

یافتن بهترین عملکرد در روش‌های تحلیل کارایی غیرپارامتری

محسن میرزائی چلکی^{۱*} عاطفه معصوم زاده^۲

گروه ریاضی کاربردی، واحد آستانه اشرفیه، دانشگاه آزاد اسلامی، آستانه اشرفیه، ایران
گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۱۲/۱۷

چکیده

در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA^۲) بهترین عملکردها در حالت کارایی قوی رخ می‌دهد که با عدد یک نمایش داده می‌شود و از روی تجربه می‌دانیم که معمولاً بیش از یک واحد دارای وضعیت کارا خواهد بود. یکی از مطالعات اخیر که بسیار مورد توجه بوده است تمایز بین عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUهای^۳) کارا می‌باشد. مساله یافتن DMU بهین-کارا (با بهترین عملکرد) از دیدگاه‌های مختلفی مطالعه شده‌اند. با این وجود، بررسی نشان داده است که هیچ تعریف صریحی از DMU بهین-کارا (بهترین عملکرد) وجود ندارد و در تحقیقات مختلف، واحدهای متفاوتی را به عنوان واحد با بهترین کارایی معرفی نموده‌اند. در این مقاله یک تعریف جدید برای DMU بهین-کارا (با بهترین عملکرد) ارائه می‌شود. برای این منظور، یک مقیاس مقایسه‌ای برای هر DMU تعریف کرده، که با استفاده از این مقیاس یک روش اولویت‌بندی برای DMUها حاصل می‌شود. با مثال‌های عددی کاربرد تحقیق انجام‌شده محرز می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، ورودی/خروجی، رتبه‌بندی، بهین-کارا

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک رویکرد غیرپارامتری مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی جهت شناسایی بهترین عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) با چندین ورودی و خروجی است. DEA ابتدا توسط چارنز، کوپر و رودز (۱۹۷۸) ابداع شد و سپس توسط بنکر، چارنز و کوپر (۱۹۸۴) بسط داده شد. این رویکرد غیرپارامتری یک مساله برنامه‌ریزی خطی (LP^4) را هربار نسبت به یک DMU حل می‌کند و وزن‌های وابسته به هر ترکیب خطی متناظر با هر LP را به‌دست می‌آورد. در مدل‌های استاندارد DEA، بهترین عملکرد در حالت کارایی قوی رخ می‌دهد که تمام کمکی‌ها برابر صفر و مقدار کارایی برابر یک است و تجربه نشان داده است که این حالت کارایی معمولاً برای بیشتر از یک واحد اتفاق می‌افتد. بنابراین برای تمایز بین عملکرد DMU‌های کارا به مطالعات بیشتری نیاز است. از نقطه نظرهای مختلف روش‌های متفاوتی به منظور پیدا کردن بهترین DMU‌ها مطرح شده‌اند. این نقطه نظرها به چهارگروه تقسیم‌بندی می‌شوند: کارایی متقاطع، وزن‌های مشترک، ابرکارایی و روش‌های یافتن بهترین کارایی.

با درنظر گرفتن این حقیقت که بررسی‌های مفروض در این تحقیق برپایه روش بهترین کارایی استوار است، به طور اختصار چندین تحقیق انجام شده در این زمینه را شرح می‌دهیم.

کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) یک مدل تصمیم‌گیری چند هدفه ($MCDM^5$) با وزن مشترک مناسب معرفی کردند برای تعیین بهترین عملکرد نسبت به واحدی که فقط یک ورودی و چند خروجی دارد. مدل آنها دارای یک پارامتر تفکیک می‌باشد که باید دقیقاً با آزمایش و خطا در فاصله [۰,۱] انتخاب شود. با این وجود، کارساک و آهیسکا (۲۰۰۸) الگوریتمی پایه‌گذاری کردند که یک مقدار مطمئن برای این پارامتر تفکیک محاسبه می‌نماید. ارتای و همکاران (۲۰۰۶) یک روش min-max را برای یک مجموعه داده واقعی شامل ۱۹ واحد به کار بردند. تابع هدف در مدل آنها حاوی یک پارامتری است که با آزمایش و خطا به طریقی که کارای وابسته یکتا حاصل شود، انتخاب می‌شود.

امین و طلوع (۲۰۰۷) یک مدل تابع اولیه برای محاسبه DMU‌های بهین کارا معرفی کردند. آنها مدعی شدند که با آن مدل می‌توان بهترین واحد کارا را فقط با یکبار حل مدل یافت. همچنین این مدل نیاز به پارامتر در تابع هدف را که در روش ارتای (۲۰۰۶) مشاهده شد، برطرف نمود. بعد از آن امین (۲۰۰۹) نشان داد که مدل پیشنهادی به‌وسیله امین و طلوع (۲۰۰۷) ممکن است بیش از یک DMU کارا را به دست آورد. او یک مدل اصلاح‌شده برای به دست آوردن DMU بهین کارا معرفی نمود. به علاوه مدل پیشنهادی او برای پیدا کردن بهترین واحد کارای^۶-CCR به کار می‌رود وقتی که شرایط بازده به مقیاس ثابت وجود دارد. طلوع و نعلچگر (۲۰۰۹) مدلی برای یافتن بهترین DMU کارای-BCC^۷ معرفی کردند. این روش مناسب حالتی بود که در آن بازده به مقیاس متغیر می‌باشد. وحیدی (۲۰۱۷) با اشاره به مقالات امین (۲۰۰۹) و طلوع و نعلچگر (۲۰۰۹) بیان نمود که اگرچه بعضی مقالات اساساً به منظور مشخص کردن یک واحد تصمیم‌گیری کارا به عنوان کاراترین ارایه شده‌اند، ولی آنها ممکن است نتوانند این واحدها را به درستی پیدا کنند. طلوع (۲۰۱۲) ضمن اشاره به بعضی از مسایل به کار برده شده توسط مدل طلوع و نعلچگر، مدل MILP جدیدی برای تعیین بهترین DMU کارای-BCC معرفی نمود. فروغی (۲۰۱۱) مدعی شد که مدل غیرخطی عدد صحیح معرفی‌شده توسط امین (۲۰۰۹) در بعضی از حالت‌ها نشدنی است. بنابراین او برای اصلاح مساله نشدنی بودن، یک مدل خطی عدد صحیح برای پیدا کردن بهترین DMU کارا معرفی کرد که

⁴ Linear Programming⁵ Multi Criteria Decision Making⁶ Charnes, Cooper and Rhodes⁷ Banker, Charnes and Cooper

از دیدگاه ابرکارایی حاصل می‌شود. هرچند این روش قیدهای غیرضروری بسیاری را شامل می‌شود و نیاز است که ناحیه اطمینانی برای وزن ورودی و خروجی‌ها لحاظ شود که مانع از صفر شدن آنها گردد. وانگ و جیانگ (۲۰۱۲) سه مدل MILP^۸ متفاوت را برای تعیین بهترین DMU کارا تحت بازده به مقیاس مختلف معرفی نمودند که تنها شامل قیود اصلی و متغیرهای تصمیم بوده و آنها مدعی شدند که مدلشان خیلی ساده‌تر از مدل فروغی می‌باشد. یک نکته جالب مدل معرفی‌شده به وسیله وانگ و جیانگ (۲۰۱۲) این است که این سه روش مختلف، سه واحد متفاوت را به عنوان بهترین عملکرد معرفی می‌کند. محمدی و همکاران (۲۰۱۶) الگوریتمی برای یافتن ارجح‌ترین واحد بر اساس تابع مطلوبیت ترجیحات تصمیم‌گیرنده با بررسی برخی ویژگی‌ها ارائه نمودند. روش آنها بر اساس تصویر گرادین تابع مطلوبیت بر مرز مجموعه امکان تولید ساخته شده است. طلوع و توانا (۲۰۱۷) روشی برای یافتن یک واحد کارایی منحصربه‌فرد یعنی کاراترین واحد، تحت شرایط بدون ورودی‌های واضح و بدون خروجی‌های واضح پیشنهاد کردند. برخی بررسی‌ها مانند احدازه نمین و خمسه (۲۰۱۷)، پورحبیب یکتا و همکاران (۲۰۱۸)، بدای و همکاران (۲۰۱۹) و مجیدی و همکاران (۲۰۲۳) نیز از روش وزن مشترک به منظور رتبه‌بندی واحدها استفاده کرده‌اند. قربان شیروودی و حسین‌زاده لطفی (۲۰۱۸) مدلی پیشنهاد نمودند که تمایز بیشتری بین DMUها فراهم می‌کند. این مدل سعی می‌کند ابرصفحه‌ای پیدا کند که از یک DMU با فاصله زیاد از سایرین عبور کند، و سپس یک واحد به عنوان کاراترین واحد در نظر گرفته می‌شود. طلوع و همکاران (۲۰۱۸) یک رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها را برای یافتن کاراترین پروژه‌های سیستم اطلاعات با در نظر گرفتن نظرات فردی و احساسات شهودی تصمیم‌گیرندگان پیشنهاد کردند. نوری و همکاران (۲۰۲۲) یک الگوریتم با استفاده آسان برای تعیین کاراترین واحد بدون حل مساله برنامه‌نویسی ریاضی ارائه نموده‌اند. روش پیشنهادی بر اساس تعریف کاراترین واحد و خواص DMUهای کارا است.

با توجه به این که هیچ تعریف صحیحی از بهترین DMU کارا و یا یک معیار صریح یا ضمنی برای تعریف بهترین عملکرد در هیچ یک از مطالعات قبلی وجود ندارد؛ بنابراین روش‌های مختلف، واحدهای متفاوتی را به عنوان واحد بهین-کارا معرفی می‌کنند و هیچ تضمینی وجود ندارد که واحدهای بهین-کارای معرفی‌شده توسط این مدل‌ها واقعا بهترین عملکرد را داشته باشند. در بعضی از حالت‌ها یک DMU ابر-کارا به عنوان بهین-کارا معرفی می‌شود؛ بنابراین نیاز است که یک روش سیستماتیک برای تمایز عملکرد DMUها ابداع کنیم. در واقع ابتدا باید تعریفی صریح برای DMU بهین-کارا معرفی شود و سپس برپایه این تعریف DMU بهین-کارا، روش تعیین بهترین عملکرد، پایه‌ریزی شود. در این مقاله، یک مقیاس اندازه‌گیری برای هر DMU تعریف و با استفاده از آن DMUها اولویت‌بندی می‌شوند. مقیاس مقایسه‌ای معرفی‌شده در این مقاله، مستقیما به عملکرد DMUها وابسته است؛ بنابراین انعکاسی از عملکرد هر DMU می‌باشد.

ادامه مقاله به صورت ذیل پایه‌گذاری شده است: بخش بعد یک مرور تاریخی از موضوع را ارائه می‌دهد. روش تعیین بهترین عملکرد در بخش ۳ مطرح می‌شود. در بخش ۴، یک مقایسه بین واحد بهین کارایی ارائه‌شده و روش‌های موجود در این زمینه ارائه می‌گردد. نتایج مقاله نیز در بخش آخر بیان می‌شود.

۲. مرور تاریخی

^۸ Multi Objective Linear Programming

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری (DMU) موجود است که هریک شامل m ورودی برای تولید s خروجی می‌باشد. $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})^T$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی DMU_j ($j=1, \dots, n$) را نشان می‌دهند.

مدل CCR (۱) توسط چارنز، کوپر و رودز (۱۹۷۸) به منظور تحلیل کارایی واحدها تحت بازده به مقیاس ثابت معرفی شد.

$$\theta^* = \min \quad \theta$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (1)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

λ_j متغیرهای وزنی و θ میزان کارایی را نشان می‌دهند. اگر مقدار بهینه $\theta^* = 1$ ، واحد کارا است. در غیر این صورت ناکارا است. در بسیاری از بررسی‌ها ممکن است پیش از یک واحد به عنوان کارا تعیین شود. برای تمایز بین عملکرد DMUهای کارا در DEA، روش‌های رتبه‌بندی مختلفی در مقالات DEA مطرح شده‌اند. یکی از آن روش‌ها که غالباً بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد، روش ابرکارایی است که DMUهای تحت بررسی را از مجموعه مرجع خارج می‌سازد. دو روش خیلی معروف تکنیک‌های ابرکارایی در DEA، مدل AP، (مدل اندرسون و پیترسون (۱۹۹۳)) و روش اندازه‌گیری برپایه متغیرهای کمکی، تون (۲۰۰۲) می‌باشد. روابط ریاضی این دو روش به صورت

زیر هستند:

$\min \quad \theta$ $s.t.$ $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m,$ $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (2)$ $\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$	$\min \quad \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{r0}}}$ $s.t.$ $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$ $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s,$ $\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad \forall i, j, r.$
--	--

در مدل‌های فوق λ_j ($j=1, \dots, n$) متغیرهای وزنی می‌باشند. به علاوه در مدل (۳) s_i^- و s_r^+ متغیرهای کمکی می‌باشند. مدل (۲) یک مدل شعاعی و مدل (۳) یک مدل غیرشعاعی به منظور رتبه‌بندی واحدها می‌باشند که هر دو بر مبنای بازده به مقیاس ثابت می‌باشند. در این مدل‌ها مقدار کارایی ممکن است بیشتر از یک شود که هر چه میزان کارایی بیشتر رتبه بهتر خواهد بود. کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) یک روش تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه مبتنی بر وزن مشترک را برای انتخاب تکنولوژی به کار بردند. وزن مشترک توسط مدل مطرح‌شده توسط آنها تعیین

می‌شود. مدل کارایی روش کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) برای داده‌های یک ورودی و چند خروجی به صورت ذیل می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & d_{\max} - k \sum_{j \in E} d_j \\
 \text{s.t.} \quad & d_{\max} \geq d_j, \quad j \in E, \\
 & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{x_j} + d_j = 1, \quad j \in E, \\
 & u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & d_j \geq 0, \quad j \in E.
 \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن d_j انحراف کارایی DMU_j از کارایی ایده‌آل، ε یک عدد مثبت کوچک و u_r ($r = 1, \dots, s$) وزن‌های مربوط به خروجی‌ها می‌باشند. E مجموعه تمام DMU های کارایی قوی بوده و k یک پارامتر تشخیصی است که مقدارش با قرار گرفتن در $[0, 1]$ تعیین می‌شود. $d_{\max}$ حداکثر انحراف از کارایی و $d_{\max} \geq d_j$ محدودیت‌هایی هستند که برای اطمینان از $d_{\max} = \max d_j$ به مدل اضافه می‌شوند. مدل (۴) با افزایش مقدار $k \in [0, 1]$ از صفر با اندازه گام از پیش تعیین شده حل می‌شود. مقدار بهینه تابع هدف در مدل (۴) بزرگتر از صفر و کوچکتر یا مساوی یک است. توجه شود که صورت اولیه تحت بررسی غیرخطی است؛ اما با به کارگیری یک تغییر متغیر، مساله به صورت خطی در می‌آید. به علاوه در صورت اولیه، ورودی نیز وزن دارد که با تغییر متغیر استفاده‌شده وزن برابر یک می‌یابد. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) مراجعه نمود. کارساک و آهیسکا (۲۰۰۸) الگوریتمی را مطرح نمودند که مقدار مناسب k را تعیین می‌کند. با در نظر گرفتن الگوریتم مورد نظر، مقدار پارامتر تشخیص k به جای اینکه مرحله به مرحله با انتخاب مقدار ثابتی دلخواه محاسبه شود، به طور سیستماتیک دقیق‌تر محاسبه می‌شود. با این وجود چند نکته قابل ذکر در تحقیقات کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) وجود دارد، یک نکته مهم آن است که این روابط تنها برای یک ورودی قابل استفاده بوده و در حالت چند ورودی کارساز نخواهد بود. نکته دیگر آن است که تعیین پارامتر تمایز k نیازمند محاسبات زیادی است که در نهایت منجر به انجام محاسبات زیاد و پیچیده جهت یافتن بهترین واحد کارا می‌گردد.

وانگ و جیانگ (۲۰۱۲) مدل MILP جایگزینی را به صورت ذیل برای تعیین DMU ی با بیشترین کارایی تحت بازده به مقیاس متغیر ارائه دادند که تنها دارای قید و متغیرهای تصمیم اصلی هستند:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) - \sum_{r=1}^s u_r \left(\sum_{j=1}^n y_{rj} \right) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq I_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n I_j = 1, \\
 & I_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_r \geq \frac{1}{(m+s) \max \{y_{rj}\}}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & v_i \geq \frac{1}{(m+s) \max \{x_{ij}\}}, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \quad (5)$$

که I_j ($j=1, \dots, n$) متغیرهای دودویی هستند. u_r ($r=1, \dots, s$) و v_i ($i=1, \dots, m$) وزن‌های مربوط به خروجی‌ها و ورودی‌ها می‌باشند. در این مدل دومین و سومین قید تضمین می‌کند که تنها بهترین DMU کارا بتواند رتبه کارایی بزرگتر از یک داشته باشد، درحالی که DMUهای کارای دیگر کوچکتر یا مساوی با یک خواهند بود. واحدهای ناکارا رتبه بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک خواهند داشت.

در حالت بازده به مقیاس متغیر (VRS)، وانگ و جیانگ (۲۰۱۲) مدل MILP ورودی محور زیر را ارائه نمودند:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m v_i (\sum_{j=1}^n x_{ij}) - nv_0 - \sum_{r=1}^s u_r (\sum_{j=1}^n y_{rj}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + v_0 \leq I_j, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^n I_j = 1, \\ & I_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r \geq \frac{1}{(m+s) \max \{y_{rj}\}}, \quad r=1, \dots, s, \\ & v_i \geq \frac{1}{(m+s) \max \{x_{ij}\}}, \quad i=1, \dots, m, \\ & v_0 \text{ is free in sign.} \end{aligned} \quad (6)$$

مدل خروجی محور برای پیدا کردن بهترین واحد کارا، تحت VRS عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m v_i (\sum_{j=1}^n x_{ij}) - \sum_{r=1}^s u_r (\sum_{j=1}^n y_{rj}) - nu_0 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0 - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq I_j, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0 \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^n I_j = 1, \\ & I_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r \geq \frac{1}{(m+s) \max \{y_{rj}\}}, \quad r=1, \dots, s, \\ & v_i \geq \frac{1}{(m+s) \max \{x_{ij}\}}, \quad i=1, \dots, m, \\ & u_0 \text{ is free in sign.} \end{aligned} \quad (7)$$

بنابر وانگ و جیانگ (۲۰۱۲)، مدل‌های (۷)–(۵) همواره شدنی و جواب بهینه‌ای دارند. در تمامی این مدل‌ها هیچگونه تعریف دقیقی و صریحی از واحد کارا با بهترین عملکرد (بهین کارا) ارائه نشده است. لذا در بخش بعدی، ابتدا یک تعریف از بهترین DMU کارا ارائه و سپس یک روش را برای تعیین بهترین واحد کارا معرفی می‌نماییم.

۳. تعیین بهترین کارایی

در مدل‌های کلاسیک DEA، تعیین یک واحد یکتا با بهترین عملکرد یکی از موضوعات جذاب و درخور توجه محقق‌هایی است که اخیراً در موضوعات DEA تحقیق می‌کنند. تعدادی از این محققین در دهه اخیر توجه اصلی خود را عمیقاً به این موضوع اختصاص داده‌اند. در بخش قبلی تعدادی از این تحقیقات ارائه شد. در این بخش ابتدا با یک مثال ساده نشان داده می‌شود که ادعای کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) مبنی بر همگرایی الگوریتم ارائه‌شده در خصوص یافتن DMU ای با بهترین عملکرد در بعضی حالات برقرار نیست.

مثال ساده ذیل، متشکل از سه DMUی A، B و C را با سه خروجی و یک ورودی در نظر بگیرید. داده‌ها در جدول ۱ گزارش شده‌اند. با به کار بردن روش کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) (مدل (۴)) برای داده‌های مورد نظر و دو انتخاب اندازه مرحله مختلف (۰،۰،۱،۰،۱)، در هر دو حالت خواهیم داشت $d_A = d_B = d_C = 0$ ، که معنای آن این است که A، B و C دارای بهترین عملکرد می‌باشند و در این حالت هیچ تمایزی بین این DMUها وجود ندارد. این نتیجه واضح است؛ زیرا با مشاهده داده‌های ورودی و خروجی به راحتی می‌توان ملاحظه نمود که A، B و C دارای عملکرد یکسان هستند (فرض بر این است که خروجی‌های O_1 ، O_2 و O_3 دارای اهمیت یکسانی هستند). بنابراین نباید هیچ انتظاری برای تمایز بین A، B و C داشت.

به سهولت می‌توان دید که با استفاده از روش (۴) کارساک و آهیسکا (۲۰۰۵) و با انتخاب اندازه‌های مراحل مختلف، خواهیم داشت $d_A = d_B = d_C = 0$.

جدول ۱. داده‌های مربوط به مثال عددی

DMUs	I	O1	O2	O3	d_j
A	1	2	3	4	0
B	1	3	4	2	0
C	1	4	2	3	0

بنابراین فرض می‌کنیم n تا DMU ($DMU_j : j=1, \dots, n$) وجود دارد و هر DMU_j ورودی‌های $x_{ij} : i=1, \dots, m$ را به منظور تولید خروجی‌های $y_{rj} : r=1, \dots, s$ مصرف می‌کند. تصمیم‌گیرنده‌ها غالباً نمره کارایی را به عنوان یک سطح محک مشترک برای $DMU_j : j=1, \dots, n$ در نظر می‌گیرند. این سطح محک انحراف هر DMU_j را از موقعیت ایده‌آل آن روی مرز کارایی اندازه می‌گیرد. فرض کنید یک DMU کارای قوی بوده و دو قید زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + d_j = 1$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - d'_j = 1$$

که در آن $u_r : r=1, \dots, s$ و $v_i : i=1, \dots, m$ به ترتیب نشان‌دهنده وزن r -امین خروجی و i -امین ورودی

است. فاصله موجود بین $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}$ و موقعیت ایده‌آل ۱ را با d_j نمایش می‌دهیم. به طور مشابه فاصله بین

$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}$ و ۱ را با d'_j نمایش می‌دهیم. فاصله‌های بین d_j و d'_j باید مینیمم گردد. برای نیل به این منظور،

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & d_{\max}^{(1)} + d_{\max}^{(2)} \\ \text{s.t.} \quad & d_{\max}^{(1)} \geq d_j, \quad j \in E, \\ & d_{\max}^{(2)} \geq d'_j, \quad j \in E, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + d_j = 1, \quad j \in E, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - d'_j = 1, \quad j \in E, \\ & v_i \geq \varepsilon, u_r \geq \varepsilon, \quad \forall i, r, \\ & d_j \geq 0, d'_j \geq 0, \quad j \in E. \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن E مجموعه تمام DMUهای کارای قوی می‌باشد. قیود $d_{\max}^{(1)} \geq d_j$ و $d_{\max}^{(2)} \geq d'_j$ به این دلیل به قیدها افزوده شده‌اند که مطمئن شویم $d_{\max}^{(1)} = \max_{1 \leq j \leq n} \{d_j\}$ و $d_{\max}^{(2)} = \max_{1 \leq j \leq n} \{d'_j\}$ تعریف می‌کنیم

$$E_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}}$$

E_j عبارت است از حاصل تقسیم مجموعه وزنی خروجی‌ها به مجموع وزنی ورودی‌های DMU_j در حالی که وزن‌های بهینه حاصل از مدل (۸) می‌باشند. حال اندازه کارایی نسبی DMU_o به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_o = \frac{E_o}{\max_{1 \leq j \leq n} \{E_j\}}$$

بدیهی است که $0 < C_o \leq 1$.

تعریف ۱. DMU_p بهترین واحد کارایی (بهین کارا) نامیده می‌شود اگر و فقط اگر $C_o = 1$. اندازه نسبی C_p مستقیماً به DMU_p وابسته است و لذا به طور منطقی می‌توان از آن برای تمایز عملکرد DMUها استفاده نمود. به عبارت دیگر $C_p < C_q$ ، به معنای آن است که عملکرد DMU_q بهتر از عملکرد DMU_p است.

بهترین DMU کارا (بهین کارا)، صرف‌نظر از نوع تکنولوژی، باید بهره‌ورترین اندازه مقیاس را در تکنولوژی خود داشته باشد. بنابراین در تعیین بهترین DMU کارا، DMUای که MPSS^۹، یعنی بهره‌ورترین اندازه مقیاس را نسبت به سایرین دارد، پیدا می‌شود. در ذیل نشان می‌دهیم که بهترین DMU کارا (بهین کارا) یک MPSS است.

قضیه ۱. اگر $C_p = 1$ آن گاه DMU_p یک MPSS است.

برهان: فرض کنید $(v_i^*, u_r^*, d_j^*, d'_j^*, d_{\min}^*, d_{\max}^*)$ یک جواب بهینه مدل (۸) باشد. آن‌گاه خواهیم داشت

$$\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} + d_j^* = 1$$

$$\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij} - d'_j^* = 1$$

یا به طور معادل

$$\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij} \geq 1$$

با ترکیب دو نامساوی فوق، خواهیم داشت

$$\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij} \leq 0$$

⁹ Most Productive Scale Size

معنای آن این است که یک (u^*, v^*) جواب شدنی برای مدل CCR چارنز، کوپر و رودز (۱۹۷۸) است. از طرفی

$$C_p = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rp}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ip}} = 1$$

$$\text{Max}_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \right\}$$

پس $C_p = 1$ و DMU_p یک MPSS است.

در بخش بعدی با مثال عددی و تحلیل شبیه‌سازی‌شده، مقایسه‌ای بین تحقیقات موجود و بحث این مقاله انجام می‌شود.

۴. مثال عددی

برای نشان دادن کاربرد عملی مدل ارائه‌شده به جهت تعیین بهترین عملکرد (بهین کارا) از داده‌های دنیای واقعی موجود در وانگ و جیانگ (۲۰۱۲) استفاده شده است. دوازده سیستم تولید قابل انعطاف (FMSs^{۱۰}) با دو ورودی را تحت بررسی قرار می‌دهیم:

سرمایه و فضای موردنیاز ورودی‌ها و کیفیت، کار در جریان (WIP^{۱۱})، میانگین تعداد کارهای عقب افتاده و میانگین دستاورد، چهار خروجی می‌باشند.

جدول ۲ داده‌های ورودی/خروجی برای FMS۱۲

FMSs	ورودی		خروجی			
	سرمایه	فضای موردنیاز	کیفیت	کار در جریان	کارهای عقب افتاده	دستاورد
1	17.02	5	42	45.3	14.2	30.1
2	16.46	4.5	39	40.1	13	29.8
3	11.76	6	26	39.6	13.8	24.5
4	10.52	4	22	36	11.3	25
5	9.5	3.8	21	34.2	12	20.4
6	4.79	5.4	10	20.1	5	16.5
7	6.21	6.2	14	26.5	7	19.7
8	11.12	6	25	35.9	9	24.7
9	3.67	8	4	17.4	0.1	18.1
10	8.93	7	16	34.3	6.5	20.6
11	17.74	7.1	43	45.6	14	31.1
12	14.85	6.2	27	38.7	13.8	25.4

در جدول (۳) نتایج مدل‌های (۵)–(۳) بر روی داده‌های جدول (۲) خلاصه شده است.

¹⁰ Flexible manufacturing systems

¹¹ Work in process

جدول ۳. نتایج مدل‌های مختلف

DMU	CCR	AP	مدل (۵)	مدل (۶)	مدل (۷)	C_o
1	1	1.0456	0	0	0	0.9805
2	1	1.0932	0	0	0	0.9676
3	0.9824	0.9824	0	0	0	0.8335
4	1	1.1345	0	1	1	0.9940
5	1	1.1597	1	0	0	1.0000
6	1	1.0279	0	0	0	0.5909
7	1	1.0602	0	0	0	0.6457
8	0.9614	0.9614	0	0	0	0.7777
9	1	1.4317	0	0	0	0.3461
10	0.9535	0.9535	0	0	0	0.6139
11	0.9831	0.9831	0	0	0	0.8162
12	0.8012	0.8012	0	0	0	0.7471

مدل AP، واحد DMU_9 را به عنوان واحد با بهترین رتبه معرفی کرده است. با استفاده از اولین مدل وانگ و جیانگ (۲۰۱۲)، ((۵)، DMU_5 دارای بهترین عملکرد می‌باشد، درحالی که مدل‌های (۶) و (۷) حکایت از این دارد که DMU_4 بهترین رتبه را خواهد داشت. این اختلاف نتایج ناشی از عدم وجود یک تعریف برای بهترین DMU کارا می‌باشد. مقیاس مقایسه C_o برای هر DMU_o در ستون آخر جدول ۳ لیست شده است. همچنان که از جدول ملاحظه می‌کنیم، $C_5 = 1$ ، و به کمک تعریف ۱، DMU_5 دارای بهترین رتبه در بین DMUها است. جالب است که DMU_5 دومین رتبه DMUها را به کمک مدل AP احراز کرده بود.

۵. تحلیل شبیه‌سازی

برای کمک به مقایسه بین پژوهش‌های موجود، یک مقایسه شبیه‌سازی شده انجام می‌شود. برای این منظور دو مدل تولید وابسته به تعداد ورودی‌ها و با بازده به مقیاس به صورت ذیل در نظر می‌گیریم:

$$\text{مدل ۱: } y = x_1^{0.2} x_2^{0.2} x_3^{0.2} x_4^{0.2}$$

$$\text{مدل ۲: } y = x_1^{0.5} x_2^{0.5} x_3^{0.2} x_4^{0.2} x_5^{0.2}$$

مدل‌های (۲) و (۳) به ترتیب با افزایش و کاهش بازده به مقیاس در نظر گرفته می‌شوند. امتیاز کارایی درست به صورت $\gamma = \exp(-|\rho|)$ محاسبه می‌شود که در آن ρ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۳/۱ است. مقدار γ برای DMU_{20} مقدار واحد بوده و برای باقیمانده واحدها نامعین می‌باشد. توجه شود که خروجی‌ها با خروجی مقایسه‌شده به وسیله γ محاسبه می‌شود. همه ورودی‌ها با توزیع یکنواخت احتمالی برای ۳۰ و ۴۰ مشاهده از هر مدل تولید ایجاد شده است.

نمونه ۱:

اولین نمونه متشکل از ۳۰ عدد DMU با چهار ورودی و یک خروجی است. ورودی‌های x_1, x_2, x_3 و x_4 به صورت تصادفی با یک توزیع یکنواخت تصادفی در فاصله (۱۰، ۱۰۰) ایجاد شده‌اند. مجموعه داده‌های شبیه‌سازی شده و نتایج حاصل از مدل‌های مختلف در جدول ۶ ارائه شده است.

جدول ۶. داده‌های شبیه‌سازی شده نمونه ۱

DMU	x_1	x_2	x_3	x_4	y^I	ρ	γ	Real efficiency	y^O	Real Rank
1	47.140	38.233	78.762	83.053	25.959	0.3479	0.706	0.7062	18.331	23
	4	0	8	1	8		2		7	
2	45.640	27.196	52.463	28.147	17.890	0.4256	0.653	0.6534	11.689	27
	7	9	5	2	9		4		7	
3	17.800	40.279	98.849	99.162	23.408	-	0.930	0.9305	21.780	7
	5	2	1	3	1	0.0721	5		4	
4	23.131	62.639	86.349	94.045	25.949	-	0.662	0.6620	17.179	25
	8	9	1	2	6	0.4124	0		5	
5	72.975	89.656	75.620	95.446	34.263	-	0.783	0.7835	26.844	18
	6	1	6	0	4	0.2440	5		1	
6	70.602	92.853	73.041	96.388	34.106	-	0.782	0.7825	26.689	19
	4	2	5	1	9	0.2452	5		9	
7	45.432	93.545	90.993	55.740	29.289	-	0.588	0.5881	17.224	28
	0	3	7	2	6	0.5309	1		5	
8	87.848	54.581	33.904	26.287	21.191	0.2062	0.813	0.8136	17.241	17
	8	1	2	7	3		6		9	
9	66.257	65.449	54.188	43.209	25.195	-	0.920	0.9208	23.199	9
	2	7	4	9	7	0.0826	8		1	
10	62.914	81.070	87.079	45.769	28.948	-	0.911	0.9116	26.388	11
	5	0	7	8	2	0.0926	6		1	
11	80.048	49.604	18.484	60.074	21.324	-	0.968	0.9688	20.659	5
	2	2	5	5	2	0.0317	8		0	
12	42.924	49.576	94.869	15.622	19.942	-	0.911	0.9117	18.180	10
	3	7	2	4	1	0.0925	7		7	
13	91.342	11.628	59.242	53.589	20.210	0.2507	0.778	0.7783	15.729	20
	5	8	2	6	8		3		6	
14	26.144	85.195	42.364	69.506	23.086	0.0149	0.985	0.9852	22.745	2
	9	5	0	5	9		2		2	
15	62.337	55.457	73.140	68.281	28.017	-	0.880	0.8807	24.675	14
	7	3	4	5	8	0.1270	7		9	
16	45.308	40.861	67.344	74.291	24.737	0.1460	0.864	0.8641	21.376	15
	4	5	9	2	0		1		0	
17	91.814	66.493	38.699	94.402	29.490	0.0186	0.981	0.9815	28.945	4
	9	4	9	3	1		5		5	
18	82.176	23.667	51.389	46.679	21.566	-	0.658	0.6580	14.190	26
	9	4	5	0	5	0.4185	0		8	
19	65.350	41.018	18.036	62.675	19.783	0.1688	0.844	0.8447	16.711	16
	8	1	7	6	2		7		1	
20	83.368	77.392	32.272	86.036	28.225	0.3395	0.712	0.7121	20.100	22
	9	2	7	0	6		1		0	
21	36.752	21.873	79.872	75.271	21.719	0.0163	0.983	0.9838	21.368	3
	5	8	4	8	4		8		2	
22	77.430	11.277	87.601	93.506	23.490	0.5869	0.556	0.5560	13.061	29
	6	2	6	9	6		0		6	
23	80.754	90.356	53.781	63.018	30.105	0.3147	0.730	0.7300	21.977	21
	1	5	9	9	5		0		5	
24	33.148	95.097	49.675	87.357	26.743	0.1166	0.890	0.8900	23.800	13
	9	2	6	1	3		0		7	
25	66.968	54.391	15.713	38.894	18.599	0.0702	0.932	0.9322	17.339	6
	6	6	1	9	9		2		7	
26	89.131	10.406	41.652	34.582	16.794	-	0.896	0.8961	15.049	12
	4	5	6	7	5	0.1097	1		3	
27	75.074	92.949	64.741	47.752	29.294	-	0.466	0.4668	13.675	30
	0	3	1	9	3	0.7618	8		6	
28	74.618	18.127	34.904	98.758	21.563	0.0815	0.921	0.9217	19.876	8
	1	4	0	5	8		7		3	
29	11.263	16.699	21.071	82.286	12.667	0.0102	0.989	1.0000	12.667	1
	5	1	8	8	2		8		2	
30	31.553	22.294	47.662	44.132	17.140	0.3830	0.681	0.6818	11.687	24
	1	1	3	8	9		8		0	

کارایی فنی حاصل از مدل (۱) در ستون دوم جدول ۷ آورده شده است و مشاهده می‌شود که ۱۲ واحد کارایی CCR هستند. پنج ستون آخر جدول نتایج پژوهش‌های مختلف را نشان می‌دهد.

جدول ۷ نتایج مدل‌های مختلف						
DMU	CCR	AP	مدل (۵)	مدل (۶)	مدل (۷)	C_o
1	0.7405	0.7405	0	0	0	0.7275
2	0.8201	0.8201	0	0	0	0.7500
3	1	1.1884	0	0	0	0.8373
4	0.7163	0.7163	0	0	0	0.6349
5	0.7978	0.7978	0	0	0	0.7908
6	0.7947	0.7947	0	0	0	0.7867
7	0.641	0.641	0	0	0	0.5905
8	1	1.1754	0	0	0	0.8319
9	1	1.0514	0	0	0	0.9927
10	0.9932	0.9932	0	0	0	0.9379
11	1	1.1317	0	0	0	0.9784
12	1	1.8414	0	0	0	0.8746
13	0.9677	0.9677	0	0	0	0.7117
14	1	1.2012	0	0	0	1.0000
15	0.9456	0.9456	0	0	0	0.9362
16	0.9358	0.9358	0	0	0	0.9211
17	1	1.0001	0	0	0	0.9746
18	0.7593	0.7593	0	0	0	0.6792
19	0.9191	0.9191	0	0	0	0.8799
20	0.727	0.727	0	0	0	0.7062
21	1	1.3105	1	0	0	0.9814
22	0.8705	0.8705	0	0	0	0.4731
23	0.7629	0.7629	0	0	0	0.7518
24	0.8842	0.8842	0	0	0	0.8824
25	1	1.1904	0	0	0	0.9718
26	1	1.3789	0	0	0	0.8365
27	0.5198	0.5198	0	0	0	0.4777
28	1	1.1853	0	1	1	0.8622
29	1	1.7061	0	0	0	0.9420
30	0.8031	0.8031	0	0	0	0.7859

همچنان که در ستون آخر ملاحظه می‌شود، DMU_{14} بهترین رتبه را در تحلیل دارا است. علی‌رغم اینکه، مدل‌های (۶) و (۷)، DMU_{28} را کاراترین واحد معرفی می‌کنند. نکته جالب این است که DMU_{14} ، پنجمین رتبه و DMU_{28} هشتمین رتبه را دارا است و این نشان‌دهنده پایین بودن خطای نتایج این تحقیق نسبت به پژوهش‌های موجود است.

نمونه ۲:

دومین مدل تولید برای ۴۰ مشاهده استفاده می‌شود. ورودی‌های x_1, x_2, x_3, x_4 و x_5 به طور یکنواخت به صورت ذیل تولید شده‌اند:

$$x_1, x_2, x_3 \in [10, 50]$$

$$x_4, x_5 \in [40, 70]$$

داده‌ها و نتایج آن در جدول ۸ گزارش شده است. y^I خروجی مشاهده شده و y^O خروجی واقعی می‌باشد.

جدول ۸. داده‌های شبیه‌سازی شده تحت IRS^{12}

DMU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y^I	ρ	γ	Real efficiency	y^O	Real rank
1	46.4354	36.1629	45.6188	40.6894	44.5293	394.4668	-0.0362	0.9644	0.9644	380.4430	4
2	11.3086	42.1299	15.8168	52.6640	51.5149	184.2949	-0.2266	0.7972	0.7972	146.9255	24
3	46.8358	25.9514	26.8377	65.9981	58.5904	351.2288	-0.3463	0.7073	0.7073	248.4124	34
4	45.2355	39.5883	29.7577	52.0405	44.4560	392.7327	0.3920	0.6757	0.6757	265.3769	35
5	33.9924	33.7556	46.9677	57.6537	67.0098	381.6076	-0.2177	0.8044	0.8044	306.9599	23
6	40.1132	11.4576	37.7181	59.7385	46.9665	216.8245	-0.0568	0.9448	0.9448	204.8606	7
7	20.1407	22.9899	22.8959	63.9463	68.3126	215.1893	-0.2127	0.8084	0.8084	173.9554	21
8	41.3962	20.5216	11.4356	58.0410	67.2954	248.0741	-0.1122	0.8938	0.8938	221.7387	13
9	17.3122	33.3357	35.7698	42.8071	45.3670	223.3499	0.1418	0.8678	0.8678	193.8303	16
10	42.5657	23.0705	49.3298	51.9324	62.6527	344.4733	-0.3166	0.7286	0.7286	250.9802	31
11	15.8730	34.3233	42.6011	54.9959	66.7855	255.2761	0.0160	0.9841	0.9841	251.2204	3
12	33.2795	15.5544	23.2682	69.3051	62.2333	227.6801	-0.1826	0.8331	0.8331	189.6749	18
13	24.0629	27.1990	29.2560	56.7006	61.0340	256.4635	-0.1138	0.8925	0.8925	228.8818	14
14	44.6104	26.2236	21.6153	52.3920	51.2091	306.7183	0.1830	0.8327	0.8327	255.4141	19
15	44.9510	35.7711	32.7680	55.2293	54.7276	400.2220	-0.0749	0.9279	0.9279	371.3544	10
16	17.5991	23.0387	44.7154	58.7588	63.3064	222.9308	-0.0071	0.9929	1.0000	222.9308	1
17	12.3280	31.6962	46.5636	51.3511	46.8813	202.2406	0.3230	0.7240	0.7240	146.4225	32
18	44.2845	40.4611	34.9873	52.7290	51.6779	419.2739	-0.0135	0.9866	0.9866	413.6475	2
19	29.0106	33.8044	39.8276	50.6937	44.4523	306.4585	-0.6214	0.5372	0.5372	164.6290	39
20	37.5570	25.9343	49.2126	40.3928	61.2867	324.6625	0.4142	0.6609	0.6609	214.5683	36
21	34.8286	29.5831	16.6616	68.0306	60.1395	297.3078	-0.6097	0.5435	0.5435	161.5889	38
22	42.9405	36.9381	30.3314	61.7206	54.6397	400.0708	0.3149	0.7298	0.7298	291.9889	30
23	42.3228	14.8158	16.9973	66.1867	59.7595	231.2924	0.2677	0.7652	0.7652	176.9754	26
24	36.2838	46.4623	35.2412	60.8014	40.3058	398.7245	-0.0971	0.9074	0.9074	361.8181	12
25	40.7089	39.6554	24.4804	49.3158	62.4705	379.7452	-0.0492	0.9520	0.9520	361.5035	6
26	21.8632	23.5734	28.5626	68.5260	63.8337	237.3604	-0.1241	0.8833	0.8833	209.6619	15
27	28.1451	31.0382	21.5519	52.2208	51.2787	264.7909	0.4448	0.6410	0.6410	169.7232	37
28	20.0674	31.4411	45.2879	59.7668	47.3400	263.9545	-0.6654	0.5141	0.5141	135.6882	40
29	33.6604	37.3788	43.9891	66.9924	42.5324	371.0993	-0.0931	0.9111	0.9111	338.1261	11

¹² Increasing returns to scale

30	18.0325	32.7778	42.4253	58.2260	60.7831	263.7074	-0.0733	0.9293	0.9293	245.0690	8
31	38.2980	36.8429	40.9043	69.2438	60.0772	417.7692	0.0745	0.9282	0.9282	387.7920	9
32	15.0844	37.0956	46.4464	45.2113	68.6349	254.4917	0.2659	0.7665	0.7665	195.0720	25
33	45.1219	30.2997	46.9836	42.3466	41.3312	355.5669	-0.0382	0.9625	0.9625	342.2446	5
34	32.7595	10.5127	44.3297	52.4937	44.0229	186.4756	-0.2762	0.7587	0.7587	141.4739	28
35	24.6733	29.1827	26.2774	63.1599	47.3336	255.6907	-0.3392	0.7123	0.7123	182.1375	33
36	41.3950	42.0530	46.4049	52.8004	42.1186	419.8627	-0.2718	0.7620	0.7620	319.9391	27
37	41.2998	11.9642	36.3216	60.4352	45.6783	222.4068	0.3091	0.7341	0.7341	163.2718	29
38	46.9836	25.4265	13.9393	43.2237	59.4839	281.5067	-0.2022	0.8169	0.8169	229.9727	20
39	31.4643	25.9331	12.6991	41.2232	52.9066	220.9636	0.1666	0.8465	0.8465	187.0462	17
40	27.9559	17.3025	38.5836	65.5358	49.8871	230.3904	-0.2132	0.8080	0.8080	186.1504	22

بهترین عملکرد کارایی در این نمونه واحد DMU_{16} است. با استفاده از تحقیق انجام‌شده توسط وانگ در (۲۰۱۲) و مدل‌های مطرح‌شده در آن دو واحد به عنوان کارا انتخاب می‌شوند. اولین مدل آنها یعنی مدل DMU_{18} (۵) را به عنوان کارا معرفی می‌نماید. جالب است که دومین و سومین مدل آنها یعنی مدل‌های (۶) و (۷) DMU_2 را به عنوان DMU کارا معرفی می‌کند. با این وجود مدل AP (۲)، واحد DMU_6 را کارای قوی معرفی می‌کند.

جدول ۹. نتایج مدل‌های مختلف

DMU	CCR	AP	مدل (۵)	مدل (۶)	مدل (۷)	C_o
1	1	1.1569	0	0	0	1.0000
2	1	1.1258	0	1	1	0.3903
3	0.85	0.8491	0	0	0	0.5598
4	0.75	0.7513	0	0	0	0.6808
5	0.89	0.8926	0	0	0	0.6406
6	1	1.3102	0	0	0	0.5492
7	0.82	0.8204	0	0	0	0.3927
8	1	1.1889	0	0	0	0.5168
9	0.88	0.8803	0	0	0	0.5574
10	0.87	0.8666	0	0	0	0.5633
11	1	1.1645	0	0	0	0.5519
12	0.96	0.9568	0	0	0	0.4405
13	0.89	0.8873	0	0	0	0.5459
14	0.92	0.9214	0	0	0	0.6637
15	0.99	0.9881	0	0	0	0.8653
16	1	1.0758	0	0	0	0.5121
17	0.79	0.7885	0	0	0	0.3903
18	1	1.0998	1	0	0	0.9810
19	0.55	0.5472	0	0	0	0.4401
20	0.73	0.733	0	0	0	0.5135
21	0.61	0.6147	0	0	0	0.3699
22	0.78	0.7762	0	0	0	0.6654
23	0.97	0.9686	0	0	0	0.4253
24	1	1.0997	0	0	0	0.9027
25	1	1.138	0	0	0	0.8249
26	0.89	0.892	0	0	0	0.4731
27	0.64	0.6381	0	0	0	0.4504
28	0.55	0.5514	0	0	0	0.3427
29	1	1.015	0	0	0	0.8188
30	0.96	0.9644	0	0	0	0.5583

31	1	1.0364	0	0	0	0.8097
32	0.89	0.8922	0	0	0	0.4335
33	1	1.04	0	0	0	0.9417
34	0.8	0.8044	0	0	0	0.4051
35	0.71	0.7119	0	0	0	0.4737
36	0.87	0.8651	0	0	0	0.7996
37	0.8	0.7988	0	0	0	0.4406
38	1	1.0055	0	0	0	0.5922
39	0.89	0.8857	0	0	0	0.5373
40	0.88	0.8784	0	0	0	0.4717

با نگاه به آخرین ستون جدول ۹، ملاحظه می‌شود که در روش پیشنهادی DMU_1 به عنوان بهترین کارا معرفی می‌نماید، درحالی که چهارمین رتبه را در بین DMU ها دارد.

۶. نتایج

مدل‌های DEA کلاسیک یک سطح معیار برای هریک از DMU ها به کار می‌برند که غالباً منجر به این حالت می‌گردد که بیش از یک واحد به عنوان واحد کارا معرفی گردد. مساله تعیین بهترین DMU کارا در متون DEA یک موضوع مهم می‌باشد که در میان تحقیقات DEA بسیار مورد توجه است. این مقاله یک روش را برای تعیین بهترین DMU کارا در میان DMU های نمونه معرفی می‌کند. برای این منظور یک مقیاس اندازه‌گیری برای هر DMU معرفی و با استفاده از این مقیاس تمایز DMU ها مشخص می‌شود.

روش مطرح‌شده یک مساله برنامه‌ریزی خطی را برای این منظور استفاده می‌کند که از این رو محاسباتش نسبت به سایر روش‌های موجود کم‌تر و ساده‌تر است. مثال‌های عددی تمایز بین این روش و روش‌های موجود را آشکار ساخت. در مقایسه تحقیقات مختلف (روش ابرکارایی، روش پیشنهادی و روش تعیین بهترین کارایی)، یک موضوع مهم این است که هیچکدام از این روش‌ها بر دیگری ارجحیت ندارند. تحقیق‌های مختلف واحدهای مختلفی را به عنوان بهترین عملکرد تعیین می‌کنند. در این تحقیق فرمولی برای تعریف بهترین DMU کارا ارائه شده است و یک MPSS از PPS به عنوان بهترین عملکرد معرفی می‌شود. نمی‌توان تضمین نمود که که تحقیق حاضر بهترین DMU کارای واقعی را می‌دهد، اما همچنان که مثال‌ها نشان می‌دهند، بهترین عملکرد تعیین‌شده در تحقیق حاضر بهترین رتبه را در میان تحقیقات مختلف دارا می‌باشد.

توسعه روش پیشنهادی برای رتبه‌بندی و تحلیل عملکرد سیستم‌های پویا موضوع جالبی برای تحقیقات آتی می‌باشد. همچنین بررسی عملکرد روش پیشنهادی برای موقعیت‌هایی که خروجی نامطلوب و عوامل نادقیق حضور دارند می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد.

منابع

1. Ahadzadeh Namin, M., Khamseh. E., Ranking Efficient DMUs in Two-stage Network DEA with Common Weights method. *Journal of New Researches in Mathematics* 3 (11) (2017) 5-18.
2. Amin G.R., Comments on finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated mode, *Computers and Industrial Engineering*, 56 (4) (2009) 1701–1702.
3. Amin G.R., Toloo M., Finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated model, *Computers and Industrial Engineering*, 52 (2) (2007) 71–77.
4. Andersen P., Petersen N. C., A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science*, 39 (1993) 1261-1264.
5. Banker R. D., Chang H., The super-efficiency procedure for outlier identification, not for ranking efficient units. *European Journal of Operational Research* 175(2006) 1311-1320
6. Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W., Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis, *Management Science*, 30 (1984) 1078–1092.
7. Bodaghi, Z., Ahadzadeh Namin, M., Shahverdiani, S., Analysis of Common Weighting Method in Data Envelopment Analysis Based on Customer Satisfaction of Companies Active in Tehran Stock Exchange. *Financial Engineering and Portfolio Management* 10 (38) (2019) 19-41.
8. Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., Measuring the efficiency of decision-making units, *European Journal of Operational Research*. 2 (1978) 429–444.
9. Ertay T., Ruan D., Tuzkaya U.R., Integrating data envelopment analysis and analytic hierarchy for the facility layout design in manufacturing systems, *Information Sciences*, 176 (2006) 237–262.
10. Fernandez-Castro A., Smith P., Towards a general non-parametric model of corporate performance, *Omega*, 22 (1994) 237-249.
11. Foroughi A. A., A new mixed integer linear model for selecting the best decision making units in data envelopment analysis. *Computers and Industrial Engineering*, 60 (2011) 550–554.
12. Foroughi A. A., A note on “A new method for ranking discovered rules from data mining by DEA and a full ranking approach”. *Expert Systems with Applications*, 38 (2011) 12913–12916.
13. Ghorban Shiroudi, H., & Hosseinzadeh Lotfi, F. A model for finding the most efficient DMU in DEA. *International Journal of Applied Operational Research*, 8(1) (2018) 47-55.
14. Karsak, E. E., & Ahiska, S. S. Practical common weight multi-criteria decision-making approach with an improved discriminating power for technology selection. *International Journal of Production Research*, 43(8) (2005) 1537-1554.

15. Karsak, E. E., & Ahiska, S. S. Improved common weight MCDM model for technology selection. *International Journal of Production Research*, 46(24) (2008) 6933-6944.
16. Majdi, M., Ebrahimnejad, A. & Azizi, A. Common-weights fuzzy DEA model in the presence of undesirable outputs with ideal and anti-ideal points: development and prospects. *Complex & Intelligent Systems*, (2023).
17. Mohammadi, S., Mirdehghan, S. M., & Jahanshahloo, G. Finding the most preferred decision-making unit in data envelopment analysis. *Advances in Operations Research*, (2016) 1-8. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/7171467>
18. Noori, Z., Zhiani Rezai, H., Davoodi, A., & Kordrostami, S. Finding the most efficient DMU in DEA: A model-free procedure. *Control and Optimization in Applied Mathematics*, 7(1) (2022) 15-29.
19. Pourhabib Yekta, A., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., Kazemi Matin, R., Data envelopment analysis with common weights: the weight restriction approach. *Mathematical Sciences*, 12 (2018) 197–203.
20. Toloo M., Nalchigar S., A new integrated DEA model for finding most BCC-efficient DMU, *Applied Mathematical Modelling*, 33 (2009) 597–604.
21. Toloo M., On finding the most BCC-efficient DMU: A new integrated MIP–DEA model, *Applied Mathematical Modelling*, 36 (2012) 5515–5520.
22. Toloo, M., & Tavana, M. A novel method for selecting a single efficient unit in data envelopment analysis without explicit inputs/outputs. *Annals of Operations Research*, 253(1) (2017) 657-681.
23. Toloo, M., Nalchigar, S., & Sohrabi, B. Selecting most efficient information system projects in presence of user subjective opinions: a DEA approach. *Central European Journal of Operations Research*, 26(4) (2018) 1027-1051.
24. Vakili, J. Finding the most efficient decision making unit in data envelopment Analysis. *Journal of New Researches in Mathematics*, 2(8) (2017) 37-44.
25. Wang Y. M., Jiang P., Alternative mixed integer linear programming models for identifying the most efficient decision making unit in data envelopment analysis, *Computers & Industrial Engineering*, 62(2) (2012), 546-553.