دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دوازدهم، زمستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

وجود جواب بهینه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل در فضای هیلبرت

زینب سلطانی [*]

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۰۷   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۰/۲۰

چکیده

در این مقاله وجود جواب بهینه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بررسی می‌کنیم

$$(1) \qquad y' = Ay(t) + f(t, y(t)) \qquad t \in J = [0,T] \qquad y(t_0) = y_2,$$

$$(2) \qquad y' = Ay(t) + g(t, y(t)) \qquad t \in J = [0,T] \qquad y(t_0) = y_1.$$

که $f, g : J \times H \to H$ ، $\{A(t)\}_{t\in J}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی در فضای هیلبرت H باشد و $y_1, y_2 \in H$.

هدف یافتن زوج (x, y) به‌طوری‌که x و y به ترتیب جواب معادلات دیفرانسیل (۱) و (۲) هستند و $\|x - y\| = \|y_1 - y_2\|$.

زوج (x, y) جواب بهینه دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق نامیده می‌شود. تحت شرایط مناسب بر روی f ، g و خانواده عملگرهای خطی $\{A(t)\}_{t\in J}$، نتایج وجود جواب بهینه، با به کارگیری قضایای نقاط بهترین تقریب برای معادله انتگرالی معادل با دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق به دست می‌آید.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل، دستگاه تکامل انقباضی، نقاط بهترین تقریب، فضای هیلبرت.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: z.soltani@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

قضیه انقباضی باناخ یک ابزار قوی در آنالیز غیرخطی و معادلات دیفرانسیل است که بیان می‌کند هر نگاشت انقباضی خود نگاشت T روی فضای متریک دارای نقطه ثابت یکتاست. در حالتی که نگاشت T خود نگاشت نباشد، کرک [۱۱] قضیه انقباضی باناخ را به صورت زیر گسترش داد:

قضیه ۱. [۱۳] فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های غیرتهی و بسته از فضای متریک (M,d) باشند. فرض کنید $T: A\cup B \to A\cup B$ یک نگاشت دوری باشد یعنی $T(A)\subset B$ و $T(B)\subset A$ و $k\in(0,1)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x\in A$ و $y\in B$

$$d(T(x),T(y)) < kd(x,y). \quad (3)$$

دراین‌صورت T دارای نقطه ثابت یکتا در $A\cap B$ است.

اردال و ویرامانی [۶] شرط (۳) برای نگاشت‌های دوری را تعدیل و مفهوم نگاشت انقباضی دوری را به صورت زیر معرفی کردند:

تعریف ۱. [۶] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A و B زیرمجموعه غیرتهی از فضای X باشد. دراین‌صورت نگاشت $T: A\cup B\to A\cup B$ را یک نگاشت انقباضی دوری گویند هرگاه

(i) $T(A)\subset B$ و $T(B)\subset A$

(ii) $k\in(0,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in A$ و $y\in B$

$$d(T(x),T(y)) < kd(x,y)+(1-k)d(A,B),$$

که

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A, y\in B\}.$$

نقطه $x\in A\cup B$ یک نقطه بهترین تقریب برای نگاشت دوری T نامیده می‌شود اگر

$$d(x,f(x))=d(A,B).$$

اردال و ویرامانی نتایجی از نقاط بهترین تقریب برای نگاشت‌های دوری در فضای به‌طور یکنواخت محدب ارائه نمودند.

در [۱۳] سوزوکی مفهوم خاصیت UC را معرفی و وجود نقطه بهترین تقریب را برای نگاشت‌های دوری در فضای متریک همراه با خاصیت UC را اثبات نمود.

تعریف ۲. [۱۳] فرض کنید A و B دو زیرمجموعه غیرتهی از فضای متریک (X,d) باشند. گوییم زوج (A,B) دارای خاصیت UC است اگر $\{x_n\}$ و $\{x'_n\}$ دنباله‌هایی در A و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در B باشد به‌طوری‌که اگر $\lim_n d(x_n,y_n)=d(A,B)$ و $\lim_n d(x'_n,y_n)=d(A,B)$، آن‌گاه

$$\lim_n d(x_n,x'_n)=0.$$

نکته ۱. توجه کنید اگر X فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب باشد آن‌گاه هر زوج از زیرمجموعه‌های غیرتهی A,B به‌طوری‌که A محدب باشد دارای خاصیت UC است.

قضیه ۲. [۱۳] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک، A و B زیرمجموعه‌های غیرتهی از X باشد به‌طوری‌که (A,B) دارای خاصیت UC است. فرض کنید A کامل است و $T: A\cup B\to A\cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری است. دراین‌صورت نگاشت T دارای نقطه بهترین تقریب x در A است، یعنی $d(x,Tx)=d(A,B)$. به‌علاوه $T(x)$ نقطه بهترین تقریب در B است و نقطه x نقطه ثابت نگاشت T^2 می‌باشد.

در سال‌های اخیر نویسندگان زیادی وجود نقاط بهترین تقریب را برای نگاشت‌های تک مقداری تحت برخی شرایط انقباضی خاص مطالعه نمودند، برای جزئیات بیشتر می‌توان مراجع [۱–۵، ۷، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۳] را دید.

در سال ۲۰۱۴، ویرامانی و راجش در [۱۴]، دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را معرفی نمودند:

$$(4)\ \ y'\in f(t,y(t)) \qquad y(t_0)=y_2,$$

$$(5)\ \ y'\in g(t,y(t)) \qquad y(t_0)=y_1.$$

که f و g توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی

$$S = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \le a, \; |y - y_0| \le b\}$$

برای $a,b>0$، $(t_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$(t,y_1),(t,y_2) \in S$ ویرامانی و راجش وجود زوج (x,y) را تحت شرایط مناسب بر روی f و g بررسی کردند به‌طوری‌که x و y به ترتیب جواب معادلات دیفرانسیل (۴) و (۵) هستند و $\|x-y\| = \|y_1 - y_2\|$.
زوج (x,y) جواب بهینه دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق نامیده می‌شود. ویرامانی و راجش با استفاده از قضایای بهترین تقریب، وجود جواب بهینه را برای این دستگاه معادلات دیفرانسیل اثبات نمودند.
اکنون دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در فضای هیلبرت H در نظر می‌گیریم:

$$y' = Ay(t) + f(t, y(t))$$
$$t \in J = [0,T] \quad y(t_0) = y_2,$$
$$y' = Ay(t) + g(t, y(t))$$
$$t \in J = [0,T] \qquad y(t_0) = y_1.$$

که $f,g : J \times H \to H$، $\{A(t)\}_{t\in J}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی در فضای هیلبرت H باشد و $y_1, y_2 \in H$.
در این مقاله با استفاده از قضیه بهترین تقریب ارائه شده توسط سوزوکی وجود جواب بهینه را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل بالا اثبات می‌کنیم. ابتدا به بیان تعریفات و مفاهیم اولیه مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۳. فرض کنید $(H, <.,.>)$ یک فضای هیلبرت با نرم $\|.\|$ باشد. فرض کنید $C(J,H)$ نشان دهنده فضای باناخ
توابع پیوسته $y : J \to H$ مجهز به نرم استاندارد $\|y\|_{C(J,H)} := sup_{t\in J} |y(t)|$ باشد.
در فضای (Ω, Σ, μ)، $L^1(\Omega, H)$ نشان‌دهنده فضای باناخ توابع انتگرال‌پذیر بوخنر $y : \Omega \to H$ است یعنی $y \in L^1(\Omega, H)$ به شرط اینکه y اندازه پذیر است و

$$\|y\|_{L^1(\Omega,H)} := \int_\Omega |y(x)|\, d\mu(x) < \infty$$

۲- نتایج مهم

در این بخش، وجود جواب بهینه را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه شده در (۱) و (۲) بررسی می‌کنیم. ابتدا تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۴. خانواده دو پارامتری $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ که

$$\Delta = \{(t,s) \in [0,b] \times [0,b] : 0 \le s \le t \le b\},$$

یک دستگاه تکامل انقباضی نامیده می‌شود اگر برای هر $(t,s) \in \Delta$، $U(t,s) : H \to H$ یک عملگر کراندار باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند

(i) برای هر $s \in [0,b]$، $U(s,s) = I$
و برای هر $0 \le s \le t \le b$،

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$$

(ii) برای هر $0 \le s \le t \le b$، نگاشت $(t,s) \to U(t,s)$ روی H قویاً پیوسته است.

(iii) برای هر $0 \le s \le t \le b$،

$$\|U(s,t)\|_H \le 1.$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه شده در (۱) و (۲)، مجموعه A را به صورت:

$$A = \{y \in C(J,H) : y(0) = y_1\}$$

و مجموعه B را به صورت:

$$B = \{y \in C(J,H) : y(0) = y_2\}$$

تعریف می‌کنیم. برای هر $y \in A$ و $z \in B$ داریم

$$\|y - z\| \ge \|y_1 - y_2\|$$

بنابراین $d(A,B) = \|y_1 - y_2\|$ که

$$d(A,B) = \inf\{\|y - z\|, y \in A, z \in B\}$$

تابع $T : A \cup B \to C(J,H)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای $y \in A$ و $t \in J$

$$T(y) := U(t,0)y_2 + \int_0^t U(t,s) g(s, y(s)) ds,$$

و برای $z \in B$ و $t \in J$

$$T(z) := U(t,0)y_1 + \int_0^t U(t,s) f(s, z(s)) ds,$$

به آسانی می‌توان دید $T(A) \subset B$ و $T(B) \subset A$.
حال تحت شرایط خاص روی توابع f، g و عملگر

خطی A، وجود نقطه $x \in A$ را بررسی می‌کنیم به‌طوری‌که $d(x,T(x)) = d(A,B)$ که زوج $(x,T(x))$ جواب بهینه برای دستگاه معادلات ارائه شده در (۱) و (۲) است.

قضیه ۳: فرض کنید H یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر باشد. فرض کنید نگاشت‌های $f,g : J \times H \to H$ در شرایط زیر صدق کنند

$(\mathcal{A}_1)$ توابع f و g نسبت به متغیر اول اندازه‌پذیر و نسبت به متغیر دوم پیوسته باشند.

$(\mathcal{A}_2)$ تابع $l \in L^1(J,[0,\infty))$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$d(f(t,z),g(t,y)) \le l(t)(\|y-z\| - \|y_1 - y_2\|)$$

برای هر $t \in J$، $y \in A$ و $z \in B$.

$(\mathcal{A}_3)$ روی خانواده عملگرهای خطی $\{A(t)\}_{t\in[0,b]}$ فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

عملگر خطی $A(t) : D(A) \subseteq H \to H$، که $D(A)$ مستقل از $t \in [0,b]$ و در H چگال است.

خانواده عملگرهای خطی $\{A(t)\}_{t\in[0,b]}$ مولد یک دستگاه تکامل انقباضی $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ روی فضای هیلبرت H است.

در این صورت $x \in A \cup B$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x,Tx) = d(A,B)$. بنابراین زوج $(x,T(x))$ جواب بهینه برای دستگاه معادلات ارائه شده در (۱) و (۲) است.

اثبات: ابتدا به وضوح داریم که A یک مجموعه محدب و کامل است. به‌علاوه فضای H فضای هیلبرت است بنابراین یک
فضای باناخ یکنواخت محدب است بنابراین براساس گزاره ۲۳،۳ از [۹] و نکته ۱ زوج (A,B) دارای خاصیت UC است.

اکنون ثابت می‌کنیم T یک نگاشت انقباضی دوری است.

$$\begin{aligned}
\|T(y)-T(z)\| &\le \|U(t,0)\| \|y_1 - y_2\| \\
&\quad + \int_0^t \|U(t,s)\| \|g(s,y(s)) - f(s,z(s))\| ds \\
&\le \|y_1 - y_2\| \\
&\quad + \int_0^t l(s)(\|y-z\| - \|y_1 - y_2\|) ds \\
&\le \|y_1 - y_2\| \\
&\quad + \int_0^t l(s)(e^{\tau L(s)} e^{-\tau L(s)} \|y-z\| \\
&\quad - e^{\tau L(s)} \|y_1 - y_2\|) \\
&\le \|y_1 - y_2\| \\
&\quad + \frac{1}{\tau}(\|y-z\|_1 - \|y_1 - y_2\|) \int_0^t (e^{\tau L(s)})' ds \\
&\le \|y_1 - y_2\| \\
&\quad + \frac{1}{\tau} e^{\tau L(s)} (\|y-z\|_1 - \|y_1 - y_2\|)
\end{aligned}$$

که $L(t) = \int_0^t l(s) ds, t \in [t_0, T]$ و

$$\|y\|_1 = \sup\{e^{-\tau L(s)} \|y(t)\| \mid t \in [0,T]\}, \quad \tau > 1$$

دراین‌صورت

$$\|T(y)-T(z)\|_1 \le \frac{1}{\tau}\|y-z\|_1 - (1-\frac{1}{\tau})\|y_1 - y_2\|.$$

پس

$$\|T(y)-T(z)\| \le k\|y-z\|_1 - (1-k)\|y_1 - y_2\|,$$

که $k = \frac{1}{\tau} < 1$ همچنین:

$$d_1(A,B) = \|y_1 - y_2\|_1 = \|y_1 - y_2\| = d(A,B),$$

به‌طوری‌که

$$d_1(A,B) = \inf\{\|y-z\|_1 : y \in A, z \in B\}.$$

بنابراین T یک نگاشت انقباضی دوری است. اکنون براساس قضیه ۲ نگاشت T دارای نقطه بهترین تقریب x در A است به‌طوری‌که

$$\|x - T(x)\| = d(A,B).$$

نقطه $y=T(x)$ نقطه بهترین تقریب در B است و

x نقطه ثابت T^2 می‌باشد.

اکنون نشان می‌دهیم x,y به ترتیب جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه شده در (۱) و (۲) هستند.

ابتدا توجه کنید که چون

$$\|x-y\|=d(A,B)=\|y_1-y_2\|,$$

با استفاده از شرط $(\mathcal{A}_2)$ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر

$t \in J$،

$$g(t,y(t)) = f(t,x(t)).$$

اما داریم $x=T(y)$ و $y\in T(x)$ دراین‌صورت

$$x(t)=U(t,0)y_2+\int_0^t U(t,s)f(s,x(s))ds$$

$$y(t)=U(t,0)y_1+\int_0^t U(t,s)g(s,y(s))ds$$

پس

$$x'(t)=Ay(t)+f(t,x(t)) \quad t\in J \qquad y(0)=y_2,$$

$$y'(t)=Ay(t)+g(t,y(t)) \quad t\in J \qquad y(0)=y_1.$$

بنابراین زوج (x,y) جواب بهینه برای دستگاه معادلات ارائه شده (۱) و (۲) هستند.

فهرست منابع

[1] A. Abkar, M. Gabeleh, Best proximity points for asymptotic cyclic contraction mappings, Nonlinear Anal, **74** (2011), no. 18, 7261-7268.

[2] A. Abkar, M. Gabeleh, Best proximity points for cyclic mappings in ordered metric spaces, J. Optim. Theory Appl, **151** (2011), 418-424.

[3] A. Al-Thagafi, N. Shahzad, Convergence and existence results for best proximity points, Nonlinear Anal, **70** (2009), 3665-3671.

[4] C. Di Bari, T. Suzuki, C. Vetro, Best proximity points for cyclic Meir--Keeler contractions, Nonlinear Anal, 69 (2008), 3790-3794.

[5] M. Derafshpour, S. Rezapour, and N. Shahzad, Best proximity points of cyclic-contractions in ordered metric spaces, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **37** (2011), 193-202.

[6] A. A. Eldred, P. Veeramani, Existence and convergence of best proximity points, J. Math. Anal. Appl, **323** (2006), 1001-1006.

[7] R. Espinola, A. Fernandez-Leon, On best proximity points in metric and Banach spaces, Canad. J. Math, **63** (2011), no. 3, 533-550.

[8] A. Fernandez-Len, Existence and uniqueness of best proximity points in geodesic metric spaces, Nonlinear Anal, **73** (2010), no. 4, 915-921.

[9] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. **7**, Walter de Gruyter Co., Berlin, 2001.

[10] S. Karpagam, S. Agrawal, Best proximity point theorems for p-cyclic Meir-Keeler contractions, Fixed Point Theory and Applications, **70** (2009), 3332-3341.

[11] W.A. Kirk, P.S. Srinivasan, P. Veeramani, Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions, Fixed Point Theory, **4** (2003), 79-89.

[12] B. Piatek, On cyclic Meir-Keeler contractions in metric spaces, Nonlinear Anal, **74** (2011), no. 1, 35-40.

[13] T. Suzuki, M. Kikkawa, C. Vetro, The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC, Nonlinear Anal, **71** (2009), 2918-2926.

[14] P. Veeramani, S. Rajesh, Best Proximity Points. in Q. H. Ansari, Qamrul Hasan Ansari Nonlinear Analysis, Approximation Theory, Optimization and Applications (1-32). Springer New Delhi Heidelberg New York Dordrecht London. 2014.

[15] C. Vetro, Best proximity points: convergence and existence theorems for p-cyclic mappings, Nonlinear Anal, **73** (2010), no. 7, 2283-2292.