2 -پايينى^۲، قویاً متمایل^۳ و... است [۱۳]. هدف اصلى از بررسى توابع تقریباً-منظم، اثبات خواص مهمى از توابع محدب و نزديك محدب است كه مى‌توان آنها را در كلاس بزرگى از توابع غيرمحدب يافت. براى مثال مى‌دانيم كه تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، C^2 محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، ماتريس هسين $\nabla^2 f(x)$ نیم‌معین مثبت باشد. شكل‌هاى ديگرى از اين قضيه بدون در نظر گرفتن شرط C^2 با انواع مختلفى از زیرمشتقات مرتبه دوم در مراجع [۳، ۴، ۱۴] اثبات شده است.

در مراجع [۸، ۵]، توابع تقریباً منظم پارامترى معرفى شده‌اند و نويسندگان به بررسى ارتباط يکنوايى ماكسيمال و نگاهت هممشتق^۴ توابع مجموعه مقدار روى فضاهای با بعد متناهی و نامتناهی پرداخته‌اند و کاربردهاى از آن را در پايدارى كامل سيستم‌هاى تغييراتى پارامترى ارائه داده‌اند.

همچنين در مرجع [۴]، نويسندگان ارتباط بين يکنوايى ماكسيمال نگاهت‌هاى مجموعه مقدار و نیم‌معین مثبت بودن نگاهت هممشتق در فضاهای هيلبرت را بررسى کرده‌اند. همچنين شرايط لازم و كافي براى محدب و قویاً محدب بودن توابع C^2 -پايينى برحسب نیم‌معین مثبت بودن نگاهت زیرمشتق مرتبه دوم داده شده است.

اين مقاله به صورت زیر سازماندهى شده است:

بخش ۲ شامل بعضى مفاهيم مورد استفاده در اين مقاله است. در بخش ۳، توابع تقریباً منظم پارامترى را با

1. Prox-regular
2. Lower- C^2
3. Strongly amenable
4. Coderivative

$$= \{x^* \in X^* \mid \exists \varepsilon_k \downarrow 0, (x_k, y_k) \xrightarrow{gph F} (\bar{x}, \bar{y}), (x_k^*, y_k^*) \xrightarrow{w^*} (x^*, y^*)\}$$

s.t. $(x_k^*, -y_k^*) \in \hat{N}_{\varepsilon_k}((x_k, y_k), gph F)$.
ج هم مشتق مخلوط F در $(\bar{x}, \bar{y}) \in gph F$ نگاشت مجموعه مقدار $D_M^* F(\bar{x}, \bar{y}): Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_M^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* \mid \exists \varepsilon_k \downarrow 0, (x_k, y_k) \xrightarrow{gph F} (\bar{x}, \bar{y}), x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*, \|y_k^* - y^*\| \rightarrow 0\}$$

s.t. $(x_k^*, -y_k^*) \in \hat{N}_{\varepsilon_k}((x_k, y_k), gph F)$.
 در هر یک از حالات فوق، اگر $(\bar{x}, \bar{y}) \notin gph F$ آنگاه برای هر $y^* \in Y^*$

$$\hat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = D_M^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = D_N^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \emptyset$$

تنها تفاوت هم مشتق نرمال و مخلوط در این است که در تعریف هم مشتق نرمال برای هر دو دنباله x_k^* و y_k^* همگرایی ضعیف استفاده شده است در صورتی که در تعریف هم مشتق مخلوط، $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ و $y_k^* \xrightarrow{\|\cdot\|} y^*$ با توجه به تعریف بالا، به ازای هر $(\bar{x}, \bar{y}) \in gph F$ و هر $y^* \in Y^*$ داریم:

$$\hat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \subseteq D_M^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \subseteq D_N^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$$

اگر $\dim Y < \infty$ ، در این صورت:

$$D_M^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = D_N^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := D^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$$

تعریف ۴. فرض کنید $\varphi: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ در $\bar{x} \in X$ متناهی باشد. مجموعه

منظور از نماد $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ این است که $x \in \Omega$

اگر در این تعریف ε را مساوی صفر قرار دهیم، مجموعه $\hat{N}(\bar{x}, \Omega) := \hat{N}_0(\bar{x}, \Omega)$ مخروط نرمال فرشه نامیده می‌شود. اگر $\bar{x} \notin \Omega$ آنگاه برای هر $\varepsilon \geq 0$ ، $\hat{N}_\varepsilon(\bar{x}, \Omega) := \emptyset$.

ب فرض کنید $\bar{x} \in \Omega$ ، مخروط نرمال اصلی Ω در \bar{x} را با $N(\bar{x}, \Omega)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$N(\bar{x}, \Omega) := \limsup_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ \varepsilon \downarrow 0}} \hat{N}_\varepsilon(x, \Omega).$$

قرارداد: اگر $\bar{x} \notin \Omega$ ، آنگاه، $N(\bar{x}, \Omega) := \emptyset$.

تعریف ۳. نگاشت $F: X \rightrightarrows Y$ با $dom F \neq \emptyset$ را در نظر بگیرید.

الف ε -هم مشتق F در $(x, y) \in gph F$ ، نگاشت مجموعه مقدار $\hat{D}_\varepsilon^* F(x, y): Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{D}_\varepsilon^* F(x, y)(y^*) := \left\{ x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in \hat{N}_\varepsilon((x, y); gph F) \right\}$$

اگر در این تعریف ε را مساوی صفر قرار دهیم، این هم مشتق، هم مشتق فرشه F در (x, y) نامیده می‌شود و با $\hat{D}^* F(x, y)$ نشان داده می‌شود. بنابراین،

$$\hat{D}^* F(x, y)(y^*) := \left\{ x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in \hat{N}((x, y); gph F) \right\}$$

ب هم مشتق نرمال F در $(\bar{x}, \bar{y}) \in gph F$ ، نگاشت مجموعه مقدار $D_N^* F(\bar{x}, \bar{y}): Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_N^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \left\{ x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N_\varepsilon((\bar{x}, \bar{y}); gph F) \right\}$$

اگر $f(\bar{x}) = \infty$ ، در این صورت قرار می‌دهیم،
 $\partial_p f(\bar{x}) = \emptyset$.

تعریف ۶. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ را تقریباً-منظم در \bar{x} برای \bar{v} گوئیم هرگاه f در \bar{x} متناهی و موضعاً نیم‌پیوسته پایینی باشد و $\bar{v} \in \partial_p f(\bar{x})$. علاوه بر این، $r \geq 0$ و $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x') \geq f(x) + \langle v, x' - x \rangle - \frac{r}{2} \|x' - x\|^2,$$

$$x, x' \in B_\varepsilon^{\bar{x}}, v \in \partial_p f(x),$$

$$|v - \bar{v}| < \varepsilon, f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon.$$

اگر شرایط فوق برای هر $\bar{v} \in \partial_p f(\bar{x})$ برقرار باشد، f را تقریباً-منظم در \bar{x} گوئیم.

حال تعریف توابع تقریباً-منظم را به توابع دو متغیره تعمیم می‌دهیم. در این تعریف از زیرمشتق حدی به جای زیرمشتق تقریبی استفاده شده است. یادآوری می‌کنیم که $\partial_p f(x) \subset \partial f(x)$.

تعریف ۷. (∂ -تقریباً-منظم پارامتری) فرض کنید تابع $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ در $(\bar{x}, \bar{u}) \in \text{dom } f$ ، موضعاً نیم‌پیوسته پایینی باشد. ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x در \bar{x} برای \bar{v} با پارامتری سازی سازگار با u در \bar{u} گوئیم هرگاه اگر $\bar{v} \in \partial_x f(\bar{x}, \bar{u})$ و همسایگی‌های U از \bar{u} ، X از \bar{x} ، V از \bar{v} ، $\varepsilon > 0$ و $r \geq 0$ وجود داشته باشند به طوری که

$$f(x', u) \geq f(x, u) + \langle v, x' - x \rangle - \frac{r}{2} \|x' - x\|^2,$$

$$x' \in X, v \in \partial_x f(x, u), v \in V,$$

$$x \in X, u \in U, f(x, u) < f(\bar{x}, \bar{u}) + \varepsilon.$$

اگر f به ازای هر $\bar{v} \in \partial_x f(\bar{x}, \bar{u})$ ، ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x در (\bar{x}, \bar{u}) باشد، f را ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x در (\bar{x}, \bar{u}) گوئیم (بدون ذکر \bar{v}). f را ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x گوئیم (بدون ذکر

$$\partial \varphi(\bar{x}) :=$$

$$\left\{ x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \left[N((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \text{epi } \varphi) \right] \right\}$$

را زیرمشتق اصلی φ در \bar{x} می‌نامیم. اگر $|\varphi(\bar{x})| = \infty$ ، آنگاه $\partial \varphi(\bar{x}) = \emptyset$.

تعریف ۵. نگاشت $T: X \rightrightarrows X^*$ را در نظر بگیرد [۴].

الف) T روی X یکنواست اگر

$$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0,$$

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \text{gph } T.$$

T را روی X یکنوای ماکسیمال گوئیم هرگاه برای هر نگاشت یکنوای دیگری مانند S ، با شرط $\text{gph } T \subset \text{gph } S$ ، داشته باشیم $\text{gph } T = \text{gph } S$.

ب) T روی X زیریکنوا^۲ است اگر $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $T + rI$ یکنوا باشد. به عبارت دیگر،

$$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq -r \|u_1 - u_2\|^2,$$

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \text{gph } T.$$

ج) T در $\bar{u} \in \text{dom } T$ شبه موضعاً زیریکنوا^۲ است هرگاه اگر همسایگی U از \bar{u} و $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq -r \|u_1 - u_2\|^2,$$

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \text{gph } T \cap (U \times X).$$

۳. زیر مشتقات مرتبه دوم توابع تقریباً-منظم

تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\bar{x} \in \text{dom } f$. زیرمشتق تقریبی^۲ $\partial_p f(\bar{x})$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳].

گوئیم $x^* \in X^*$ در $\partial_p f(\bar{x})$ قرار دارد هرگاه اگر $r > 0$ و $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in B_\varepsilon^{\bar{x}}$ داشته باشیم،

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + r \|x - \bar{x}\|^2.$$

1. Hypomonotone
2. Semilocally hypomonotone
3. Proximal

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -r_x \|x_1 - x_2\|^2, \quad (1)$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{gph} T \cap (\text{int} B_{\gamma_x}^x \times \mathbb{R}^n).$$

از طرفی چون $[u, u']$ فشرده است، می‌توان $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ را چنان انتخاب کرد که

$$[u, u'] \subset \bigcup_{i=1}^n (\text{int} B_{\gamma_{x_i}}^{x_i}).$$

می‌توان $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ را چنان یافت که برای هر $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ و $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$

داشته باشیم $[\hat{u}_j, \hat{u}_{j+1}] \subset B_{\gamma_{x_{i_j}}}^{x_{i_j}}$ ، که در آن

$$\hat{u}_j = u + t_j(u' - u)$$

بنابراین $\hat{u}_j \in [u, u'] \subset \text{dom} T$ ، $j \in \{0, \dots, m\}$

و $\hat{v}_0 = v$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $\hat{v}_m = v'$

$$\hat{v}_m = v'$$

با توجه به رابطه (۱) و با انتخاب

$$r = \max \{r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{x_n}\}$$

$$(t_{j+1} - t_j) \langle \hat{v}_{j+1} - \hat{v}_j, u' - u \rangle = \langle \hat{v}_{j+1} - \hat{v}_j, \hat{u}_{j+1} - \hat{u}_j \rangle \geq$$

$$-r \|\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_j\|^2 = -r(t_{j+1} - t_j)^2 \|u' - u\|^2.$$

بنابراین

$$\langle v' - v, u' - u \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \hat{v}_{j+1} - \hat{v}_j, u' - u \rangle \geq$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} -r(t_{j+1} - t_j) \|u' - u\|^2 = -r \|u' - u\|^2.$$

بدین صورت اثبات کامل می‌شود.

نگاشت $\varphi: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را در نظر بگیرید. نگاشت

زیرمشتق جزئی مرتبه اول $\partial_x \varphi: X \times Y \rightrightarrows X^*$ را

به صورت مجموعه زیرمشتقات نگاشت $\varphi_y := \varphi(0, y)$

در X تعریف می‌کنیم. اکنون زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم نگاشت φ ، نسبت به تغییرهایش را تعریف می‌کنیم.

مشتقات جزئی مرتبه دوم نگاشت‌های دومتغیره، نسبت

به یک متغیر در مرجع [۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

تعریف ۸. فرض کنید $\varphi: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ در

$$\bar{v} \in \partial_x \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \text{ و } (\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$$

اگر f ، ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x در هر $(\bar{x}, \bar{u}) \in \text{dom} f$ باشد.

لم ۱. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

موضعیاً نیم‌پیوسته پایینی باشد. اگر $(\bar{x}, \bar{u}) \in \text{dom} f$

∂ ، ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x در \bar{x} برای \bar{v} با

پارامتری‌سازی سازگار با u در \bar{u} باشد، در این صورت

$$g_{\bar{u}}(x) := \partial_x f(x, \bar{u})$$

است.

اثبات. با استفاده از تعریف فوق، همسایگی‌های U از

\bar{u} ، X از \bar{x} ، V از \bar{v} ، $\varepsilon > 0$ و $r \geq 0$ وجود

دارند به طوری که

$$f(x', \bar{u}) \geq f(x, \bar{u}) +$$

$$\langle v, x' - x \rangle - \frac{r}{2} \|x' - x\|^2,$$

$$f(x, \bar{u}) \geq f(x', \bar{u}) +$$

$$\langle v', x - x' \rangle - \frac{r}{2} \|x - x'\|^2,$$

$$v \in \partial_x f(x, \bar{u}), v' \in \partial_x f(x', \bar{u}),$$

$$v, v' \in V, x, x' \in X, f(x, \bar{u}) <$$

$$f(\bar{x}, \bar{u}) + \varepsilon, f(x', \bar{u}) < f(\bar{x}, \bar{u}) + \varepsilon.$$

با جمع کردن دوطرف نامساوی‌های بالا داریم:

$$\langle v - v', x - x' \rangle \geq -r \|x - x'\|^2,$$

$$v \in \partial_x f(x, \bar{u}), v' \in \partial_x f(x', \bar{u}),$$

$$v, v' \in V, x, x' \in X.$$

این بدان معناست که $\partial_x f(x, \bar{u})$ ، در \bar{x} شبه موضعیاً

زیریکنواست.

قضیه ۲. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ روی \mathbb{R}^n یک

نگاشت شبه موضعیاً زیریکنوا و $\text{dom} T$ محدب باشد. در

این صورت T روی \mathbb{R}^n زیریکنوا است.

اثبات. $(u, v), (u', v') \in \text{gph} T$ را به دلخواه انتخاب

می‌کنیم. با توجه به محدب بودن $\text{dom} T$ ، داریم

$$[u, u'] \subset \text{dom} T.$$

چون T شبه موضعیاً زیریکنواست،

به ازای هر $x \in [u, u']$ و $\gamma_x > 0$ و $r_x > 0$ وجود

دارند به طوری که

محدب و گراف g_x بسته باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(الف) g_x روی \mathbb{R}^d ، یکنوای ماکسیمال است.
(ب) به‌ازای هر $z \in \partial_{yx}^2 f(x, y, v)(w)$ داریم:
 $\langle z, w \rangle \geq 0$.

(ج) به‌ازای هر $z \in \partial_{yx}^2 f(x, y, v)(w)$ داریم:
 $\langle z, w \rangle \geq 0$.

اثبات. طبق لم ۱، g_x روی \mathbb{R}^d شبه‌موضعیاً زیر یکنواست و بنابراین با استفاده از قضیه ۵.۳ از مرجع [۴] و با توجه به تعریف $\partial_{yx}^2 \varphi(x, y, v)(w) = \hat{D}^*(g_x)(y, v)(w)$ (ب) می‌رسیم.
(ب) \Leftarrow (ج)

چون در فضای y با بعد متناهی، $D_M^* g_x(y, v)(w) = D_N^* g_x(y, v)(w)$ و همواره

$$\hat{D}^* g_x(y, v)(w) \subset D_N^* g_x(y, v)(w),$$

اثبات سراسر است.

(ج) \Leftarrow (الف)

طبق لم ۱، g_x روی \mathbb{R}^d شبه‌موضعیاً زیر یکنواست و بنابراین با استفاده از قضیه ۲، g_x روی \mathbb{R}^d زیر یکنواست. اثبات با توجه به متناهی بودن فضا و $\partial_{yx}^2 f(x, y, v)(w) = D_M^* g_x(y, v)$ و با استفاده از قضیه ۳.۷ از مرجع [۴]، کامل می‌شود.

قضیه ۴. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ، ∂ -تقریباً-منظم باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(الف) f روی \mathbb{R}^n ، محدب است.

(ب) به‌ازای هر $z \in \partial_{yx}^2 f(x, y, v)(w)$ داریم:
 $\langle z, w \rangle \geq 0$.

(ج) به‌ازای هر $z \in \partial_{yx}^2 f(x, y, v)(w)$ داریم:
 $\langle z, w \rangle \geq 0$.

اثبات. به‌طریق مشابه با قضیه قبل انجام می‌شود.

تذکر. چون توابع C^2 -پایینی، تقریباً منظم هستند، بنابراین این قضیه، قضیه ۴.۱ از مرجع [۴] را تعمیم می‌دهد.

نگاشت $g_x: Y \rightrightarrows X^*$ را با ضابطه $g_x(y) = \partial_x \varphi(\bar{x}, y)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت:

(الف) زیرمشتق مرتبه دوم جزئی مخلوط $\partial_{M, yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}): X^{**} \rightrightarrows Y^*$ و زیرمشتق مرتبه دوم جزئی نرمال $\partial_{N, yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}): X^{**} \rightrightarrows Y^*$ تابع φ به‌ترتیب نسبت به X و Y در (\bar{x}, \bar{y}) وابسته به \bar{v} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial_{M, yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(w) :=$$

$$D_M^*(g_x)(\bar{y}, \bar{v})(w), w \in X^{**},$$

$$\partial_{N, yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(w) :=$$

$$D_N^*(g_x)(\bar{y}, \bar{v})(w), w \in X^{**}.$$

اگر این دو هم‌مشتق مخلوط و نرمال یکسان باشند (به‌خصوص در حالت تابع $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$)، در این صورت

$$\partial_{M, yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(w) =$$

$$\partial_{N, yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(w) :=$$

$$\partial_{yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(w)$$

(ب) زیرمشتق مرتبه دوم جزئی ترکیبی $\partial_{yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}): X^{**} \rightrightarrows Y^*$ به‌ترتیب نسبت به X و Y در (\bar{x}, \bar{y}) وابسته به \bar{v} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial_{yx}^2 \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(w) :=$$

$$\hat{D}^*(g_x)(\bar{y}, \bar{v})(w), w \in X^{**}.$$

یادآوری می‌کنیم که نگاشت مجموعه مقدار $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ را نیم‌معین مثبت^۱ گوئیم اگر برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ و هر $z \in T(u)$ داشته باشیم، $\langle z, u \rangle \geq 0$. بنابراین با شرایط قضیه زیر می‌توان گفت که نگاشت زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم، نیم معین مثبت‌اند.

قضیه ۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ نسبت به x تقریباً-منظم باشد و دامنه نگاشت $g_x: \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ که با ضابطه $g_x(y) := \partial_x f(x, y)$ تعریف می‌شود،

ب \Leftarrow الف و ج \Leftarrow الف.

اثبات. با برگشت پذیری تمام مراحل اثبات الف \Leftarrow ب و با توجه به قضیه مینتی که g_x قویا یکنوای ماکسیمال است اگر و تنها اگر $S = g_x - \kappa I$ یکنوای ماکسیمال باشد، کامل می شود.

نگاشت $T: X \rightrightarrows X^*$ را در نظر بگیرید. T را روی X قویا یکنوا^۱ با ثابت $\kappa > 0$ گوئیم هرگاه اگر $T - \kappa I$ روی X یکنوا باشد.

قضیه ۵. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ نسبت به x ، تقریباً-منظم باشد و دامنه نگاشت $g_x: \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ که با ضابطه $g_x(y) := \partial_x f(x, y)$ تعریف می شود، محدب و گراف g_x بسته باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(الف) g_x روی \mathbb{R}^d ، قویا یکنوای ماکسیمال با ثابت $\kappa > 0$ است.

(ب) به ازای هر $z \in \tilde{\partial}_{yx}^2 f(x, y, v)(w)$ ، داریم:

$$\langle z, w \rangle \geq \kappa \|w\|^2$$

(ج) به ازای هر $z \in \partial_{yx}^2 f(x, y, v)(w)$ ، داریم:

$$\langle z, w \rangle \geq \kappa \|w\|^2$$

اثبات. الف \Leftarrow ب و الف \Leftarrow ج.

تعریف می کنیم $S = g_x - \kappa I$. بنابراین S روی \mathbb{R}^d یکنوای ماکسیمال است. طبق قضیه ۱۶۲ از مرجع [۷]، داریم،

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_{yx}^2 f(x, y, v)(w) &= \\ \hat{D}^* g_x(y, v)(w) &= \\ \hat{D}^* S(y, v - \kappa y)(w) + \kappa w, \\ (y, v) &\in \text{gph } g_x, \\ \partial_{yx}^2 f(x, y, v)(w) &= \\ D^* g_x(y, v)(w) &= \\ D^* S(y, v - \kappa y)(w) + \kappa w. \\ (y, v) &\in \text{gph } g_x, \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۳.۲ و ۳.۷ از مرجع [۴] داریم،

$$\begin{aligned} z &\in \hat{D}^* S(y, v - \kappa y)(w) + \kappa w \\ \Rightarrow \langle z - \kappa w, w \rangle &\geq 0, \\ z &\in D^* S(y, v - \kappa y)(w) + \kappa w \\ \Rightarrow \langle z - \kappa w, w \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، $\langle z, w \rangle \geq \kappa \|w\|^2$.

فهرست منابع

- [9] Mordukhovich, B. S., Nghia, T. T. A., (2016). Local monotonicity and full stability for parametric variational systems. *Siam Journal on Optimization*, 26, 1032-1059.
- [10] Moudafi, A., (2004). An algorithmic approach to prox-regular variational inequalities. *Applied Mathematics and Computation*, 155, 845-852.
- [11] Poliquin, R. T., Rockafellar, R.T., (1996). Generalized Hessian properties of regularized nonsmooth functions. *Siam Journal on Optimization*, 6, 1121-1137.
- [12] Poliquin, R. T., Rockafellar, R.T., (1996). Prox-regular functions in variational analysis. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348, 1805-1838.
- [13] Rockafellar, R.T., Wets, R. J-B., (1998). *Variational analysis*. Springer, Berlin.
- [14] Yang, X. Q., (1994). Generalized second-order characterizations of convex functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 82, 173-180.
- [1] Bernard, F., Thibault, L., (2000). Prox-regular functions in Hilbert spaces. *Mathematical Analysis and Applications*, 303, 1-14.
- [2] Bernard, F., Thibault, L., (2004). Prox-regularity functions and sets in Banach spaces. *Set-Valued Analysis*, 12, 25-47.
- [3] Chieu, N. H., Chuong, T. D., Yao, J.-C., Yen, N. D., (2011). Characterizing convexity of a function by its Frechet and limiting second-order subdifferentials. *Set-Valued Analysis*, 19, 75-96.
- [4] Chieu, N. H., Lee, G. M., Mordukhovich, B. S., Nghia, T. T. A., (2016). Coderivative characterizations of maximal monotonicity for set-valued mappings. *Journal of Convex Analysis*, 23, 461-480.
- [5] Levy, A. B., Poliquin, R. A., Rockafellar, R.T., (2000). Stability of locally optimal solutions. *Siam Journal on Optimization*, 10, 580-604.
- [6] Mifflin, R., Sagastizaabal, C., (2004). VU-smoothness and proximal point results for some nonconvex functions. *Optimization Methods & Software*, 19, 463-478.
- [7] Mordukhovich, B. S., (2006). *Variational analysis and generalized differentiation, I : Basic Theory, II : Applications*. Springer, Berlin.
- [8] Mordukhovich, B. S., Nam, N. M., Nhi, N. T. Y., (2014). Partial second-order subdifferentials in variational analysis and optimization. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 35, 1113-1151.