

# یک روش تحلیلی بهینه برای حل مسائل مقدار مرزی غیرخطی بر پایه روش تغییر پارامتر

رحمت درزی<sup>۱\*</sup>، بهرام عاقلی<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نکا، نکا، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائمشهر، قائمشهر، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۸/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۱/۱۰

## چکیده

در این مقاله، نویسندگان یک الگوریتم تحلیلی همگرای اصلاح شده را برای جواب مسائل مقدار مرزی و مقدار اولیه غیرخطی به واسطه روش تغییر پارامتر ارائه می‌کنند و بطور خلاصه روش تغییر پارامتر بهینه می‌نامند. این روش براساس تعبیه یک پارامتر و یک عملگر کمکی، یک مزیت محاسباتی برای همگرایی جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل غیرخطی مهیا می‌کند. همگرایی توسعه یافته مذکور نشان داده شده و جزئیات آن نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. علاوه بر این، یک روش مناسب برای انتخاب مقدار بهینه پارامتر کمکی در نظر گرفته می‌شود که تحت مینیمم‌سازی خطا روی دامنه مساله می‌باشد. موثر بودن روش و دقت الگوریتم پیشنهادی، با اجرا روی مسائل فیزیکی همچون مساله استورم-لیوویل، مساله ایری و مساله نوسانگر هارمونیک کوانتومی نشان داده می‌شود. نتایج عددی و شکل‌های بدست آمده بوضوح دقت الگوریتم و همگرایی آن را منعکس می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** روش تغییر پارامتر بهینه، مسائل مقدار مرزی، مساله استورم-لیوویل، مساله ایری و مساله نوسانگر هارمونیک مکانیکی کوانتومی.

## ۱. مقدمه

چندین تکنیک و روش تحلیلی و عددی مانند اختلال [۲۱]، روش اختلال هموتوبی [۳-۶]، روش تبدیل دیفرانسیل [۷-۹]، روش تجزیه آدومیان [۱۰-۱۳]، اسپلاین چند جمله‌ای [۱۴]، روش تکرار تغییرات [۲۰-۱۵]، روش سینک-گالرکین [۲۲ و ۲۱] برای حل مسائل مقدار مرزی و اولیه در ریاضیات، فیزیک، مهندسی و علوم کاربردی بکار گرفته شده‌اند. متأسفانه همه این الگوریتم‌ها دارای نقایصی هستند. از جمله مقدار زیاد کار محاسباتی، محاسبات طولانی، همگرایی محدود، فرض پارامتر کوچک، محاسبه چند جمله‌ای‌های آدومیان، نتایج واگرا و حتی برخی موارد ماهیت فیزیکی مساله. لذا این روش‌ها بعضاً قابل اتکا و اعتماد نیستند.

در [۲۳-۲۵] نویسندگان روش تغییر پارامتر را برای حل معادلات دیفرانسیل با ساختار فیزیکی متنوع استفاده کردند و ملاحظه کردند که روش تغییر پارامتر از روش‌ها و الگوریتم‌های ذکر شده بسیار بهتر است. الگوریتم پیشنهادی جواب‌ها را بدون هیچ خطی‌سازی، گسسته سازی، اختلال، فرضیات محدود و فارغ از محاسبه چند جمله‌ای‌های آدومیان می‌یابد. نتایج به دست آمده از الگوریتم (روش) پیشنهادی کاملاً قابل اعتمادند. اخیراً محی الدین و همکاران [۲۶-۲۹] روش را با موفقیت برای معادلات هلمولتز و بوساسنک بکار گرفتند و نشان دادند که روش برای حل این مسائل بسیار قابل اعتماد و امیدوار کننده است.

در روش تغییر پارامتر بهینه یک پارامتر کمکی که مقدار بهینه آن را می‌توان به سادگی تعیین کرد بکار گرفته می‌شود. قانعی و حسینی [۳۳] یک پارامتر کمکی را در الگوریتم تکرار تغییرات، برای بدست آوردن جواب معادلات موج و گرمادرج کردند و نتیجه گرفتند که یک پارامتر کمکی یک روش ساده برای کنترل و تنظیم همگرایی (ناحیه همگرایی) جواب تقریبی در یک ناحیه بزرگ مهیا می‌کند. سماری و حسن [۳۴] از روش تکرار تغییرات همراه یک پارامتر کمکی برای پیش بینی جواب‌های چند گانه‌ی مسائل مقدار مرزی غیر خطی استفاده کردند و به موفقیت‌های بزرگی نایل شدند.

در روش تغییر پارامتر بهینه، قبل از ساختن یک الگوریتم تکراری برای بدست آوردن جواب تقریبی، تمام شرایط مرزی را برای ایجاد یک معادله انتگرال بکار می‌گیریم. به این ترتیب یک الگوریتم تکراری اصلاح شده که شامل ضرایب نامعین نیست را ایجاد می‌کنیم، در حالیکه اکثر روش‌های تکراری قبلی اینگونه نیستند. این الگوریتم جدید، یک روش مناسب برای کنترل و تنظیم ناحیه همگرایی جواب تقریبی روی دامنه مساله مهیا می‌کند. مزیت اصلی این الگوریتم توسعه یافته، توانای آن در مهیا کردن اطلاعات بهتر جواب تقریبی پیوسته روی دامنه مساله است. در الگوریتم اصلاح شده، خطای مانده، برای انتخاب یک مقدار بهینه از پارامتر کمکی تعریف می‌شود.

## ۲. بیان روش

برای بیان مفهوم روش تغییر پارامتر بهینه برای معادلات دیفرانسیل، فرم کلی

$$Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t) = 0 \quad (۱)$$

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta, \quad (۲)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن  $L$  نماد عملگر خطی،  $R$  نماد عملگر خطی از مرتبه کمتر از  $L$  است،  $N$  عملگر غیر خطی را نشان می‌دهد و  $g$  جمله غیر خطی است. یک پارامتر کمکی  $K$  را با معادله (۱) همراه کرده و معادله را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Hf(t) = Hf(t) + \kappa(Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t)) \quad (۳)$$

که در آن  $H$  هر عملگر مشتق خطی مناسب باضریب مشتق مرتبه بالاتر از یک می‌باشد. در اینجا  $H = L = \frac{d}{dt^2}$  در نظر می‌گیریم. بنابراین معادله (۱) بصورت

$$Lf(t) = Lf(t) + \kappa(Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t)) \quad (۴)$$

یا بطور خلاصه

$$Lf(t) = Gf(t) \quad (۵)$$

اکنون با قرار دادن مقادیر  $C_1$  و  $C_2$  در معادله (۱۳) نتیجه می‌شود:

$$f(t) = \alpha - a \left( \frac{\alpha - \beta}{a - b} \right) + t \left( \frac{\alpha - \beta}{a - b} \right) + \int_0^t (t - \eta) \{ Lf(t) + \kappa(Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t)) \} d\eta + \left( \frac{a-t}{a-b} - 1 \right) \int_0^a (a - \eta) \{ Lf(t) + \kappa(Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t)) \} d\eta + \frac{t-a}{a-b} \int_0^b (b - \eta) \{ Lf(t) + \kappa(Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t)) \} d\eta. \quad (14)$$

اجزای جواب (۱۴) بصورت تکراری ذیل مشخص می‌شوند:

$$f_0(t) = \alpha - a \left( \frac{\alpha - \beta}{a - b} \right) + t \left( \frac{\alpha - \beta}{a - b} \right) \quad (15)$$

$$f_1(t, \kappa) = \int_0^t (t - \eta) \{ Lf_0(t) + \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t)) \} d\eta + \left( \frac{a-t}{a-b} - 1 \right) \int_0^a (a - \eta) \{ Lf_0(t) + \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t)) \} d\eta + \frac{t-a}{a-b} \int_0^b (b - \eta) \{ Lf_0(t) + \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t)) \} d\eta. \quad (16)$$

و برای  $n \geq 1$

$$f_{n+1}(t, \kappa) = \int_0^t (t - \eta) \{ Lf_n(\eta, \kappa) + \kappa(Lf_n(\eta, \kappa) + Rf_n(\eta, \kappa) + Nf_n(\eta, \kappa) + g(t)) \} d\eta + \left( \frac{a-t}{a-b} - 1 \right) \int_0^a (a - \eta) \{ Lf_n(\eta, \kappa) + \kappa(Lf_n(\eta, \kappa) + Rf_n(\eta, \kappa) + Nf_n(\eta, \kappa) + g(t)) \} d\eta + \frac{t-a}{a-b} \int_0^b (b - \eta) \{ Lf_n(\eta, \kappa) + \kappa(Lf_n(\eta, \kappa) + Rf_n(\eta, \kappa) + Nf_n(\eta, \kappa) + g(t)) \} d\eta. \quad (17)$$

### ۳. تحلیل و آنالیز همگرایی

در این بخش در خصوص همگرایی روش تغییر پارامترهای بهینه شده بحث می‌کنیم. قبل از ورود به این مبحث ذکر چند نکته ضروری می‌باشد.

**نکته ۱:** در سرتاسر بخش همگرایی از فرم معادله زیر استفاده می‌شود:

نوشته می‌شود. طبق روش تغییر پارامتر [۳۷-۳۵ و ۲۸] یک جواب برای (۵) بصورت

$$f_c(t) = c_1 + c_2 t \quad (6)$$

قابل ارائه است.

ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  را در (۶) به ترتیب با توابع  $u_1(t)$  و  $u_2(t)$  جایگزین می‌کنیم. بدین ترتیب داریم:

$$f_p(t) = u_1(t)f_1(t) + u_2(t)f_2(t) \quad (7)$$

که در آن  $f_1(t) = 1$  و  $f_2(t) = t$  توابع  $u_1(t)$  و  $u_2(t)$  بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$u_1(t) = \int_0^t \frac{W_1}{W} d\eta, \quad u_2(t) = \int_0^t \frac{W_2}{W} d\eta \quad (8)$$

که در آن  $W$  رونسکین توابع  $f_1$  و  $f_2$  است، یعنی

$$W = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} = 1, \quad (9)$$

و

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & f_2(t) \\ Gf(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} = -tGf(t) \quad (10)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} f_1(t) & 0 \\ f_1'(t) & Gf(t) \end{vmatrix} = Gf(t). \quad (11)$$

با قرار دادن مقادیر  $W_1, W_2$  در (۸) نتیجه می‌شود:

$$u_1(t) = - \int_0^t \eta Gf(\eta) d\eta, \quad u_2(t) = \int_0^t Gf(\eta) d\eta, \quad (12)$$

بنابراین،

$$f(t) = f_c(t) + f_p(t) = c_1 + c_2 t + \int_0^t (t - \eta) Gf(\eta) d\eta \quad (13)$$

با قرار دادن  $t = b$  و  $t = a$  در معادله (۱۳) بدست می‌آوریم:

$$c_1 = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{a - b} - \int_0^a (a - \eta) Gf(\eta) d\eta, + \frac{a}{a - b} - \int_0^a (a - \eta) Gf(\eta) d\eta - \int_0^b (b - \eta) Gf(\eta) d\eta,$$

و

$$c_2 = \frac{\alpha - \beta}{a - b} + \frac{1}{a - b} - \int_0^a (a - \eta) Gf(\eta) d\eta - \int_0^b (b - \eta) Gf(\eta) d\eta.$$

$$\begin{aligned} \|b_{n+1} - b_n\| &= \|f_{n+1}(t, \kappa)\| \leq \\ \gamma \|f_n(t, \kappa)\| &\leq \gamma^2 \|f_{n-1}(t, \kappa)\| \\ &\leq \dots \leq \gamma^{n+1} \|f_0(t)\| \end{aligned} \quad (۲۵)$$

برای هر  $n \geq i$  داریم:

$$\begin{aligned} \|b_n - b_i\| &= \|(b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - \\ b_{n-2}) + \dots + (b_{i+1} - b_i)\| \\ &\leq \|b_n - b_{n-1}\| + \|b_{n-1} - b_{n-2}\| + \\ \dots + \|b_{i+1} - b_i\| \\ &\leq \gamma^n \|f_0(t)\| + \gamma^{n-1} \|f_0(t)\| + \dots + \\ \gamma^{i+1} \|f_0(t)\| \\ &= \frac{1-\gamma^{n-i}}{1-\gamma} \gamma^{i+1} \|f_0(t)\| \end{aligned} \quad (۲۶)$$

از آنجا که  $0 < \gamma < 1$  داریم:

$$\lim_{n,i \rightarrow \infty} b_n - b_i = 0 \quad (۲۷)$$

بنابراین دنباله  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  در فضای هیلبرت  $H$  کوشی است. در نتیجه سری جواب (۲۳) همگراست و حکم ثابت می‌شود.

**قضیه ۲.** فرض کنید  $H$  تعریف شده در (۲۴) هر عملگر دیفرانسیلی (مشتق) خطی مناسب باشد. اگر

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t, \kappa) \quad (۲)$$

آنگاه  $f(t)$  یک جواب دقیق از مساله غیر خطی (۱) است.

**اثبات:** فرض کنید سری (۲۸) همگراست. در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, \kappa) = 0. \quad (۲۹)$$

داریم:

$$\begin{aligned} [f_1(t, \kappa) - f_0(t)] + \\ \sum_{j=1}^n [f_{j+1}(t, \kappa) - f_j(t, \kappa)] = \end{aligned} \quad (۳۰)$$

$$f_{n+1}(t, \kappa) - f_0(t)$$

وقتی

$$f_1(t, \kappa) - f_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} [f_{j+1}(t, \kappa) - f_j(t, \kappa)] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(t, \kappa) - f_0(t) = -f_0(t) \quad (۳۱)$$

$$\begin{aligned} Hf(t) &= Hf(t) + \kappa(Lf(t) + Rf(t) + \\ Nf(t) + g(t)) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

**نکته ۲:** جواب تقریبی

$$f_{n+1}(t, \kappa) = f_0(t) + \sum_{i=0}^n f_i(t, \kappa), \quad (۱۹)$$

شامل پارامتر کمکی  $\kappa$  است که برای کنترل و تنظیم همگرایی جواب تقریبی استفاده می‌شود و مقدار بهینه آن با مینیمم سازی نرم ۲ خطای مانده تعیین می‌شود. [۳۳ و ۳۸ و ۳۹]

**نکته ۳:** فرض کنید  $H$  تعریف شده در (۱۵) مناسب باشد. همچنین فرض کنید  $\lambda(t, \eta)$  ضریبی باشد که به کمک تکنیک رونسکین تعیین شده است. در این صورت، اگر  $f(t)$  در فضای هیلبرت پیوسته باشد، آنگاه

$$H^{-1}f(t) = \int_0^t \lambda(t, \eta) f(\eta) d\eta. \quad (۲۰)$$

با تاثیر عملگر  $H$  بر دو طرف رابطه (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} HH^{-1}f(t) &= H \int_0^t \lambda(t, \eta) f(\eta) d\eta \\ &= f(t) \end{aligned} \quad (۲۱)$$

**قضیه ۱.** فرض کنید  $f_0(t)$  و  $f_{n+1}(t, \kappa)$  در فضای

هیلبرت  $H$  تعریف شده باشند. در این صورت، اگر برای  $0 < \gamma < 1$  و  $\kappa \neq 0$  موجود باشد بطوریکه

$$\begin{aligned} \|f_1(t, \kappa)\| \leq \gamma \|f_0(t)\|, \|f_{n+1}(t, \kappa)\| \leq \\ \gamma \|f_n(t, \kappa)\|, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (۲۲)$$

آنگاه سری جواب

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t, \kappa) \quad (۲۳)$$

همگراست.

**اثبات:** دنباله  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  مجموع جزئی سری جواب

$$F_n(t, \kappa) = f_0(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t, \kappa),$$

را بصورت

$$\begin{aligned} b_0 &= f_0(t), \quad b_1 = f_0(t) + f_1(t, \kappa) \\ b_n &= f_0(t) + f_1(t, \kappa) + \dots + f_n(t, \kappa), \end{aligned} \quad (۲۴)$$

در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  در فضای هیلبرت  $H$  یک دنباله کوشی است. داریم:

$$\begin{aligned} & \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t)) + \\ & \kappa\{\sum_{j=1}^{\infty}(Lf_j(t, \kappa) + Rf_j(t, \kappa) + \\ & Nf_j(t, \kappa))\} \\ & = \kappa[Lf_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty}f_j(t, \kappa)] + \\ & R(f_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty}f_j(t, \kappa)) + N(f_0(t) + \\ & \sum_{j=1}^{\infty}f_j(t, \kappa)) + g(t) = \kappa(Lf(t) + \\ & Rf(t) + Nf(t)). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & Hf_1(t, \kappa) + \sum_{j=1}^{\infty}H[f_{j+1}(t, \kappa) - \\ & f_j(t, \kappa)] = \\ & \kappa(Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t)). \quad (34) \end{aligned}$$

از (۳۳) و (۳۴) داریم:

$$\kappa(Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) + g(t)) = 0.$$

از آنجا که  $\kappa \neq 0$  ملاحظه می‌شود که

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}f_n(t, \kappa),$$

جواب دقیق معادله دیفرانسیل (۱) است و اثبات کامل می‌شود.

**قضیه ۳.** فرض کنید سری جواب (۲۸) به یک جواب دقیق از معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱) همگراست. اگر سری

$$f_N(t) = f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}f_n(t, \kappa),$$

به عنوان یک جواب تقریبی استفاده شود، آنگاه حداکثر خطا بصورت

$$\|f(t) - f_N(t)\| \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{N+1} \|f_0(t)\|,$$

تخمین زده می‌شود.

**اثبات:** از قضیه ۱، برای هر  $n \geq N$  داریم:

$$\|b_n - b_N\| \frac{1-\gamma^{n-N}}{1-\gamma} \gamma^{N+1} \|f_0(t)\|.$$

وقتی  $n \rightarrow \infty$  آنگاه  $b_n \rightarrow f(t)$  لذا برای  $0 < \gamma < 1$  نتیجه می‌گیریم:

$$\|f(t) - f_N(t)\| \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{N+1} \|f_0(t)\|,$$

و اثبات کامل می‌شود.

با تاثیر عملگر  $H$  بر دو طرف رابطه (۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} & H[f_1(t, \kappa) - f_0(t)] + \\ & \sum_{j=1}^{\infty}H[f_{j+1}(t, \kappa) - f_j(t, \kappa)] = \quad (32) \\ & -Hf_0(t) \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} & Hf_1(t, \kappa) + \sum_{j=1}^{\infty}H[f_{j+1}(t, \kappa) - f_j(t, \kappa)] \quad (33) \\ & = 0. \end{aligned}$$

با تاثیر عملگر  $H$  بر دو طرف رابطه (۱۶)

$$\begin{aligned} & Hf_1(t, \kappa) = H \int_0^t (t-\eta) \{Hf_0(t) + \\ & \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t))\} d\eta \\ & + Hh_1(t) \int_0^a (a-\eta) \{Hf_0(t) + \\ & \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t))\} d\eta \\ & + Hh_2(t) \int_0^b (b-\eta) \{Hf_0(t) + \\ & \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t))\} d\eta. \end{aligned}$$

که در آن

$$h_1(t) = \left(\frac{a-t}{a-b} - 1\right), \quad h_2(t) = \frac{t-a}{a-b}.$$

اکنون نکته ۳ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} & Hf_1(t, \kappa) = Hf_0(t) + \kappa(Lf_0(t) + \\ & Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t)) \\ & = \kappa(Lf_0(t) + Rf_0(t) + Nf_0(t) + g(t)) \end{aligned}$$

بطور مشابه از (۱۶) برای  $j = 1$  بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & Hf_2(t, \kappa) = Hf_1(t, \kappa) + \kappa(Lf_1(t, \kappa) + \\ & Rf_1(t, \kappa) + Nf_1(t, \kappa)) \\ & H[f_2(t, \kappa) - f_1(t, \kappa)] = \kappa(Lf_1(t, \kappa) + \\ & Rf_1(t, \kappa) + Nf_1(t, \kappa)), \end{aligned}$$

و برای  $j \geq 2$  داریم:

$$\begin{aligned} & H[f_{j+1}(t, \kappa) - f_j(t, \kappa)] = \kappa(Lf_j(t, \kappa) + \\ & Rf_j(t, \kappa) + Nf_j(t, \kappa)). \end{aligned}$$

در نتیجه بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & Hf_1(t, \kappa) + H[f_2(t, \kappa) - f_1(t, \kappa)] + \\ & \sum_{j=2}^{\infty}H[f_{j+1}(t, \kappa) - f_j(t, \kappa)] = \end{aligned}$$

$$u_1 = -\frac{1}{12}k\lambda x^4 + \frac{1}{6}k\lambda x^3 - \frac{k\lambda x}{12} + x - 1,$$

$$u_2 = \frac{k^2\lambda^2 x (10x^6 - 28x^5 + 35x^3 - 17)}{5040}$$

$$-\frac{1}{12}k(k+3)\lambda(x^4 - 2x^3 + x) + x - 1,$$

$$u_3 = \frac{1}{181440}$$

$$\left( \begin{aligned} &181440(x-1) - 15120k(k(k+5)+7) \\ &\lambda(x^4 - 2x^3 + x) + \end{aligned} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} &k^3\lambda^3 x (-4x^9 + 14x^8 - 30x^6 + 51x^3 - 31) \\ &+ 36k^2(2k+5)\lambda^2 x (10x^6 - 28x^5 + 35x^3 - 17) \end{aligned} \right)$$

:

با در نظر گرفتن چهار جمله اول، تقریب جواب معادله دیفرانسیل (۳۶) برابر است با:

$$u(x, \lambda) \approx -\frac{1}{12}k\lambda x^4 + \tag{۳۹}$$

$$\frac{1}{6}k\lambda x^3 - \frac{k\lambda x}{12} + x - 1 +$$

$$\frac{k^2\lambda^2 x (10x^6 - 28x^5 + 35x^3 - 17)}{5040}$$

$$-\frac{1}{12}k(k+3)\lambda(x^4 - 2x^3 + x) + x - 1 +$$

$$\frac{1}{181440} \left( \begin{aligned} &181440(x-1) - 15120k(k(k+5)+7) \\ &\lambda(x^4 - 2x^3 + x) + \end{aligned} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} &k^3\lambda^3 x (-4x^9 + 14x^8 - 30x^6 + 51x^3 - 31) \\ &+ 36k^2(2k+5)\lambda^2 x (10x^6 - 28x^5 + 35x^3 - 17) \end{aligned} \right)$$

با در نظر گرفتن  $\lambda = 1$ ، روش کمترین مربعات، برای محاسبه  $k$ ، به دست می‌آوریم  $k = 1.04859$ . در شکل ۱ منحنی  $k$  برای تقریب تا مرتبه ۴ با روش تغییر پارامتر بهینه نمایش داده شده است.

در شکل ۲ مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۱ نمایش داده شده است.

در جدول ۱ مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۱ و مقادیر مختلف  $x$  آورده شده است.

**تبصره:** از نظر تئوری، لیاو و دیگران [۴۰] یک روش بهینه به نام حداقل خطای مربعی باقیمانده را برای یافتن پارامتر کنترلی بهینه در ناحیه تعریف شده معادله دیفرانسیل پیشنهاد دادند. فرض کنید  $\Delta(h)$  خطای مربعی باقیمانده باشد:

$$\Delta(h) = \int_{\Omega} (N[u_n(t)])^2 d\Omega, \tag{۳۵}$$

که

$$u_M(t) = \sum_{i=0}^M u_i(t).$$

مقدار بهینه پارامتر کمکی  $h$  با معادله جبری غیرخطی زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dh} \Delta(h) = 0.$$

در این مقاله خطای مربعی باقیمانده را در ناحیه تعریف شده برای معادله دیفرانسیل (۱) از مرتبه  $M$  به کار می‌بریم

#### ۴. کاربردها

در این بخش، روش تغییر پارامتر بهینه را برای بدست آوردن جواب عددی مسائلی همچون مساله نوسان هارمونیک مکانیک کوانتومی، مساله استورم لیوویل و مساله ابری به کار می‌بریم. تمام محاسبات و نمودارها به کمک نرم افزار ممتیکا محاسبه شده است.

**مثال ۱.** (مساله ابری) معادله

$$u''(x) - \lambda x u(x) = 0 \tag{۳۶}$$

با شرایط مرزی

$$u(0) = -1, \quad u(1) = 0 \tag{۳۷}$$

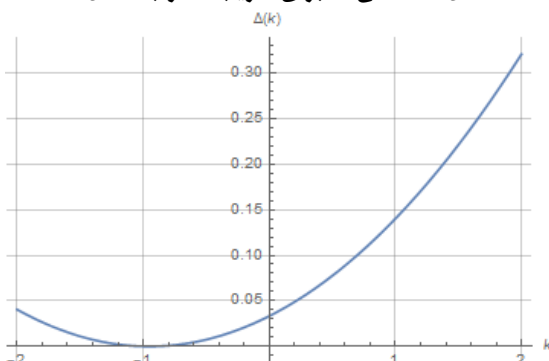
و با جواب دقیق

$$u(x, \lambda) = 1 +$$

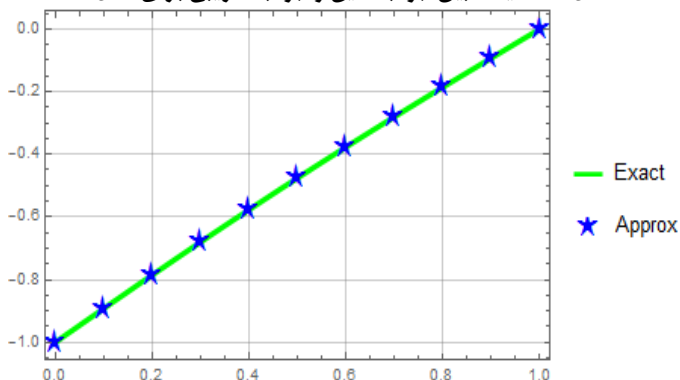
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots(3)(2)} \tag{۳۸}$$

را در نظر بگیرید. با توجه به روش بیان شده در بخش ۲ و شرط اولیه  $u_0 = x - 1$ ، و به کمک فرمول تکراری (۱۷) خواهیم داشت:

شکل ۱. منحنی  $k$  برای تقریب تا مرتبه ۴ مثال ۱



شکل ۲. مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۱.



جدول ۱. مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۱.

$x$	جواب تقریبی	جواب دقیق	خطای مطلق
0.0	-1.0	-1.0	0
0.2	-0.785283	-0.785165	0.000117627
0.4	-0.576402	-0.576333	0.0000690335
0.6	-0.376402	-0.376461	0.00005928
0.8	-0.185283	-0.185382	0.0000990116
1.0	0.0	0.0	0.0

$$u_n^\infty(t) = A_n e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x), \quad (42)$$

$$\lambda_n^\infty = 2n + 1, \\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

که  $H_n(x)$  چندجمله‌ای‌های هرमित و  $A_n$  ثابت‌های نرمال شده هستند را در نظر بگیرید. با توجه به روش بیان شده در بخش ۲ و شرط اولیه  $u_0 = x - 1$ ، و به

مثال ۲. (مساله نوسانگر هارمونیک مکانیکی کوانتومی)

معادله

$$-u''(x) + u(x)(x^2 - \lambda) = 0 \quad (40)$$

با شرایط مرزی

$$u(0) = -1, \quad u(1) = 0 \quad (41)$$

و با جواب دقیق

$$\begin{aligned}
& -x \left( \frac{k\lambda}{3} - \frac{k}{30} \right) + \frac{17k^3\lambda^2x^9}{90720} \\
& + \frac{1}{270}k^3\lambda^3x^3 - \frac{1}{360}k^3\lambda^3x^5 \\
& + \frac{1}{720}k^3\lambda^3x^6 - \frac{k^3\lambda^3x^7}{5040} - \\
& x \left( \frac{\lambda^2k^2}{45} - \frac{43\lambda k^2}{126} + \frac{431k^2}{12600} \right) \\
& - \frac{1}{60}k^2\lambda x^5 - \frac{1}{24}k^2\lambda^2x^4 + \\
& x \left( \frac{2\lambda^3k^3}{945} - \frac{649\lambda^2k^3}{14175} \right. \\
& \left. + \frac{435997\lambda k^3}{1247400} - \frac{1897657k^3}{54054000} \right) \\
& \frac{k^2x^4}{12} - \frac{29k^2x^5}{600} - \frac{k^2x^8}{672} \\
& + \frac{k^2x^9}{1440} - \frac{1}{2}k^2\lambda x^2 + \frac{29}{180}k^2\lambda x^3 \\
& - \frac{13k^2\lambda x^7}{2520} + \frac{7}{360}k^2\lambda x^6 \\
& + \frac{1}{120}k^2\lambda^2x^5 + \frac{1}{18}k^2\lambda^2x^3 \\
& \vdots
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن چهار جمله اول، تقریب جواب معادله دیفرانسیل (\*) برابر است با:

$$\begin{aligned}
u(x, \lambda) & \approx \frac{kx^5}{20} - \frac{kx^4}{12} - \frac{1}{6}k\lambda x^3 \\
& + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - x \left( \frac{k\lambda}{3} - \frac{k}{30} \right) + x - 1 + \\
& -1 + x - \frac{kx^4}{12} + \frac{kx^5}{20} + \frac{1}{2}k\lambda x^2 \\
& - \frac{1}{6}k\lambda x^3 - x \left( \frac{k\lambda}{3} - \frac{k}{30} \right) \\
& - x \left( \frac{\lambda^2k^2}{45} - \frac{43\lambda k^2}{126} + \frac{431k^2}{12600} \right) + \frac{1}{50400} \\
& \left( k^2x^2 \left( x^2 \left( \begin{aligned} & 35x^5 - 75x^4 \\ & -2436x + 4200 \end{aligned} \right) \right) - 20(1260 +
\end{aligned}$$

کمک فرمول تکراری (۱۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
u_1 & = \frac{kx^5}{20} - \frac{kx^4}{12} - \frac{1}{6}k\lambda x^3 \\
& + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - x \left( \frac{k\lambda}{3} - \frac{k}{30} \right) + x - 1, \\
u_2 & = -1 + x - \frac{kx^4}{12} + \frac{kx^5}{20} \\
& + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - \frac{1}{6}k\lambda x^3 - x \left( \frac{k\lambda}{3} - \frac{k}{30} \right) \\
& - x \left( \frac{\lambda^2k^2}{45} - \frac{43\lambda k^2}{126} + \frac{431k^2}{12600} \right) + \\
& \frac{1}{50400} \left( k^2x^2 \left( x^2 \left( \begin{aligned} & 35x^5 - 75x^4 - 2436x + 4200 \\ & -20(1260 + \\ & x(x^2(x(13x-49)+42)-406)) \end{aligned} \right) \right) \right) \\
& \left. \left( \lambda + 140\lambda^2x(3(x-5)x+20) \right) \right) \\
u_3 & = -1 + x - \frac{kx^4}{12} - \frac{k^3x^4}{12} + \\
& \frac{kx^5}{20} + \frac{11749k^3x^5}{252000} + \frac{k^3x^8}{336} \\
& - \frac{59k^3x^9}{43200} - \frac{k^3x^{12}}{88704} + \\
& \frac{k^3x^{13}}{224640} + \frac{17}{504}k^3\lambda x^5 \\
& - \frac{11749k^3\lambda x^3}{75600} + \frac{1}{2}k^3\lambda x^2 \\
& - \frac{1}{6}k\lambda x^3 + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - \\
& \frac{7}{180}k^3\lambda x^6 + \frac{767k^3\lambda x^7}{75600} \\
& - \frac{k^3\lambda x^9}{4320} + \frac{211k^3\lambda x^{10}}{907200} \\
& - \frac{59k^3\lambda x^{11}}{1108800} - \frac{85}{756}k^3\lambda^2x^3 + \\
& \frac{1}{12}k^3\lambda^2x^4 - \frac{7}{400}k^3\lambda^2x^5 \\
& + \frac{13k^3\lambda^2x^7}{7560} - \frac{11k^3\lambda^2x^8}{10080}
\end{aligned}$$

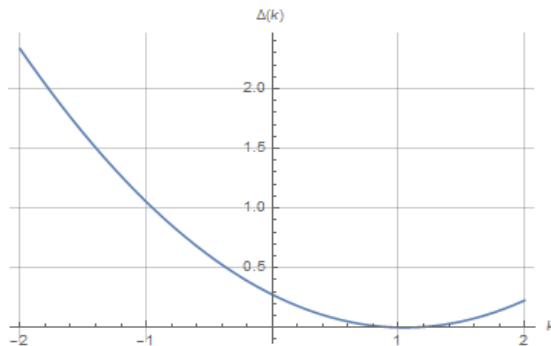


$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{60}k^2\lambda x^5 - \frac{1}{24}k^2\lambda^2x^4 \\
 & +x \left( \frac{2\lambda^3k^3}{945} - \frac{649\lambda^2k^3}{14175} + \frac{435997\lambda k^3}{1247400} - \frac{1897657k^3}{54054000} \right) \\
 & \frac{k^2x^4}{12} - \frac{29k^2x^5}{600} - \frac{k^2x^8}{672} + \\
 & \frac{k^2x^9}{1440} - \frac{1}{2}k^2\lambda x^2 + \frac{29}{180}k^2\lambda x^3 - \\
 & \frac{13k^2\lambda x^7}{2520} + \frac{7}{360}k^2\lambda x^6 + \frac{1}{120}k^2\lambda^2x^5 \text{ (۴۳)} \\
 & + \frac{1}{18}k^2\lambda^2x^3.
 \end{aligned}$$

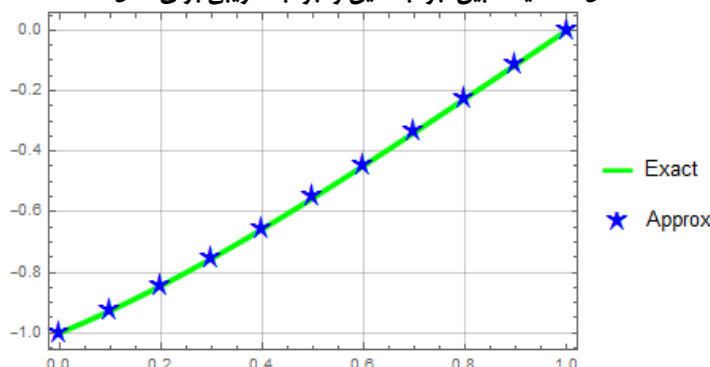
با در نظر گرفتن  $\lambda = 1$ ، روش کمترین مربعات، برای محاسبه  $k$ ، به دست می‌آوریم  $k = -0.951547$ . در شکل ۳ منحنی  $k$  برای تقریب تا مرتبه ۴ با روش تغییر پارامتر بهینه نمایش داده شده است. در شکل ۴ مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۲ نمایش داده شده است. در جدول ۲ مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۲ و مقادیر مختلف  $x$  آورده شده است.

$$\begin{aligned}
 & x \left( x^2(x(13x-49)+42)-406 \right) \lambda \Bigg) \Bigg) + \\
 & +140\lambda^2x(3(x-5)x+20) \\
 & -1+x - \frac{kx^4}{12} - \frac{k^3x^4}{12} + \frac{kx^5}{20} + \frac{11749k^3x^5}{252000} \\
 & + \frac{k^3x^8}{336} - \frac{59k^3x^9}{43200} - \frac{k^3x^{12}}{88704} + \frac{k^3x^{13}}{224640} \\
 & + \frac{17}{504}k^3\lambda x^5 - \frac{11749k^3\lambda x^3}{75600} \\
 & + \frac{1}{2}k^3\lambda x^2 - \frac{1}{6}k\lambda x^3 + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - \frac{7}{180}k^3\lambda x^6 \\
 & + \frac{767k^3\lambda x^7}{75600} - \frac{k^3\lambda x^9}{4320} + \frac{211k^3\lambda x^{10}}{907200} \\
 & - \frac{59k^3\lambda x^{11}}{1108800} - \frac{85}{756}k^3\lambda^2x^3 + \frac{1}{12}k^3\lambda^2x^4 \\
 & - \frac{7}{400}k^3\lambda^2x^5 + \frac{13k^3\lambda^2x^7}{7560} - \frac{11k^3\lambda^2x^8}{10080} \\
 & -x \left( \frac{k\lambda}{3} - \frac{k}{30} \right) + \frac{17k^3\lambda^2x^9}{90720} + \frac{1}{270}k^3\lambda^3x^3 \\
 & - \frac{1}{360}k^3\lambda^3x^5 + \frac{1}{720}k^3\lambda^3x^6 - \frac{k^3\lambda^3x^7}{5040} - \\
 & x \left( \frac{\lambda^2k^2}{45} - \frac{43\lambda k^2}{126} + \frac{431k^2}{12600} \right)
 \end{aligned}$$

شکل ۳. منحنی  $k$  برای تقریب تا مرتبه ۴ مثال ۲



شکل ۴. مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۲



جدول ۲. مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۲

$x$	جواب تقریبی	جواب دقیق	خطای مطلق
0.0	-1.0	-1.0	0
0.2	-0.843465	-0.84436	0.000894872
0.4	-0.654829	-0.656531	0.00170196
0.6	-0.444997	-0.446665	0.00166749
0.8	-0.224204	-0.22516	0.000956076
1.0	-0.112217	-0.112703	$9.71445146547012 \times 10^{-17}$

$$+x - 1 + \frac{1}{360}k^2\lambda x^2$$

$$(\lambda x (3(x - 5)x + 20) + 60(x - 3))$$

$$u_3 = -1 + x - \frac{k\lambda x}{3} + \frac{1}{2}k\lambda x^2$$

$$+ \frac{1}{2}k^3\lambda x^2 - \frac{1}{6}k\lambda x^3 - \frac{1}{6}k^3\lambda x^3$$

$$- \frac{1}{9}k^3\lambda^2 x^3 + \frac{1}{12}k^3\lambda^2 x^4 - \frac{1}{60}k^3\lambda^2 x^5$$

$$+ \frac{1}{270}k^3\lambda^3 x^3 - \frac{1}{360}k^3\lambda^3 x^5$$

$$+ \frac{1}{720}k^3\lambda^3 x^6 - \frac{k^3\lambda^3 x^7}{5040} + \frac{1}{3}k^2\lambda x$$

$$- \frac{1}{3}k^3\lambda x - \frac{1}{2}k^2\lambda x^2 + \frac{1}{6}k^2\lambda x^3$$

$$- \frac{1}{45}k^2\lambda^2 x + \frac{2}{45}k^3\lambda^2 x +$$

$$- \frac{2}{945}k^3\lambda^3 x + \frac{1}{120}k^2\lambda^2 x^5$$

$$- \frac{1}{24}k^2\lambda^2 x^4 + \frac{1}{18}k^2\lambda^2 x^3$$

⋮

مثال ۳. (مساله استورم لیوویل) معادله

$$-u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad (44)$$

با شرایط مرزی

$$u(0) = -1, \quad u(1) = 0 \quad (45)$$

و با جواب دقیق

$$u(x, \lambda) = \cot(\sqrt{\lambda}) \sin(\sqrt{\lambda}x) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (46)$$

را در نظر بگیرید. با توجه به روش بیان شده در بخش ۲

و شرط اولیه  $u_0 = x - 1$ ، و به کمک فرمول تکراری

(۱۷) خواهیم داشت:

$$u_1 = -\frac{1}{6}k\lambda x^3 +$$

$$\frac{1}{2}k\lambda x^2 - \frac{k\lambda x}{3} + x - 1,$$

$$u_2 = -x \left( \frac{k^2\lambda^2}{45} - \frac{k^2\lambda}{3} \right)$$

$$- \frac{1}{6}k\lambda x^3 + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - \frac{k\lambda x}{3}$$

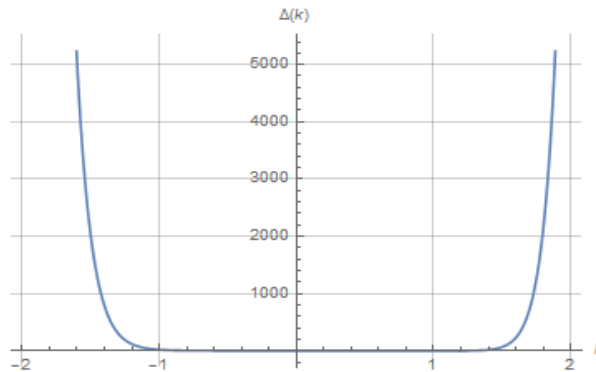
$$\frac{1}{3}k^2\lambda x - \frac{1}{3}k^3\lambda x - \frac{1}{2}k^2\lambda x^2 + \frac{1}{6}k^2\lambda x^3 - \frac{1}{45}k^2\lambda^2 x + \frac{2}{45}k^3\lambda^2 x - \frac{2}{945}k^3\lambda^3 x + \frac{1}{120}k^2\lambda^2 x^5 - \frac{1}{24}k^2\lambda^2 x^4 + \frac{1}{18}k^2\lambda^2 x^3.$$

با در نظر گرفتن  $\lambda = 1$ ، روش کمترین مربعات، برای محاسبه  $k$ ، به دست می آوریم  $k = 1.06909$ . در شکل ۵ منحنی  $k$  برای تقریب تا مرتبه ۴ با روش تغییر پارامتر بهینه نمایش داده شده است. در شکل ۶ مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۳ نمایش داده شده است. در جدول ۳ مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۳ و مقادیر مختلف  $x$  آورده شده است.

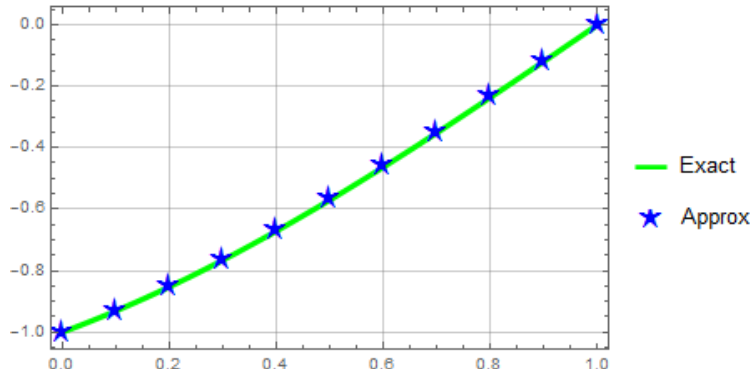
با در نظر گرفتن چهار جمله اول، تقریب جواب معادله دیفرانسیل (۴۴) برابر است با:

$$u(x, \lambda) \approx -\frac{1}{6}k\lambda x^3 + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - \frac{k\lambda x}{3} + x - 1 - x \left( \frac{k^2\lambda^2}{45} - \frac{k^2\lambda}{3} \right) - \frac{1}{6}k\lambda x^3 + \frac{1}{2}k\lambda x^2 - \frac{k\lambda x}{3} + x - 1 + \frac{1}{360}k^2\lambda x^2 (\lambda x (3(x-5)x + 20) + 60(x-3)) - 1 + x - \frac{k\lambda x}{3} + \frac{1}{2}k\lambda x^2 + \frac{1}{2}k^3\lambda x^2 - \frac{1}{6}k\lambda x^3 - \frac{1}{6}k^3\lambda x^3 - \frac{1}{9}k^3\lambda^2 x^3 + \frac{1}{12}k^3\lambda^2 x^4 - \frac{1}{60}k^3\lambda^2 x^5 + \frac{1}{270}k^3\lambda^3 x^3 - \frac{1}{360}k^3\lambda^3 x^5 + \frac{1}{720}k^3\lambda^3 x^6 - \frac{k^3\lambda^3 x^7}{5040} +$$

شکل ۵. منحنی  $k$  برای تقریب تا مرتبه ۴ مثال ۳.



شکل ۶. مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۳



جدول ۳. مقایسه بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مثال ۳

$x$	جواب تقریبی	جواب دقیق	خطای مطلق
0.0	-1.0	-1.0	0
0.2	-0.8528	-0.852502	0.000297528
0.4	-0.6704	-0.671018	0.000618358
0.6	-0.4616	-0.462783	0.00118286
0.8	-0.2352	-0.236098	0.000897663
1.0	-0.11815	-0.118642	$5.55112 \times 10^{-17}$

### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله با روش تغییر پارامتر بهینه، حل تقریبی مساله استورم-لیوویل، مساله ایری و مساله نوسانگر هارمونیک کوانتومی را به روش عددی محاسبه نمودیم. نتایج عددی و شکل‌های بدست آمده بوضوح دقت الگوریتم و همگرایی آن را منعکس می‌کند. از این روش می‌توان برای به دست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل انتگرال و دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل استفاده کرد.

- [10] Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method, vol. 60. Boston, Mass (USA): Kluwer Academic; 1994.
- [11] Adomian G. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations. *Math Comp Mod* 1990;13:17-43.
- [12] Cherruault Y, Adomian G. Decomposition method. A new proof of convergence. *Math Comp Mod* 1993;18:103.
- [13] Kaya D. Explicit and numerical solutions of some fifth-order KdV equations by decomposition method. *Appl Math Comput* 2003;144:353-63.
- [14] Siddiqi SS, Twizell EH. Spline solutions of linear sixth-order boundary value problems. *Int J Comput Math* 1996;60:295-304.
- [15] He JH. Variational iteration method-Some recent results and new interpretations. *J Comp Appl Math* 2007;207:3-17.
- [16] He JH. Variational iteration method. A kind of non-linear analytical technique, some examples. *Internat J Nonlinear Mech* 1999;34(4):699-708.
- [17] He JH. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Appl Math Comput* 2000;114(2-3):115-23.
- [18] He JH, Wu XH. Construction of solitary solution and compaction-like solution by variational iteration method. *Chas SoltonFract* 2006;29(1):108-13.
- [19] He JH. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equation. *Int J*
- [1] Cole JD. Perturbation methods in applied mathematics. Waltham (MA): Blaisdell; 1968.
- [2] Murdock JA. Perturbation: theory and methods. New York: John Wiley & Sons; 1991.
- [3] He JH. Homotopy perturbation technique. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1999;178:257-62.
- [4] He JH. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Appl Math Comput* 2003;135:73-9.
- [5] Noor MA, Mohyud-Din ST. Homotopy perturbation method for solving Thomas fermi equation using pade approximants. *Int J Nonlinear Sci* 2009;8:27-31.
- [6] Noor MA, Mohyud-Din ST. An explicit Homotopy perturbation method for solving sixth order boundary value problems. *Comput Math Appl* 2008;55:2953-72.
- [7] Zhou JK. Differential transformation and its applications for electrical circuits, Wuhan. China: Huazhong University Press; 1986 [in Chinese].
- [8] Batiha A-M, Batiha B. Differential transformation method for a reliable treatment of the nonlinear biochemical reaction model. *Adv Stud Biol* 2011;3:355-60.
- [9] Khan Y, Svoboda Z, Smarda Z. Solving certain classes of Lane-Emden type equations using the differential transformation method. *Adv Difference Eqs* 2012;2012. article 174.

- [29] Mohyud-Din ST, Noor MA, Waheed A. Modified variation of parameters method for second-order integro-differential equations and coupled systems. *World ApplSci J* 2009; 6: 1139-46.
- [30] Gangi DD, Tari Hafez, BakhshiJooybari M. Variational iteration method and homotopy perturbation method for nonlinear evolution equations. *ComputMath Appl* 2007; 54: 1018-27.
- [31] Peregrine DH. Calculations of the development of an undular bore. *J Fluid Mech* 1966;25:321-30.
- [32] Bona JL, Pritchard WG, Scott LR. Numerical schemes for a model of nonlinear dispersive waves. *J Comp Phys* 1985; 60: 167-96.
- [33] Ghaneai H, Hosseini MM. Variational iteration method with an auxiliary parameter for solving wave-like and heat-like equations in large domains. *Comput Math Appl* 2015;69 (5): 363-73.
- [34] SemaryMourad S, Hassan Hany N. A new approach for a class of nonlinear boundary value problems with multiple solutions. *J Assoc Arab Univ Basic ApplSci* 2015;17:27-35.
- [35] Zill DG, Cullen MR. *Differential equations with boundary value problems*. Cengage Learning, Brooks/Cole; 2009.
- [36] Boyce WE, DiPrima RC. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley, New York;2012.
- [37] Ramos J. On the variational iteration method and other iterative
- Mod Phys 2006;20(10):1144-99. 10.
- [20] He JH. The variational iteration method for eighth-order initial boundary value problems. *PhysScr* 2007;76(6):680-2.
- [21] Finlayson BA. *The method of weighted residuals and variational principles*. New York: Academic Press; 1972.
- [22] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Auth JZ. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann; 2013.
- [23] Ma WX, You Y. Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions. *Trans Am Math Soc* 2004;357:1753-78.
- [24] Ma WX, You Y. Rational solutions of the Toda lattice equation in Casoratian form. *Chaos, Solitons Fractals* 2004;22:395-406.
- [25] Ma WX, Wu HY, He JS. Partial differential equations possess in Frobeniointegrable decompositions. *PhysLett A* 2007;364:29-32.
- [26] Noor MA, Mohyud-Din ST, Waheed A. Variation of parameters method for solving fifth-order boundary value problems. *Appl Math InfSci*2008;2:135-41.
- [27] Mohyud-Din ST, Noor MA, Waheed A. Variation of parameter method for solving sixth-order boundary value problems. *Commun Korean Math Soc*2009;24:605-15.
- [28] Mohyud-Din ST, Noor MA, Waheed A. Variation of parameter method for initial and boundary value problems. *World ApplSci J* 2010;11:622-39.

techniques for nonlinear differential equations. *Appl Math Comput* 2008; 199: 39-69.

[38] Hosseini MM, Mohyud-Din ST, Ghaneai H, Usman M. Auxiliary parameter in the variational iteration method and its optimal determination. *Int J Nonlinear Sci Numer Simul* 2010;11(7):495-502.

[39] Hosseini SMM, Mohyud-Din ST, Ghaneai H. Variational iteration method for nonlinear Age-Structured population models using auxiliary parameter. *Zeitschrift für Naturforschung* 2010;65(12):1137-42.

[40] Liao, S. J. (1992). The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems (Doctoral dissertation, Ph. D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University)

