

درونیابی توابع مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته ها کوهارا از مرتبه‌ی دوم

حسین وثوقی^۱، سعید عباسبندی^{۲*}

^(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۱/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۱/۲۰

چکیده

مسئله درونیابی هرمیت درجه پنجم فازی تعمیمی است بر درونیابی لاگرانژ فازی توسط برازش یک چندجمله‌ای بر تابع فازی مقدار f که نه تنها در هر گره مقدار f را درونیابی می‌کند بلکه مشتقات متوالی تعمیم‌یافته ها کوهارای f تا مرتبه دوم را نیز درونیابی می‌نماید. جواب ارائه شده در این مقاله برای مسئله درونیابی هرمیت درجه پنجم فازی بر مبنای ترکیب خطی توابع پایه‌ی اصلی فضای خطی چندجمله‌ای‌های درجه پنجم استوار است و همین روش جهت بیان چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم فازی نیز تعمیم می‌یابد.

در ابتدا روش ساخت و مثالی برای درونیاب هرمیت درجه پنجم فازی بین دو گره بیان می‌شود. از آنجاکه روش ارائه شده برای درونیابی توابع مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته ها کوهارا از مرتبه اول نیز صادق است در ادامه طی یک مثال دو چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه سوم فازی و هرمیت ساده فازی برای داده‌های مشابه را مقایسه نموده و دلایل برتری روش قطعه‌ای را بیان می‌نمائیم و در پایان چند جمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم فازی ارائه می‌شود. استفاده از چنین درونیابی نشان می‌دهد که با بالا رفتن درجه چند جمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای فازی از درجه سه به پنج شرایط همواری در هسته چندجمله‌ای درونیاب بهبود می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: درونیابی داده‌های فازی، مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته ها کوهارا از مرتبه‌ی دوم، توابع پایه‌ی اصلی.

۱. مقدمه

مسئله درونیابی فازی نخست در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور زاده [۱] به صورت زیر بیان شد:

فرض کنید به ازای هر یک از $(n+1)$ نقطه متمایز x_0, x_1, \dots, x_n در \mathbb{R} یک مقدار فازی در $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ متناظر باشد. آیا می‌توان تابعی روی \mathbb{R} با بردی از مقادیر فازی چنان ساخت که در $(n+1)$ نقطه مفروض، مقدار تابع با مقادیر فازی داده شده مسئله برابر باشد و این تابع برای هموار بودن در چه شرایطی باید صدق کند؟

در سال ۱۹۹۰ لوئن [۲] براساس قضیه درونیابی چندجمله‌ای‌های لاگرانژ قطعی و با بهره‌گیری از فضای هاسدورف، وجود و پیوستگی یک چندجمله‌ای درونیاب فازی تحت متریک هاسدورف را ثابت کرد. در سال ۱۹۹۴ کالوا [۳] با ارائه یک روش محاسباتی به منظور به دست آوردن چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ فازی و اسپلاین‌های فازی به کار لوئن جنبه کاربردی بخشید و اسپلاین فازی با شرط «نبود یک گره» را معرفی نمود.

درونیابی داده‌های فازی توسط عباسبندی و همکاران با معرفی اسپلاین‌های طبیعی فازی در سال ۱۹۹۸ [۴]، اسپلاین‌های کامل فازی در سال ۲۰۰۱ [۵] و درونیاب هرمیت فازی در سال ۲۰۰۵ [۶] گسترش یافت. در سال ۲۰۰۳ لودویک و سانتز [۷] رویه‌های فازی را معرفی نمودند تا شرایط هموار بودن در قسمت دوم مسئله زاده برقرار باشد. در سال ۲۰۱۶ چندجمله‌ای‌های درونیاب هرمیت مکعبی و هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی [۸] و رده خاصی از درونیاب‌های هرمیت قطعه‌ای فازی [۹] توسط وثوقی و عباسبندی معرفی شدند.

در مقاله حاضر مشتقات تعمیم‌یافته هاگوهارا تا مرتبه دوم [۱۰] به کار گرفته می‌شوند که به دلیل نوع تعریف این مشتقات، در دامنه تعریف توابع فازی مورد درونیابی نقاط سوئیچ وجود ندارند. یادآوری می‌شود که در مقالات بالا اشاره ای به مشتق تعمیم‌یافته مورد بحث نشده است. با این توضیح ابتدا چندجمله‌ای درونیاب هرمیت درجه پنجم فازی بین دو نقطه دلخواه بیان می‌شود و پس از آوردن خواصی از پایه‌های اصلی فضای خطی چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای درجه پنجم، درونیاب فازی معرفی شده به چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم فازی

تعمیم داده می‌شود. در ادامه چندجمله‌ای‌های درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی [۸] و هرمیت فازی [۶] را ضمن بیان یک مثال مقایسه نموده و برتری نوع قطعه‌ای بیان می‌شود. با اضافه نمودن مشتقات تعمیم‌یافته هاگوهارای مرتبه دوم به داده‌های مثال پیش گفته آن را به مثالی برای چندجمله‌ای‌های درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم فازی تعمیم داده و به مزیت استفاده از درونیاب فازی درجه پنجم نسبت به درجه سوم اشاره می‌کنیم.

۲. درونیابی تابع مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته هاگوهارا از مرتبه دوم بین دو نقطه

تابع gH -مشتق‌پذیر از مرتبه دوم $f: I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نظر بگیرید که $I = [a, b]$ بازه‌ای در \mathbb{R} بوده و نقاط $x_1 < x_2$ متعلق به I باشند.

تعریف ۱-۲. تابع فازی مقدار $q: I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را چندجمله‌ای درونیاب هرمیت درجه پنجم فازی تابع f در نقاط x_1 و x_2 می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$q^{(k)}(x_i) = f_{gH}^{(k)}(x_i) = u_{ki} \quad (1) \quad i = 1, 2 \quad \text{و} \quad k = 0, 1, 2$$

(۲) اگر $y_i^{(k)} \in \mathbb{R}$ آنگاه $u_{ki} = 1_{y_i^{(k)}}$ و $i = 1, 2$ و $k = 0, 1, 2$

(۳) اگر $q_{\Lambda}(x)$ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت درجه پنجم منحصر بفرد گذرنده از نقاط $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ باشد که $q_{\Lambda}^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$ و $i = 1, 2$ و $k = 0, 1, 2$ آنگاه q به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ تابع $q_{\Lambda}(x)$ تقلیل می‌یابد.

فرض کنید $p_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ تابع حقیقی f به ازای داده‌های (x_i, f_i) $i = 0, 1, \dots, n$ و از درجه n باشد که براساس چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $B = \{\ell_1(x), \ell_2(x), \dots, \ell_n(x)\}$ با ویژگی $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$ $i, j = 0, 1, \dots, n$ به صورت $p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x)$ منحصر بفرد می‌شود. مجموعه مستقل خطی B یک پایه خاص برای فضای چندجمله‌ای‌های حقیقی حداکثر از درجه n

$$q(x) = \sum_{i=1}^2 (u_{0i} \gamma_i(x) + u_{1i} \eta_i(x) + u_{2i} \theta_i(x))$$

را با حل دو مسأله بهینه‌سازی

$$\max, \min \sum_{i=1}^2 (y_i^{(0)} \gamma_i(x) + y_i^{(1)} \eta_i(x) + y_i^{(2)} \theta_i(x))$$

به‌طوری‌که:

$$\underline{u}_{ki}^\alpha \leq y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 \leq i \leq n$$

به‌دست آورد که جواب مسأله کمیته‌سازی، پهنای پائین $q^\alpha(x)$ یعنی $\underline{q}^\alpha(x)$ و جواب مسأله بیشینه‌سازی، پهنای بالای آن یعنی $\bar{q}^\alpha(x)$ را مشخص می‌نماید ولی حل مسائل بهینه‌سازی بسیار مشکل می‌باشد.

با استفاده از قضیه ۲-۱ که علامت توابع پایه در بازه $[x_1, x_2]$ را مشخص نموده است و با توجه به نمایش $u_{ki}^\alpha = [\underline{u}_{ki}^\alpha, \bar{u}_{ki}^\alpha]$ و مجموعه α -برش‌های چند جمله‌ای‌های

$$q^\alpha(x) = \sum_{i=1}^2 (u_{0i}^\alpha \gamma_i(x) + u_{1i}^\alpha \eta_i(x) + u_{2i}^\alpha \theta_i(x))$$

به راحتی می‌توان جواب مسائل کمیته و بیشینه‌سازی را مشخص نمود.

در مثال زیر ابتدا چندجمله‌ای درونیاب هرمیت درجه پنجم فازی بین دو نقطه داده شده را نمایش داده سپس مجموعه $q^{1/2}(x)$ یا $\frac{1}{2}$ -برش آن را محاسبه می‌کنیم. در این مقاله برای بدست آوردن چندجمله‌ای‌های درونیاب و محاسبات لازم از اعداد مثلثی فازی استفاده شده است که حالت خاصی از اعداد $L - L$ فازی می‌باشند.

مثال ۲-۱. فرص کنید داده‌های درونیابی زیر داده شده

باشند

$$(0.4, (0.05, 1.9, 3.5), (0.3, 3.2, 0.8), (1, 3.1, 3.1))$$

و

$$(5, (14, 13, 12), (5.3, 0.2, 3.8), (1, -1.5, 1.5))$$

در شکل ۱ به ازای هر x متعلق به بازه بسته $[0.4, 5]$ خط‌چین‌ها مجموعه $\frac{1}{2}$ -برش درونیاب هرمیت درجه پنجم فازی $q(x)$ و خطوط توپر تکیه‌گاه و هسته $q(x)$ را نشان می‌دهند.

می‌باشد. محاسبات ریاضی روی چندجمله‌ای‌هایی که به‌صورت ترکیب خطی اعضای B نوشته می‌شوند ساده‌تر از همان محاسبات روی نمایش چندجمله‌ای‌ها براساس پایه استاندارد $\{1, x, \dots, x^n\}$ می‌باشد. بر همین اساس اعضای فضای خطی چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه پنجم حقیقی که روی بازه $I = [a, b]$ تعریف شده و خارج آن بازه خاصیت صفر شونده‌گی دارند را می‌توان [۱۱] بصورت ترکیب خطی اعضای پایه

$$C = \{\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2, \theta_1, \theta_2\}$$

برای فضای مذکور نوشت که به ازای $i, j = 1, 2$ در شروط زیر صدق می‌کنند:

$$\gamma_i(x_j) = \eta_i'(x_j) = \theta_i''(x_j) = \delta_{ij} \quad (۱)$$

$$\gamma_i'(x_j) = \eta_i''(x_j) = \eta_i(x_j) = \eta_i''(x_j) = \theta_i(x_j) = \theta_i'(x_j) = 0 \quad (۲)$$

چندجمله‌ای درونیاب هرمیت درجه پنجم $q_\Lambda(x)$ در نقاط $x_1 < x_2$ برای تابع حقیقی $f \in C^2[a, b]$ به ازای مجموعه داده‌های

$$\{(x_i, f_i, f_i', f_i'') | x_i, f_i^{(k)} \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, i = 1, 2\}$$

به‌طور منحصر بفرد عبارتست از

$$q_\Lambda(x) = \sum_{i=1}^2 (\gamma_i(x) f_i + \eta_i(x) f_i' + \theta_i(x) f_i'')$$

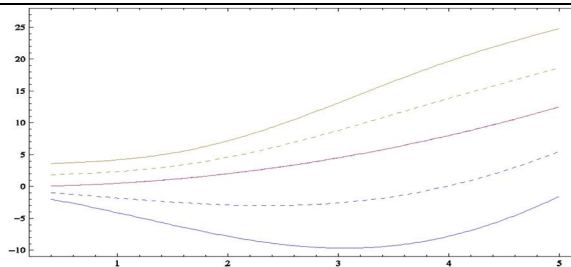
قضیه ۲-۱. فرض کنید $\gamma_i, \eta_i, \theta_i$ و $i = 1, 2$

پایه‌های اصلی فضای خطی چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه پنجم حقیقی باشند. در این صورت به ازای هر $x \in (x_1, x_2)$ علامت $\gamma_i(x)$ و $\theta_i(x)$ و $i = 1, 2$ و $\eta_1(x)$ مثبت و علامت $\eta_2(x)$ منفی می‌باشد.

اثبات: با تشکیل پایه‌ها براساس شروط (۱) حکم بدیهی

می‌باشد.

برای ساختن چند جمله‌ای درونیاب فازی در تعریف ۲-۱ بایستی α -برش‌های مربوط به چندجمله‌ای درونیاب هرمیت درجه پنجم فازی



شکل ۱. خطوط توپر تکیه‌گاه و هسته $q(x)$ و خطچین‌ها نمایش مجموعه $\frac{1}{2}$ -برش چندجمله‌ای درونیاب فازی می‌باشند.

که یک افراز برای بازه حقیقی $I = [a, b]$ است و $\{f'_i\}_{i=0}^n$ و $\{f_i\}_{i=0}^n$ داده فازی $2(n+1)$ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی $[A]$ و چندجمله‌ای درونیاب هرمیت فازی $[E]$ را در نظر بگیرید. در مثال ذیل نمودار دو چندجمله‌ای درونیاب را رسم نموده و ضمن مقایسه آنها دلایل برتری درونیاب نوع قطعه‌ای مکعبی را بیان می‌کنیم. این برتری دلیل تعمیم روش قطعه‌ای برای توابع مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته هاگوهارا از مرتبه دوم می‌باشد.

مثال ۳-۱. فرص کنید داده‌های درونیابی زیر داده شده باشند

$$(1, (0,2,1), (1,0,3)), (1.3, (5,1,2), (0,2,1)), \\ (2.2, (1,0,3), (4,4,3)), (3, (4,4,3), (5,1,2)), \\ (3.5, (0,3,2), (1,1,1)) \text{ و } (4, (1,1,1), (0,3,2))$$

که به صورت (x_i, f_i, f'_i) بوده و هر یک از اعداد فازی f_i, f'_i به صورت عدد مثلثی $L-L$ فازی (m_i, l_i, r_i) بیان شده‌اند. شکل ۲ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی و شکل ۳ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت فازی داده‌های بالا را نشان می‌دهند. در هر دو شکل خطوط خطچین مجموعه $\frac{1}{2}$ -برش و خطوط توپر تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب در بازه $[1,4]$ هستند. شکل ۴ نمودار هر دو چندجمله‌ای را به منظور مقایسه به‌طور توأم نشان می‌دهد و تنها شامل تکیه‌گاه و هسته دو چندجمله‌ای بدون مجموعه $\frac{1}{2}$ -برش آنها می‌باشد.

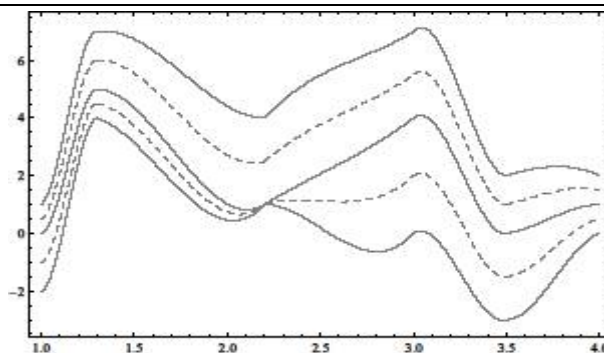
α -برش عدد $L-L$ فازی $u = (m, l, r)$ به صورت $\bar{u}^\alpha = [u^\alpha, \bar{u}^\alpha]$ است که در آن $u^\alpha = m(1-\alpha)r$ و $\underline{u}^\alpha = m + (\alpha-1)l$ می‌باشند. به‌ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ $q^{1/2}(x)$ که در شکل ۱ با خطچین‌ها نمایش داده شده است با توجه به علامت منفی $\eta_2(x)$ و نیاز به جابجا نمودن پهناهای بالا و پائین $u_{11}^{\frac{1}{2}}(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$q^{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{i=1}^2 (u_{0i}^{\frac{1}{2}} \gamma_i(x) + u_{1i}^{\frac{1}{2}} \eta_i(x) + u_{2i}^{\frac{1}{2}} \theta_i(x)) = u_{01}^{\frac{1}{2}} \gamma_1(x) + u_{02}^{\frac{1}{2}} \gamma_2(x) + u_{11}^{\frac{1}{2}} \eta_1(x) + u_{12}^{\frac{1}{2}} \eta_2(x) + u_{21}^{\frac{1}{2}} \theta_1(x) + u_{22}^{\frac{1}{2}} \theta_2(x) = [0.05 + (\frac{1}{2} - 1) 1.9, 0.05 + (1 - \frac{1}{2}) 3.5] \gamma_1(x) + [14 + (\frac{1}{2} - 1) 13, 14 + (1 - \frac{1}{2}) 12] \gamma_2(x) + [0.3 + (\frac{1}{2} - 1) 3.2, 0.3 + (1 - \frac{1}{2}) 0.8] \eta_1(x) + [5.3 + (\frac{1}{2} - 1) 0.2, 5.3 + (1 - \frac{1}{2}) 3.8] \eta_2(x) + [1 + (\frac{1}{2} - 1) 3.1, 1 + (1 - \frac{1}{2}) 3.1] \theta_1(x) + [1 + (\frac{1}{2} - 1) (-1.5), 1 + (1 - \frac{1}{2}) 1.5] \theta_2(x) = [-0.9, 1.8] \gamma_1(x) + [7.5, 20] \gamma_2(x) + [-1.3, 0.7] \eta_1(x) + [5.2, 7.2] \eta_2(x) + [-0.55, 2.55] \theta_1(x) + [1.75, 1.75] \theta_2(x) = [-0.9 \gamma_1(x) + 7.5 \gamma_2(x) + (-1.3) \eta_1(x) + 7.2 \eta_2(x) + (-0.55) \theta_1(x) + 1.75 \theta_2(x), 1.8 \gamma_1(x) + 20 \gamma_2(x) + 0.7 \eta_1(x) + 5.2 \eta_2(x) + 2.55 \theta_1(x) + 1.75 \theta_2(x)] = [q^{\frac{1}{2}}(x), \bar{q}^{\frac{1}{2}}(x)]$$

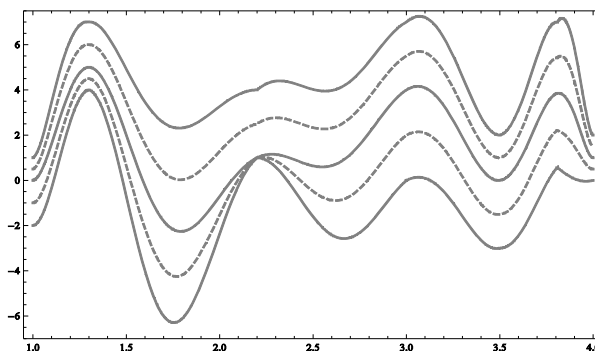
۳. مقایسه درونیاب‌های هرمیت قطعه‌ای

مکعبی فازی و هرمیت فازی

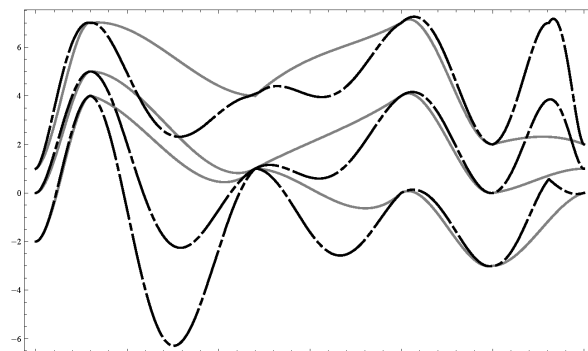
به‌ازای نقاط متمایز $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$



شکل ۲. خطچین‌ها نمایش مجموعه $\frac{1}{2}$ -برش چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی و خطوط توپر نمایش تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب می‌باشند.



شکل ۳. خطچین‌ها نمایش مجموعه $\frac{1}{2}$ -برش چندجمله‌ای درونیاب هرمیت فازی و خطوط توپر نمایش تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب می‌باشند.



شکل ۴. خطچین‌ها نمایش تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت فازی و خطوط توپر نمایش تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی می‌باشند.

نوع هرمیت قطعه‌ای فازی در طول بازه درونیابی نوسان کمتری نسبت به هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت فازی دارد. این ویژگی در فاصله بین دو گره انتهایی سمت راست نمودار و بین گره‌های دوم و سوم ابتدایی

از مزیت‌های یک درونیاب خوب نوسانات کمتر بین گره‌ها می‌باشد و به همین دلیل در درونیابی ترجیح داده می‌شود تا از مشتقات توابع استفاده گردد. با توجه به شکل ۴ می‌توان دید که هسته چندجمله‌ای درونیاب از

برای بازه I هستند که با مراجعه به [۱۱] از تعریف زیر به دست می‌آیند:

$$D^l \phi_{ik}(x_j) = \delta_{kl} \delta_{ij}, \quad 0 \leq k, l \leq 2, \\ 0 \leq i, j \leq n, \quad D^l = \frac{d^l}{dx^l} \quad (3)$$

قضیه ۴-۱. اعضای مجموعه پایه‌های اصلی F را در نظر بگیرید. این توابع دارای ویژگی‌های زیر هستند:

(الف) به ازای هر $x \in (x_i, x_{i+1})$ و $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\phi_{i0}(x) + \phi_{i+10}(x) = 1$$

(ب) به ازای هر $x \in (x_{i-1}, x_i)$ و $i = 1, 2, \dots, n$

$$\phi_{i1}(x) < 0$$

(ج) به ازای هر $x \in (x_i, x_{i+1})$ و $i = 0, 1, \dots, n-1$ و $k = 0, 1, 2$ و

$$\phi_{ik}(x) > 0$$

اثبات. با تشکیل پایه‌ها طبق تعریف رابطه (۲) حکم بدیهی است. ■

تعریف ۴-۱. تابع فازی مقدار $Q: I \rightarrow \mathbb{R}_F$ را چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم فازی تابع gH-مشتق‌پذیر از مرتبه دوم f به ازای گره‌های متمایز و حقیقی افزاز $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ برای $I = [a, b]$ می‌نامیم در صورتی که در شرایط تعریف ۲-۱ صدق کند. در این تعریف $i = 0, 1, \dots, n$ فرض شده و حالت قطعی Q با Q_Δ نشان داده می‌شود. با استفاده از α -برش‌های $Q(x)$ می‌توان به نمایشی صریح از چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم فازی مورد نظر رسید.

$$Q^\alpha(x) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = Q_{\{y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_n, y'_n, y''_n\}}(x), y_i^{(k)} \in u_{ki}^\alpha, k = 0, 1, 2, 0 \leq i \leq n \right\} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 u_{ki}^\alpha \phi_{ik}^\alpha(x).$$

که در آن $Q_{\{y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_n, y'_n, y''_n\}}(x) = Q_\Delta(x)$ و $0 \leq \alpha \leq 1$ می‌باشند. به ازای هر α متعلق به $[0, 1]$

رابطه بالا برقرار است بنابراین

$$Q(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 u_{ki} \phi_{ik}(x).$$

$Q^\alpha(x)$ جواب دو مسأله بیشینه و کمینه سازی زیر است:

$$\max \& \min \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 y_i^{(k)} \phi_{ik}(x)$$

در سمت چپ نمودار بوضوح دیده می‌شود.

در حالت غیر فازی با استفاده از چندجمله‌ای‌های درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه کم مانند درجه سوم یا پنجم و با تعداد گره‌های زیاد خطای درونیابی به‌طور یکنواخت به صفر میل می‌کند. این ویژگی در مورد چندجمله‌ای‌های درونیاب هرمیت صادق نیست. از آنجا که طبق تعریف ۲-۱ در چندجمله‌ای‌های درونیاب فازی، هسته هر چندجمله‌ای درونیاب فازی در واقع چندجمله‌ای درونیاب در حالت غیر فازی همان روش درونیابی می‌باشد بنابراین درستی این مطلب که هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی نسبت به هسته چندجمله‌ای درونیاب فازی تقریب بهتری می‌باشد را می‌توان استدلال نمود که در شکل ۴ مشهود است.

از طرف دیگر در صورتی که در هر نقطه از بازه درونیاب [1,4] طول بازه بسته α -برش چندجمله‌ای درونیاب را تفاضل پهنای پایین از پهنای بالا در همان نقطه تعریف کنیم می‌توان دید که طول تکیه‌گاه یا مجموعه α -برش درونیاب نوع قطعه‌ای در اغلب نقاط بازه [1,4] از طول تکیه‌گاه درونیاب هرمیت فازی کمتر است و این از مزایای درونیاب نوع قطعه‌ای می‌باشد.

۴. درونیابی تابع مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته هاگوارا از مرتبه دوم در $(n+1)$ گره

برای درونیابی توابع فازی مشتق‌پذیر از مرتبه دوم می‌توان چندجمله‌ای‌های درونیاب هرمیت قطعه‌ای از درجه پنجم فازی را به کار برد. در حالت قطعی چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم برای تابع حقیقی $f \in C^2[a, b]$ و در گره‌های $x_0 < x_2 < \dots < x_n$ به ازای مجموعه داده‌های

$$\left\{ (x_i, f_i, f'_i, f''_i) \mid x_i, f_i^{(k)} \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 0 \leq i \leq n \right\}$$

به‌طور منحصربفرد عبارتست از

$$Q_\Delta(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 f^{(k)}(x_i) \phi_{ik}(x)$$

که در آن $F = \{\phi_{ik}(x)\}_{i=0, k=0}^{n, 2}$ مجموعه پایه‌های اصلی فضای خطی چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای درجه پنجم به ازای افزاز $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

به طوری که

$$\underline{u}_{ki}^\alpha \leq y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 \leq i \leq n$$

بیشینه سازی:

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \bar{u}_{ki}^\alpha, & \text{if } \phi_{ik}(x) \geq 0 \\ \underline{u}_{ki}^\alpha, & \text{if } \phi_{ik}(x) < 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 \leq i \leq n$$

کمینه سازی:

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \underline{u}_{ki}^\alpha, & \text{if } \phi_{ik}(x) \geq 0 \\ \bar{u}_{ki}^\alpha, & \text{if } \phi_{ik}(x) < 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 \leq i \leq n$$

مثال ۴-۱. داده های درونیابی زیر را در نظر بگیرید.

$$(1, (0, 2, 1), (1, 0, 3), (4, 4, 3)).$$

$$(1.3, (5, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 3)).$$

$$(2.2, (1, 0, 3), (4, 4, 3), (5, 1, 2)).$$

$$(3, (4, 4, 3), (5, 1, 2), (0, 2, 1)).$$

$$(3.5, (0, 3, 2), (1, 1, 1), (0, 3, 2)) \text{ و}$$

$$(4, (1, 1, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 1)).$$

شکل ۵ چند جمله ای درونیاب هرمیت قطعه ای درجه پنجم فازی داده های درونیابی را نشان می دهد.

در شکل ۵ به دلیل استفاده از مشتق دوم شعاع انحناء قوس های نمودار با دقت بیشتری رسم شده اند و نمودار هسته درونیاب نسبت به هسته درونیاب قطعه ای مکعبی دارای نوسان کمتر و تغییر جهت های ملایم تری می باشد. در نقاط گره نمودار $\frac{1}{2}$ -برش و تکیه گاه به خصوص در دو سر نمودار هموارتر رسم شده اند و در کل نمودار درجه پنجم با توجه به همگرایی بهتر هسته آن به تابع f از دقت بیشتری برخوردار است.

نتیجه گیری

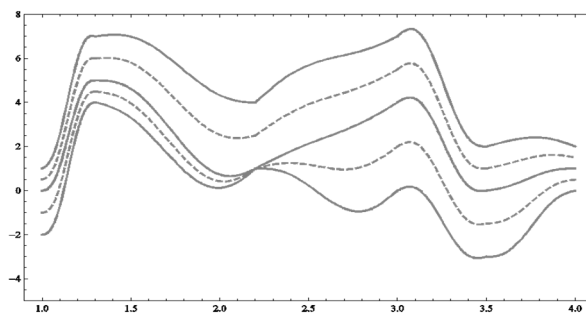
چند جمله ای درونیاب هرمیت درجه پنجم فازی بین دو نقطه و چند جمله ای درونیاب هرمیت قطعه ای درجه پنجم فازی به ازای $(n + 1)$ گره برای توابع gH -مشتق پذیر از مرتبه دوم به همراه مثال های مربوطه بیان شدند و برتری چند جمله ای هرمیت قطعه ای مکعبی فازی بر چند جمله ای هرمیت فازی [۶] با ارائه مثالی برای توابع gH -مشتق پذیر از مرتبه اول آورده شد. برای کارهای آتی مطالعه روی نقاط سوئیچ حاصل از سایر تعریف های مشتق پذیری توابع فازی توصیه می شود.

قضیه ۴-۲. فرض کنید $Q(x)$ چند جمله ای درونیاب هرمیت قطعه ای درجه پنجم فازی است. به ازای هر x متعلق به (x_i, x_{i+1}) و تمامی α های متعلق به $[0, 1]$ طول α -برش $Q(x)$ در هر نقطه بین دو گره گفته شده از طول α -برش در هر یک از دو گره نا کمتر است.

اثبات: با فرض $Q^\alpha(x) = [Q^\alpha(x), \bar{Q}^\alpha(x)]$ و تعریف $len Q^\alpha(x) = \bar{Q}^\alpha(x) - Q^\alpha(x)$ نشان می دهیم رابطه زیر برقرار است:

$len Q^\alpha(x) \geq \min\{len Q^\alpha(x_i), len Q^\alpha(x_{i+1})\}$
از قسمت الف قضیه ۴-۱ و اینکه جمع زدن بازه ها باعث کم شدن طول بازه حاصل نمی شود داریم:

$$\begin{aligned} len Q^\alpha(x) &= \\ len \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^2 u_{kj}^\alpha \phi_{jk}(x) &\geq \\ \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^2 \phi_{j0}(x) len u_{kj}^\alpha &\geq \\ \sum_{j=0}^n \phi_{j0}(x) len u_{0j}^\alpha &\geq \phi_{i0}(x) len u_{0i}^\alpha + \\ \phi_{i+1,0} len u_{0i+1}^\alpha &\geq \\ \min\{len u_{0i}^\alpha, len u_{0i+1}^\alpha\} (\phi_{i0}(x) &+ \\ \phi_{i+1,0}(x)) &\geq \min\{len u_{0i}^\alpha, len u_{0i+1}^\alpha\} = \\ \min\{len Q^\alpha(x_i), len Q^\alpha(x_{i+1})\}. & \end{aligned}$$



شکل ۵. خطوط خط چین مجموعه $\frac{1}{2}$ -برش و خطوط توپر تکیه گاه و هسته چند جمله ای در بازه $[1, 4]$ می باشند.

fuzzy solutions for heat equation based on generalized Hukuhara differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*, 265, pp.1-23.

[11] Prenter, P.M., 2008. *Splines and variational methods*. Courier Corporation.

فهرست منابع

[1] Zadeh, L.A., 1965. Information and control. *Fuzzy sets*, 8(3), pp.338-353.

[2] Lowen, R., 1990. A fuzzy Lagrange interpolation theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 34(1), pp.33-38.

[3] Kaleva, O., 1994. Interpolation of fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 61(1), pp.63-70.

[4] Abbasbandy, S. and Babolian, E., 1998. Interpolation of fuzzy data by natural splines. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 5(2), pp.457-463.

[5] Abbasbandy, S., 2001. Interpolation of fuzzy data by complete splines. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 8(3), pp.587-594.

[6] Goghary, H.S. and Abbasbandy, S., 2005. Interpolation of fuzzy data by Hermite polynomial. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(12), pp.1541-1545.

[7] Lodwick, W.A. and Santos, J., 2003. Constructing consistent fuzzy surfaces from fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 135(2), pp.259-277.

[8] Vosoughi, H. and Abbasbandy, S., 2016. Interpolation of fuzzy data by cubic and piecewise-polynomial cubic hermites. *Indian Journal of Science and Technology*, 9(8).

[9] Vosoughi, H. and Abbasbandy, S., 2016. Cardinal Basis Piecewise Hermite Interpolation on Fuzzy Data. *Advances in Fuzzy Systems*, 2016.

[10] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A. and Hasanoglu, A., 2015. On