

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دوم، شماره هشتم، زمستان ۱۳۹۵

شماره شاپا: ۱۹۶-۰۱۶۸۲



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

الگوریتمی ساده برای حل عددی معادله انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف

محمد ادبی تبار فیروزجاء^۱، بهرام عاقلی^{۲*}

^(۲،۱) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائمشهر، قائمشهر، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۶/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۱۲

چکیده

روش‌های زیادی برای حل عددی معادلات انتگرال وجود دارد. در این مقاله یک روش عددی ساده با استفاده از تبدیل فازی، برای حل عددی معادله انتگرال با هسته منفرد ضعیف ارائه شده است. در پایان نیز با ارائه سه مثال موثر بودن روش پیشنهادی بررسی گردید. در تمامی محاسبات و نمودارها از نرم افزار متمتیکا استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: معادله انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف؛ تبدیل فازی؛ توابع پایه‌ای.

۱. مقدمه

در این مقاله از روش تبدیلات مثلثی فازی برای پیدا کردن جواب عددی معادله انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف:

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \frac{x^{\mu-1}}{t^\mu} u(x) dx, \quad (1.1)$$

که $\mu > 1$ و $t \in [0, T]$ استفاده شده است.

در شاخه‌های مختلف مهندسی و علوم شیمی و زیست‌شناسی و فیزیک کاربردهای این معادله انتگرال توسط نویسندگان زیادی ارائه شده است [2-10]. توان $\mu < 1$ در [4] نشان داده شده است که مجموعه جواب‌های متناهی وجود دارد وقتی که $f(x)$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است. این معادله با روش‌های دیگری از جمله روش ضرب انتگرالی [8] و روش کالوکیشن از نوع هرمیت [6] و [5-8] نیز حل شده است.

تبدیلات فازی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل معادلات دیفرانسیل فازی و مسایل مقدار اولیه توسط محققین در [9-11] به کار گرفته شده است.

ساختار این مقاله به صورت زیر است:

در بخش ۲، تبدیل و افراز فازی و برخی قضایا و خواص آن بیان شده است.

روش پیشنهادی در بخش ۳، ارائه گردیده است. در بخش ۴، مثال‌های عددی برای حل معادلات انتگرال با هسته منفرد ضعیف به فرم $(1,1)$ ، با روش جدید ارائه گردید. در انتها، نتیجه‌گیری در بخش ۵، بیان گردید.

۲. تبدیلات و افراز فازی

در این بخش تبدیلات و افراز فازی و برخی قضایا و خواص آن بیان می‌شود.

تعریف ۱-۲ فرض کنید [12]

$$t_1 = a < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

برای $n \geq 2$ گره‌ها باشند، مجموعه فازی B_1, B_2, \dots

و B_n با توابع عضویت $B_1(t), \dots, B_n(t)$ روی فاصله $[a, b]$ ، یک افراز فازی از $[a, b]$ هستند هرگاه:

(۱) توابع B_K از $[a, b]$ به $[0, 1]$ پیوسته هستند و $B_K(t_k) = 1$ و برای هر t متعلق به $[a, b]$:

$$\sum_{k=1}^n B_K(t) = 1$$

(۲) اگر $t \notin (t_{k-1}, t_{k+1})$ با $t_0 = a$ و $t_{n+1} = b$ آن گاه $B_K(t) = 0$.

(۳) $B_k(t)$ برای $k = 2, \dots, n$ روی فاصله $[t_{k-1}, t_k]$ نزولی و برای $k = 1, \dots, n-1$ روی $[t_k, t_{k+1}]$ صعودی هستند.

توابع عضویت B_1, B_2, \dots و B_n توابع پایه‌ای نامیده می‌شوند. توابع پایه‌ای با تابع عضویت مثلثی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t-t_1}{h_1}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{سایر} \end{cases}$$

$$B_k(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{k-1}}{h_{k-1}}, & t_{k-1} \leq t \leq t_k \\ 0, & \text{سایر} \end{cases}$$

$$B_n(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{n-1}}{h_{n-1}}, & t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ 0, & \text{سایر} \end{cases}$$

$$h_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, \dots, n-1$$

افراز فازی $[a, b]$ را برای $k = 1, \dots, n-1$ ، یکنواخت گویند اگر $\frac{b-a}{n-1} = h$ و $t_{k+1} - t_k = h$ و دو

خاصیت زیر نیز برقرار باشد:

(۴) برای هر $x \in [0, h]$ با $k = 2, \dots, n-1$ داشته باشیم $B_K(t_k - t) = B_K(t_k + t)$.

(۵) برای هر $x \in [t, t]$ و $k = 2, \dots, n-1$ داشته باشیم:

که C_1, C_2, \dots, C_n و اعداد حقیقی دلخواه و $f \in L_2([a, b], B_1, \dots, B_n)$ هستند [۷]. لذا با

$$\|f\|_k = \sqrt{\int_{t_{k-1}}^{t_k} f^2(t) B_k(t) dt}, K = 1, 2, \dots, n$$

و فاصله متریک $d_k(f, g) = \|f - g\|_k$ مؤلفه‌های F_1, F_2, \dots, F_n از تبدیل فازی، نسبت به پارامترهای C_1, C_2, \dots, C_n ، مجموع مربعات $\sum_{k=1}^n d_k^2(f, c, k)$ را مینیمم می‌کند [12].

۳. روش تبدیل فازی

در قضیه ۹.۲، اگر $u \in L_2([a, b], B_1, B_2, \dots, B_n)$ جواب عددی ۱.۱ با تبدیل فازی تابع پایه‌ای به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_{BFT}(t) = \sum_{i=1}^n u_i B_i(t). \quad (3.1)$$

بنابراین با توجه به تعاریف و لم‌های بیان شده در بخش ۱.۲، انتگرال برای تقریب تابع ۱.۳ و خطای تقریب انتگرال در این بخش ارائه شده است. قضیه ۱.۳، اگر $u \in L_2([a, b], B_1, B_2, \dots, B_n)$ آنگاه تقریب تابع u با تبدیل فازی پایه‌ای (BFT) به صورت زیر است:

$$I(u_{BFT}(t)) = u_1 I(B_1(t)) + \sum_{i=2}^{n-1} u_i I(B_i(t)) + u_n I(B_n(t))$$

که

$$I(B_i(t)) = \int_0^t \frac{x^{\mu-1}}{t^\mu} B_i(x) dx, \quad (3.2)$$

$$i = 1, \dots, n$$

برهان.

$$I(u_{BFT}) = I\left(\sum_{i=1}^n u_i B_i(t)\right) = \sum_{i=1}^n u_i I(B_i(t))$$

$$B_K(t) = B_{K-1}(t-h)$$

$$B_{K+1}(t) = B_K(t-h).$$

تعریف ۵.۲. فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n توابع پایه‌ای بشند و تابع f تابعی از $C([a, b])$ باشد [۷]. n تایی $[F_1, F_2, \dots, F_n]$ به صورت

$$F_K = \frac{\int_a^b f(t) B_k(t) dt}{\int_a^b B_k(t) dt}, \quad = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

تبدیل فازی (تبدیل F) از تابع f نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $[F_1, F_2, \dots, F_n]$ ، تبدیل F از تابع f باشد [۷]. آن گاه

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n F_k B_k(t)$$

تبدیل معکوس F از تابع f روی فاصله $[a, b]$ نامیده می‌شود.

قضیه ۷.۲. فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n توابع پایه‌ای از افراز فازی فاصله $[a, b]$ و f تابع پیوسته روی آن باشد. آن گاه، K امین مؤلفه از انتگرال تبدیل فازی روی $[f(a), f(b)]$ ، مینیمم مقدارش از تابع

$$Q(u) = \int_a^b (f(t) - u)^2 B_K(t) dt$$

می‌گیرد [12].

لم ۸.۲. فرض کنید f یک تابع پیوسته روی $[a, b]$ باشد [12]. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ ، n_ε و افراز فازی $B_1, B_2, \dots, B_{n_\varepsilon}$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in [a, b]$

$$|f(t) - f_{n_\varepsilon}(t)| \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

قضیه ۹.۲. فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n توابع پایه‌ای و

$$FT(B_1, \dots, B_n) = \left\{ g(t) \mid g(t) = \sum_{i=1}^n C_i B_i(t) \right\} \quad (2.4)$$

فرض می‌کنیم.

$$p_k(t) = I(B_k(t)).$$

لذا برای هر $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ، $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$u_k B_k(t) + u_{k+1} B_{k+1}(t) - u_k P_k(t) - u_{k+1} P_{k+1}(t) = u(t). \quad (3.7)$$

با جایگزین کردن $t = t_k$ برای $k = 1, 2, \dots, n-1$ و $t = t_{k+1}$ برای $k = n-1$ ، دستگاه معادلات (۳.۸) به دست می‌آید، که $f_i = f(t_i)$ و $p_{ij} = p_i(t_j)$ قضیه ۳.۳ اگر

$$A_n = 1 - p_{nn} + \frac{p_{n-1n} p_{nn-1}}{1 + p_{n-1n-1}}$$

آنگاه دستگاه معادلات (۳.۸) دارای جوابی منحصر به فرد است.

برهان: چون $B_k(t) \geq 0$ و $k = 1, 2, 3, \dots, n$ لذا $1 + p_k(t) \neq 0$ و $p_k(t) = I(B_k(t)) \geq 0$ به کمک عملیات سطری مقدماتی دستگاه معادلات (۳.۸) به دستگاه (۳.۹) تبدیل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1-p_{11} & p_{21} & \circ & \circ \\ \circ & 1-p_{22} & p_{32} & \circ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & 1-p_{n-1n-1} \\ \circ & \dots & \circ & p_{nn-1} \\ \circ & \dots & \circ & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} 1-p_{11} & p_{21} & \circ & \circ \\ \circ & 1-p_{22} & p_{32} & \circ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & 1-p_{n-1n-1} \\ \circ & \dots & \circ & p_{nn-1} \\ \circ & \dots & \circ & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

که $D_n = f_n - \frac{p_{n-1n} f_{n-1}}{1 + p_{n-1n-1}}$

بنابراین دستگاه بالا مثلثی، غیرمنفرد است.

الگوریتم سریع برای حل عددی برای n افزاز با تبدیل فازی

$$= u_1 I(B_1(t)) + u_n I(B_n(t)) + \sum_{i=2}^{n-1} u_i I(B_i(t)).$$

قضیه ۲.۳. فرض کنید [12]:

$$u(t) \approx u_{BFT}(t) \quad (3.3)$$

$$|u(t) - u_{BFT}(t)| < \varepsilon$$

آن گاه

$$|I(u(t)) - I(u_{BFT}(t))| \leq \alpha \quad (3.4)$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{\varepsilon}{\mu} < \alpha.$$

برهان.

$$|I(u(t)) - I(u_{BFT}(t))| = \left| \int_0^t \frac{x^{\mu-1}}{t^\mu} u(x) dx - \int_0^t \frac{x^{\mu-1}}{t^\mu} u_{BFT}(x) dx \right| \leq \int_0^t \frac{x^{\mu-1}}{t^\mu} |u(t) - u_{BFT}(t)| dx < \int_0^t \frac{x^{\mu-1}}{t^\mu} \varepsilon dx = \varepsilon \int_0^t \frac{x^{\mu-1}}{t^\mu} dx = \frac{\varepsilon}{\mu} < \alpha.$$

برای محاسبه جواب عددی (1.1)، کافی است u_i ها برای $i = 1, 2, \dots, n$ را بیابیم. لذا کافی است معادله زیر را حل کنیم:

$$u_{BFT}(t) = f(t) + I(u_{BFT}(t)) \quad (3.5)$$

$\mu > 1$ ، $t \in [0, T]$

به کمک (3.1)، نتیجه به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_{k=1}^n u_k B_k(t) = f(t) + I\left(\sum_{k=1}^n u_k B_k(t)\right), \quad a \leq t \leq b \quad (3.6)$$

یا:

$$\sum_{k=1}^n u_k B_k(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n u_k I(B_k(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

$$u_k = \frac{f_k - p_{k+1}(t_k)u_{k+1}}{1 + p_k(t_k)}.$$

گام ششم. حل عددی برابر است با

$$u_{BFT}(t) = \sum_{i=1}^n u_i B_i(t).$$

۴. کاربردها

در این بخش با استفاده از تبدیل مثلثی فازی جواب عددی معادله انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف را برای سه مثال به کار می‌بریم. تمام محاسبات و نمودارها به کمک نرم افزار ممتیکا محاسبه شده است. مثال ۱. معادله انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف زیر را در نظر بگیرید:

$$u(t) - \int_0^t \frac{x^{\mu-1} u(x)}{t^\mu} dx = t+1, \quad t \in [0, 1].$$

با توجه به گام‌های ۱ تا ۵ با حل دستگاه معادلات، مقادیر F_k برای $(k = 1, \dots, 6)$ برابرند با

$$\begin{aligned} u(1) &= 1.11111, u(2) = 1.33111, \\ u(3) &= 1.55111, u(4) = 1.77111, \\ u(5) &= 1.99111, u(6) = 2.21111. \end{aligned}$$

جواب عددی به دست آمده، با جواب دقیق $u(t) = \frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu+1}{\mu} t$ برای $\mu = 10$ مطابقت دارد. در جدول ۱ جواب عددی برای t های مختلف آورده شده است.

شکل ۱، تقریب با روش تبدیل مثلثی فازی برای مقادیر مختلف $0 \leq t \leq 1$ را نمایش می‌دهد.

گام اول. فاصله $[a, b]$ را به $n-1$ قسمت سلولی تقسیم می‌کنیم.

$$h \leftarrow \frac{b-a}{n-1}$$

$$(k = 1, \dots, n) \quad t_k \leftarrow a + (k-1)h$$

گام دوم. برای $k = 1, 2, \dots, n$ ، توابع پایه‌ای فازی انتخاب شوند.

گام سوم. قرار دهید.

$$p_k(t_k) \leftarrow I(B_k(t_k))$$

برای $k = 1, 2, \dots, n$

$$p_k(t_{k+1}) \leftarrow I(B_k(t_{k+1}))$$

برای $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$p_{k+1}(t_k) \leftarrow I(B_{k+1}(t_k))$$

برای $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$f_k \leftarrow f(t_k)$$

برای $k = 1, 2, \dots, n-1$

گام چهارم. فرض کنید

$$A_n \leftarrow 1 - p_n(t_n) + \frac{p_{n-1}(t_n)p_n(t_{n-1})}{1 + p_{n-1}(t_{n-1})}$$

$$D_n \leftarrow f(t_n) - \frac{p_{n-1}(t_n)f(t_{n-1})}{1 + p_{n-1}(t_{n-1})}$$

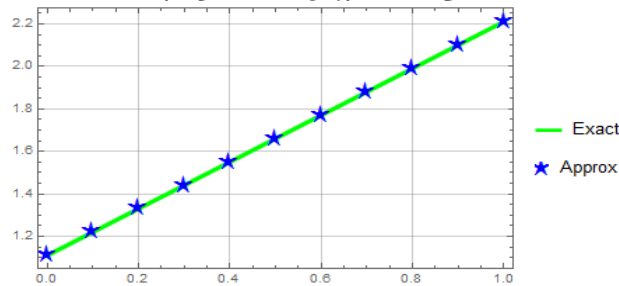
گام پنجم. قرار دهید $u_n = \frac{D_n}{A_n}$ و برای

$$k = n-1, n-2, \dots, 1$$

جدول ۱. نتایج عددی مثال ۱

t	جواب تقریبی	جواب دقیق	خطای مطلق
0.0	1.11111	1.11111	0.0
0.4	1.55111	1.55111	2.22045×10^{-16}
0.8	1.99111	1.99111	4.44089×10^{-16}
1.0	2.21111	2.21111	4.44089×10^{-16}

شکل ۱. نتایج عددی با روش تبدیل مثلثی فازی مثال ۱



مثال ۳. در این مثال، معادله انتگرال ولترای با هسته منفرد ضعیف زیر را در نظر بگیرید:

$$u(t) - \int_0^t \frac{x^{\mu-1} u(x)}{t^\mu} dx = t^2 + t + 1, \quad t \in [0, 1].$$

با توجه به الگوریتم روش تبدیل مثلثی فازی، با اجرای گام‌های ۱ تا ۵، مقادیر F_k برای $(k = 1, \dots, 6)$ با حل دستگاه معادلات برابرند با

$$\begin{aligned} u(1) &= 1.11111, u(2) = 1.37511, \\ u(3) &= 1.72624, u(4) = 2.16453, \\ u(5) &= 2.69003, u(6) = 3.30278. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $\mu = 10$ جواب عددی به دست آمده، جواب دقیق

$$u(t) = \frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu+2}{\mu+1} t^2 + \frac{\mu+1}{\mu} t$$

و جواب عددی به دست آمده مشابه هستند. در جدول ۳ جواب عددی برای t های مختلف آورده شده است.

مثال ۲. در این مثال، معادله انتگرال ولترای دیگری با هسته منفرد ضعیف زیر را در نظر بگیرید:

$$u(t) - \int_0^t \frac{x^{\mu-1} u(x)}{t^\mu} dx = 1 + \frac{(\mu+1)^2 t^2}{\mu(\mu+2)}, \quad t \in [0, 1].$$

با توجه به الگوریتم روش پیشنهادی، با اجرای گام‌های ۱ تا ۵ و حل دستگاه معادلات، مقادیر u_k برای $(k = 1, \dots, 6)$ برابرند با

$$\begin{aligned} u(1) &= 1.11111, u(2) = 1.15548, \\ u(3) &= 1.2877, u(4) = 1.50781, \\ u(5) &= 1.81585, u(6) = 2.21188. \end{aligned}$$

برای $\mu = 10$ جواب عددی به دست آمده، منطبق بر جواب دقیق $u(t) = \frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu+1}{\mu} t^2$ است. در

جدول ۲ جواب عددی برای t های مختلف آورده شده است.

تقریب با روش تبدیل مثلثی فازی برای مقادیر مختلف $0 \leq t \leq 1$ در شکل ۲، نمایش داده شده است.

جدول ۲. نتایج عددی مثال ۲

t	جواب تقریبی	جواب دقیق	خطای مطلق
0.0	1.11111	1.11111	0.0
0.4	1.2877	1.28711	0.000588968
0.8	1.81585	1.81511	0.000742453
1.0	2.21188	2.21111	0.000767099

جدول ۳. نتایج عددی مثال ۳

t	جواب تقریبی	جواب دقیق	خطای مطلق
0.0	1.11111	1.11111	0.0
0.4	1.72624	1.72566	0.00051×10^{-16}
0.8	2.69003	2.68929	0.00037×10^{-16}
1.0	3.30278	3.30202	0.00759×10^{-16}

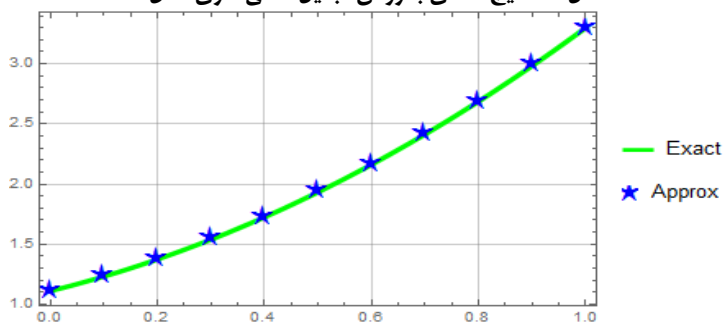
روش پیشنهادی این است که با الگوریتمی ساده، جواب عددی مناسب و منطبق بر جواب دقیق ارائه می‌کند. مثال‌ها و نتایج ارائه شده در بخش قبل بیانگر این ادعا است. نویسندگان این مقاله در تلاش هستند تا این روش را برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال، معادلات دیفرانسیل انتگرال و معادلات دیفرانسیل به کار گیرند.

شکل ۳، نمایش تقریب با روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف $0 \leq t \leq 1$ است.

نتیجه‌گیری

روش تبدیل مثلثی فازی، برای حل معادله انتگرال ولترای دیگری با هسته منفرد ضعیف به کار گرفته شد. مزیت

شکل ۳. نتایج عددی با روش تبدیل مثلثی فازی مثال ۳



- [9] W. Lamb, A spectral approach to an integral equation, *Glasgow Math. J.*, 26, (1985) 83–89.
- [10] A. Saadatmandi and M. Dehghan, Variational iteration method for solving a generalized pantograph equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 58 (2009) 2190–2196.
- [11] M. Dehghan and F. Shakeri, The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, *Phys. Scr.* 78 (2008) 065004.
- [12] Khastan, A., Perfilieva, I., & Alijani, Z. (2016). A new fuzzy approximation method to Cauchy problems by fuzzy transform. *Fuzzy Sets and Systems*, 288, 75-95.
- [1] Yu, F., Feng, L., & Li, L. (2017). Darboux transformations for super-Schrödinger equation, super-Dirac equation and their exact solutions. *Nonlinear Dynamics*, 1-15.
- [2] A.M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*, HEP and Springer, Beijing and Berlin, 2011.
- [3] A.M. Wazwaz, *A First Course in Integral Equations*, World Scientific, Singapore, 1997.
- [4] W. Han, Existence, uniqueness and smoothness results for second-kind Volterra equations with weakly singular kernel, *J. Integral Equations and Applications*, 6(3) (1994) 365–384.
- [5] T. Diogo, N. Ford, P. Lima, S. Thomas, Solution of a singular integral equation by a split-interval method, *Int. J. Numer. Analys. Modelling*, 4(1) (2007) 63–73.
- [6] T. Diogo, P. Lima, Collocation solutions of a weakly singular Volterra integral equation, *TEMA Trend. Mat. Appl. Comput.*, 8(2) (2007) 229–238.
- [7] T. Diogo, N.J. Ford, P. Lima, S. Valtcheva, Numerical methods for a Volterra integral equation with non-smooth solutions, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 189 (2006) 412-423.
- [8] F. Geng, F. Shen, Solving a Volterra integral equation with weakly singular kernel in the reproducing kernel space, *Mathematical Analysis*, 4(2) (2010) 159–170.