

حرکت اعضای گروه‌های جایگشتی دووجهی متناهی

مهدی رضائی*

گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۳/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۲۰

چکیده

فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی یک مجموعه Ω باشد به طوری که هیچ نقطه ثابتی در Ω نداشته باشد و فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر برای هر زیرمجموعه Γ از Ω و هر $g \in G$ از اندازه‌های $|\Gamma^g - \Gamma|$ کراندار باشند، آن‌گاه حرکت Γ و حرکت g به ترتیب با نمادهای $\text{move}(\Gamma)$ و $\text{move}(g)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند: $\text{move}(\Gamma) := \max\{|\Gamma^g - \Gamma| \mid g \in G\}$ و $\text{move}(g) := \max\{|\Gamma^g - \Gamma| \mid \Gamma \subseteq \Omega\}$. اگر برای هر زیرمجموعه Γ از Ω داشته باشیم $\text{move}(\Gamma) \leq m$ ، آن‌گاه با حرکت کراندار m نامیده شده و حرکت G به صورت زیر تعریف می‌شود: $\text{move}(G) := \max\{|\Gamma^g - \Gamma| \mid \Gamma \subseteq \Omega, g \in G\}$. در این مقاله به بررسی حرکت اعضای گروه دووجهی از مرتبه $2n$ که با نماد D_n نشان داده می‌شود، می‌پردازیم. برای این کار ابتدا نشان می‌دهیم که این گروه روی مجموعه $\{1, \dots, n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. سپس ساختار دوری اعضای این گروه‌ها و حرکت این اعضا تعیین می‌شوند. در انتها، حالتی که n یک عدد اول فرد باشد بررسی می‌شود و نشان می‌دهیم که حرکت تمامی عناصر گروه دووجهی در این حالت یکسان می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: حرکت، گروه دووجهی، انتقالی، دور.

۱- مقدمه

برای اولین بار پرگر^۱ تعریف جدیدی را در مورد دسته‌های خاص از گروه‌های جایگشتی در [4] عنوان نمود و آن را حرکت یک گروه جایگشتی نامید. برای یک گروه جایگشتی G روی یک مجموعه Ω ، اگر برای زیرمجموعه Γ از Ω و هر $g \in G$ اندازه‌های $|\Gamma^g - \Gamma|$ کراندار باشند، آن‌گاه حرکت Γ و حرکت g به ترتیب با نمادهای $\text{move}(\Gamma)$ و $\text{move}(g)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{move}(\Gamma) := \max \left\{ |\Gamma^g - \Gamma| \mid g \in G \right\}$$

و

$$\text{move}(g) := \max \left\{ |\Gamma^g - \Gamma| \mid \Gamma \subseteq \Omega \right\}.$$

اگر برای هر زیرمجموعه Γ از Ω عدد صحیح مثبت m موجود باشد که $\text{move}(\Gamma) \leq m$ ، آن‌گاه G را با حرکت کراندار m گویند و حرکت G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{move}(G) := \max \left\{ |\Gamma^g - \Gamma| \mid \Gamma \subseteq \Omega, g \in G \right\}$$

پرگر در [4] ثابت کرده است که درجه، طول و تعداد مدارهای گروه‌های با حرکت کراندار m ، محدود به تابعی از m می‌باشند. گروه جایگشتی G روی یک مجموعه Ω انتقالی عمل می‌کند، هرگاه برای هر دو نقطه α و β از Ω ، عضو $g \in G$ موجود باشد به طوری که $\alpha^g = \beta$. اگر هر عضو غیر همانی G دارای حرکت یکسان m باشد، آن‌گاه G را با حرکت یکسان m گویند. به وضوح هر گروه جایگشتی با حرکت یکسان، با حرکت کراندار نیز می‌باشد، ولی لزوماً عکس این مطلب صحیح نیست. به عنوان مثال گروه متقارن S_4 در عمل انتقالی خود روی مجموعه

$\{1, 2, 3, 4\}$ دارای حرکت کراندار ۲ است ولی

حرکت تمامی اعضای آن ۲ نیست و لذا یک گروه با حرکت یکسان نمی‌باشد. مفهوم حرکت یکسان برای اولین بار در [1] بیان شد.

یک جایگشت $(a_1 \dots a_n)$ که در آن a_i ها اعداد طبیعی هستند را یک دور به طول n می‌نامیم.

می‌گوییم عضو $g \in G$ یک نقطه مانند α از Ω را ثابت نگه می‌دارد، هرگاه $\alpha^g = \alpha$. به طور کلی

مجموعه تمام نقاط ثابت g در Ω را با $\text{fix}(g)$ نشان می‌دهیم. اگر در تجزیه g به حاصلضرب

دوره‌های مجزا، t_1 دور به طول ۱، t_2 دور به طول ۲، ... و در نهایت t_n دور به طول n ظاهر شود،

گوییم g دارای ساختار دوری (t_1, \dots, t_n) می‌باشد. ساختار دوری عضو g را با $cs(g)$

نشان می‌دهیم. گروه دووجهی از مرتبه $2n$ با نماد D_n نشان داده شده و به صورت

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

می‌شود. می‌دانیم که اعضای D_n به صورت زیر

می‌باشند: $\{1, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$.

گروه $G = K \rtimes H$ که به صورت ضرب نیم مستقیم زیرگروه نرمال K و زیرگروه H از گروه

G نوشته می‌شود را یک گروه فروبنیوس روی یک مجموعه Ω گویند، هرگاه G روی Ω انتقالی

عمل کند و در این عمل، تنها عضو همانی، بیش از یک نقطه را ثابت نگه دارد. یعنی، برای هر

$g \in G$ $1 \neq g$ داشته باشیم $|\text{fix}(g)| \leq 1$.

می‌دانیم که گروه دووجهی از مرتبه $2n$ ، برای n های فرد، یک گروه فروبنیوس است. ([2] را

ببینید). هدف این مقاله محاسبه حرکت اعضای گروه دووجهی D_n در نمایش جایگشتی انتقالی آن

روی مجموعه $\{1, \dots, n\}$ می‌باشد. منظور از $[x]$

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

۲- نتایج مقدماتی

فرض کنیم G یک گروه جایگشتی روی یک مجموعه Ω و g یک عضو غیر همانی G باشد. همچنین فرض کنیم در نمایش g به صورت حاصلضربی از دورهای مجزا، t دور نابدیهی از طول‌های l_1, \dots, l_t وجود داشته باشند. در این صورت می‌توانیم g را به صورت $g = c_1 \dots c_t$ نشان دهیم که در آن برای هر $1 \leq i \leq t$ داریم $c_i = (c_{i_1} \dots c_{i_{l_i}})$ و $|c_i| = l_i$.

فرض کنیم $\Gamma(g)$ یک زیرمجموعه از Ω باشد به طوری که برای هر i شامل $\left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor$ نقاط از $-i$ امین دور g است و همچنین نقاط طوری انتخاب شوند که $\Gamma(g)^g \cap \Gamma(g) = \emptyset$. لذا می‌توانیم $\Gamma(g)$ را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$\Gamma(g) = \left\{ c_{1_2}, c_{1_4}, \dots, c_{1_{k_1}}, c_{2_2}, c_{2_4}, \dots, c_{2_{k_2}}, \dots, c_{t_2}, c_{t_4}, \dots, c_{t_{k_t}} \right\}$$

که در آن اگر l_i فرد باشد، $k_i = l_i - 1$ را در نظر می‌گیریم و اگر l_i زوج باشد، $k_i = l_i$ در نظر گرفته می‌شود.

توجه شود که $\Gamma(g)$ به شکل منحصر به فرد مشخص نمی‌شود و بستگی به نوشتن دورهای g دارد. برای هر زیرمجموعه $\Gamma(g)$ از این نوع، می‌گوییم که $\Gamma(g)$ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور نابدیهی g است. حال می‌توان نتیجه گرفت که

$$|\Gamma(g)^g - \Gamma(g)| = |\Gamma(g)| = \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor.$$

لم بعدی نشان می‌دهد که مقدار فوق، به ازای هر زیرمجموعه دلخواه Γ از Ω ، یک کران بالا برای $|\Gamma^g - \Gamma|$ می‌باشد.

لم ۱.۲: (لم ۱.۲ از [3]) فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی یک مجموعه Ω باشد و $\Gamma \subseteq \Omega$.

در این صورت برای هر $g \in G$ ، $|\Gamma^g - \Gamma| \leq \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor$ که l_i طول i -امین دور g و t تعداد دورهای نابدیهی g در نمایش دور مجزای آن می‌باشد.

به عنوان یک نتیجه مستقیم از لم فوق می‌توان گفت که با در نظر گرفتن نمایش ذکر شده g به صورت حاصلضرب دورهای مجزای از طول‌های l_i ،

$$\text{move}(g) = \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor$$

حال گروه دووجهی D_n را از نگاه هندسی در نظر می‌گیریم. این گروه به عنوان گروه تقارن‌های یک n -ضلعی منظم در نظر گرفته می‌شود و شامل n دوران حول مرکز n -ضلعی به اندازه $\frac{2k\pi}{n}$ رادیان

برای $k \in \{1, \dots, n\}$ در جهت مثلثاتی و n انعکاس نسبت به n محور تقارن n -ضلعی می‌باشد. گروه D_n روی مجموعه رئوس n -ضلعی، که مجموعه $\{1, \dots, n\}$ در نظر می‌گیریم، عمل می‌کند و با توجه به فرد یا زوج بودن n ، مولدهایش تعیین می‌شوند. در واقع، با در نظر گرفتن $b = (1 \ n)(2 \ n-1) \dots (k \ k+1)$ که در آن k یک عدد طبیعی بوده و $n = 2k$ یا $n = 2k+1$ و $a = (1 \dots n)$ می‌توان D_n را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

۳- نتایج اصلی و مثال‌ها

در این بخش، نتایج اصلی این مقاله ارائه می‌گردند. ابتدا در لم زیر نشان می‌دهیم که گروه دووجهی D_n به عنوان یک گروه جایگشتی روی مجموعه $\{1, \dots, n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند.

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت G بجز عنصر همانی، دارای چهار عضو g_1, g_2, g_3, g_4 و g_5 به صورت یک دور به طول ۵ و پنج عضو g_6, g_7, g_8, g_9 به صورت حاصلضرب دو دور به طول ۲ می‌باشد که

$$|\text{fix}(g_1)| = |\text{fix}(g_2)| = |\text{fix}(g_3)| = |\text{fix}(g_4)| = \emptyset$$

و

$$|\text{fix}(g_5)| = |\text{fix}(g_6)| = |\text{fix}(g_7)| = |\text{fix}(g_8)| = |\text{fix}(g_9)| = 1$$

با در نظر گرفتن مجموعه Γ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور از این اعضا، مشاهده می‌شود که $\text{move}(g_1) = \dots = \text{move}(g_9) = 2$ و لذا این گروه با حرکت یکسان ۲ می‌باشد.

حال در گزاره زیر، ساختار دوری اعضای گروه‌های جایگشتی دووجهی D_n برای n های زوج و فرد مشخص می‌گردد.

گزاره ۴.۳: ساختار دوری اعضای گروه جایگشتی دووجهی $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ به صورت زیر می‌باشند:

الف) اگر $n = 2k$ ، آن‌گاه

$$cs(a) = (0, \dots, 0, 1), \quad cs(b) = (0, k, 0, \dots, 0)$$

و

$$cs(a^i) = (0, \dots, 0, \binom{n}{n,i}^{-1}, 0, \dots, 0)$$

و

$$cs(a^i b) = \begin{cases} (0, k, 0, \dots, 0) & \text{زوج} \\ (0, k-1, 0, \dots, 0) & \text{فرد} \end{cases}$$

ب) اگر $n = 2k + 1$ ، آن‌گاه

لم ۱.۳: گروه دووجهی D_n روی مجموعه $\{1, \dots, n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند.

برهان: فرض کنیم i و j دو نقطه در $\Omega = \{1, \dots, n\}$ باشند بطوری که $i < j$. در واقع این دو نقطه، رئوس یک n -ضلعی منظم می‌باشند. در این صورت $(1 \dots i \dots j \dots n)^{j-i}$ یک دوران حول مرکز این n -ضلعی منظم می‌باشد که i را به j منتقل می‌کند.

اکنون مثال‌هایی از گروه‌های جایگشتی دووجهی D_n برای n های زوج و فرد ارائه می‌دهیم و حرکت اعضای آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۲.۳: فرض کنید $G \square D_4 = \langle (1234), (14)(23) \rangle$

که روی مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. در این صورت G بجز عنصر همانی، دارای دو عضو g_1 و g_2 به صورت یک دور به طول ۴، دو عضو g_3 و g_4 به صورت یک دور به طول ۲ و سه عضو g_5, g_6, g_7 به صورت حاصلضرب دو دور به طول ۲ می‌باشد که

$$|\text{fix}(g_1)| = |\text{fix}(g_2)| = |\text{fix}(g_5)| = |\text{fix}(g_6)| = |\text{fix}(g_7)| = \emptyset$$

و $|\text{fix}(g_3)| = |\text{fix}(g_4)| = 2$. لذا با در نظر گرفتن مجموعه Γ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور از این اعضا، مشاهده می‌شود که

$$\text{move}(g_1) = \text{move}(g_2) = \text{move}(g_5) = \text{move}(g_6) = \text{move}(g_7) = 2$$

و $\text{move}(g_3) = \text{move}(g_4) = 1$. در نتیجه این گروه با حرکت کراندار ۲ می‌باشد.

مثال ۳.۳: عمل انتقالی گروه فروبنیوس

$$G \square D_5 = \langle (12345), (15)(24) \rangle$$

می‌توانند ثابت نگه دارند، پس برای i های زوج به صورت k دور به طول ۲ و برای i های فرد به صورت $k-1$ دور به طول ۲ می‌باشند. در نتیجه داریم

$$.cs(a^i b) = \begin{cases} (0, k, 0, \dots, 0) & \text{ج و} \\ (0, k-1, 0, \dots, 0) & \text{فرد} \end{cases}$$

حال فرض کنیم k عددی زوج باشد. در این صورت a جایگشتی فرد و b جایگشتی زوج می‌باشد. از طرفی a^i ها برای i های زوج، جایگشتی زوج و برای i های فرد، جایگشتی فرد هستند. در نتیجه $a^i b$ ها برای i های زوج، جایگشتی زوج و برای i های فرد، جایگشتی فرد هستند. چون از نظر هندسی، $a^i b$ ها حداکثر دو نقطه را می‌توانند ثابت نگه دارند، پس برای i های زوج به صورت k دور به طول ۲ و برای i های فرد به صورت $k-1$ دور به طول ۲ می‌باشند. در نتیجه داریم

$$.cs(a^i b) = \begin{cases} (0, k, 0, \dots, 0) & \text{ج و} \\ (0, k-1, 0, \dots, 0) & \text{فرد} \end{cases}$$

حال فرض کنیم $n = 2k + 1$. چون b به صورت حاصلضرب k دور به طول ۲ می‌باشد داریم

$$.cs(b) = (0, k, 0, \dots, 0)$$

هندسی، $a^i b$ ها حداکثر دو نقطه را می‌توانند ثابت نگه دارند، پس باید به صورت حاصلضرب k دور به طول ۲ باشند. در نتیجه ساختار دوری یکسان با b خواهند داشت.

اکنون قضیه اصلی این مقاله را بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۳: فرض کنید G گروه جایگشتی

دووجهی D_n باشد که روی مجموعه $\Omega = \{1, \dots, n\}$

$$cs(a) = (0, \dots, 0, 1)$$

$$cs(a^i b) = cs(b) = (0, k, 0, \dots, 0)$$

$$cs(a^i) = (0, \dots, 0, (n, i), 0, \dots, 0)$$

برهان: از آنجایی که a یک دوران حول مرکز n -ضلعی به اندازه $\frac{2\pi}{n}$ رادیان در جهت مثلثاتی

می‌باشد، می‌توان نوشت: $a = (1 \dots n)$. پس ساختار دوری a معلوم می‌شود. از طرفی می‌دانیم که a^i

ها دوران‌هایی حول مرکز n -ضلعی به اندازه $\frac{2\pi i}{n}$

رادیان در جهت مثلثاتی می‌باشند که از مرتبه

$\frac{n}{(n, i)}$ هستند. پس به صورت (n, i) دور به طول

$\frac{n}{(n, i)}$ می‌باشند و لذا

$$.cs(a^i) = (0, \dots, 0, (n, i), 0, \dots, 0)$$

فرض کنیم $n = 2k$. از آنجایی که b یک انعکاس نسبت به محور تقارن افقی n -ضلعی می‌باشد، پس b به صورت حاصلضرب k دور به طول ۲ می‌باشد

و لذا $cs(b) = (0, k, 0, \dots, 0)$. ساختار دوری

اعضای $a^i b$ را در دو حالتی که k فرد یا زوج است جداگانه بررسی می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم k فرد

باشد. در این صورت a و b هر دو جایگشتی فرد هستند. همچنین a^i ها برای i های زوج، جایگشتی

زوج و برای i های فرد، جایگشتی فرد هستند. در

نتیجه $a^i b$ ها برای i های زوج، جایگشتی فرد و

برای i های فرد، جایگشتی زوج هستند. از آنجایی که از نظر هندسی، $a^i b$ ها حداکثر دو نقطه را

صورت $\frac{p-1}{2}$ دور به طول ۲ می‌باشند. پس حرکت این اعضا نیز برابر با $\frac{p-1}{2}$ می‌باشد. در نتیجه چون حرکت تمامی عناصر غیر همانی این گروه با هم برابر است، لذا این گروه با حرکت یکسان $\frac{p-1}{2}$ می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان داده شد که گروه جایگشتی دووجهی D_n روی مجموعه $\Omega = \{1, \dots, n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. در ادامه ساختار دوری اعضای این گروه تعیین گردید و با توجه به آن، حرکت اعضای این گروه مشخص شد. در انتها نشان داده شد که گروه جایگشتی دووجهی D_p روی مجموعه $\Omega = \{1, \dots, p\}$ دارای حرکت یکسان می‌باشد.

به صورت انتقالی عمل می‌کند. در این صورت G با حرکت کراندار $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ می‌باشد و با نمادهای گزاره فوق داریم:

$$\text{move}(a) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \text{move}(b) = k \quad \text{و}$$

$$\text{move}(a^i) = (n, i) \left\lfloor \frac{n}{2(n, i)} \right\rfloor \quad \text{که در آن}$$

همچنین $2 \leq i \leq n-1$

الف) اگر $n = 2k$ ، آن‌گاه

$$\text{move}(a^i b) = \begin{cases} k & \text{ج} \\ k-1 & \text{د} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ن} \\ \text{ر} \\ \text{ک} \end{matrix}$$

ب) اگر $n = 2k + 1$ ، آن‌گاه $\text{move}(a^i b) = k$

برهان: با توجه به ساختار دوری اعضای گروه دووجهی D_n ذکر شده در گزاره ۴.۳ و انتخاب مجموعه Γ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور از این اعضا، مقادیر حرکت اعضای این گروه تعیین می‌گردند. همچنین چون برای هر زیرمجموعه Γ از Ω داریم $\text{move}(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ کراندار $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ می‌باشد و قضیه ثابت می‌گردد.

در انتها حرکت حالت خاصی از گروه‌های دووجهی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۶.۳: فرض کنید p عددی اول، فرد و G گروه جایگشتی دووجهی $D_p = \langle a, b \mid a^p = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ باشد که روی مجموعه $\Omega = \{1, \dots, p\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. در این صورت با توجه به اینکه a^i ها از مرتبه p هستند، پس هر یک از آن‌ها به صورت یک دور به طول p می‌باشند. یعنی حرکت این اعضا برابر با $\frac{p-1}{2}$ می‌باشد. از طرفی $a^i b$ ها از مرتبه ۲ هستند و هر یک از این p عضو، به

فهرست منابع

- [1] M. Alaeiyan, H.A. Tavallae. Permutation groups with the same movement. Carpathian J. Math. 25(2):147-156 (2009)
- [2] D. Gorenstein. Finite Groups. Second Edition. Chelsea, New York (1980)
- [3] A. Hassani, M. Khayaty (Alaeiyan), E.I. Khukhro, C.E. Praeger. Transitive permutation groups with bounded movement having maximal degree. J. Algebra 214:317-337 (1999)
- [4] C.E. Praeger. On permutation groups with bounded movement. J. Algebra 144:436-442 (1991)

