دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره پنجاه و دوم، بهمن و اسفند ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ضربگر ۲-پوچ‌توان ۲-گروه‌های پوچ‌توان از رده بیشین

سعید عبدالله عوفی العکبی[۱]، سید هادی جعفری[۲*]

[(۱و۲)] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵

چکیده

مطالعه در خصوص ضربگر شور و ضربگر c- پوچ‌توان گروه‌ها همواره دارای اهمیت ویژه‌ای برای ریاضی‌دانان بوده است. یک دلیل مهم برای این مطالعه آن است که این ساختار ابزاری برای مطالعه و تعیین ایزولوجیسم گروه‌ها و دسته‌بندی p-گروه‌های متناهی به رده‌های ایزولوجیسم می‌باشد.

فرض کنید G یک گروه متناهی با نمایش آزاد F/R باشد که در آن F یک گروه آزاد و R زیرگروهی نرمال از آن است. ضربگر c-پوچ‌توان گروه G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}^{(c)}(G) = (R \cap \gamma_{c+1}(F)) / \gamma_{c+1}(R, F).$$

در حالت خاص $c = 1$ این گروه همان ضربگر شور گروه G است.

در این مقاله قصد داریم با توجه به دسته‌بندی ۲ -گروه‌های متناهی پوچ‌توان از رده بیشین، ضمن بیان و اثبات برخی از روابط تانسوری بین مولدهای حاصلضرب تانسوری سه‌تایی (مکعب تانسوری)، نمایش ساختار حاصلضرب تانسوری سه‌تایی و همچنین ضربگر ۲- پوچ‌توان کلیه ۲- گروه‌های متناهی پوچ‌توان از رده بیشین را برای نخستین بار به دست آوریم.

واژه‌های کلیدی: گروه چهارگان تعمیم‌یافته، گروه دووجهی، گروه نیمه دووجهی، گروه پوچ‌توان، ضربگر ۲-پوچ‌توان.

*عهده‌دار مکاتبات: Email: s.hadi_jafari@yahoo.com

۱- مقدمه

ریشه مفهوم حاصلضرب تانسوری ناآبلی دو گروه دلخواه را می‌توان در توپولوژی جبری و K-تئوری جبری و برخی روابط اولیه آن را در دستاوردهای پژوهش‌های مقدماتی وایتهد [1] و نخستین تعریف اساسی آن را در آثار براون و لودی [2] جستجو کرد. چنانچه هر دو گروه یکسان باشند، مربع تانسوری ناآبلی به دست می‌آید که اولین بار در مطالعات کیت دنیس [3] ارائه شده است و همچنین برخی از نظریه‌های اولیه آن در کارهای میلر [4] مورد بررسی قرار گرفته است. سپس به دلیل اهمیت و ارزش این مفهوم، به عنوان یک موضوع مستقل در نظریه گروه‌ها، مطالعات فراوانی بر روی آن صورت گرفت. به علاوه، تلاش‌هایی نیز در خصوص به دست آوردن ارتباطی معنادار بین نمای یک گروه و نمای مربع تانسوری ناآبلی آن، به انجام رسیده است. اما در حالتی که تعداد دفعات تانسور یک گروه با خودش افزایش می یابد، به دلیل پیچیدگی و ازدیاد محاسبات، مطالعه چندانی صورت نگرفته است.

فرض کنید گروه‌های G و H روی خودشان به صورت مزدوج و روی یکدیگر به صورت سازگار عمل کنند. در این صورت حاصلضرب تانسوری ناآبلی $G\otimes H$ گروهی است که توسط عناصری به صورت $g\otimes h$ تولید می‌شود و در روابط زیر صدق می‌کند:

$$gg'\otimes h=({}^{g}g'\otimes {}^{g}h)(g\otimes h),$$
$$g\otimes hh'=(g\otimes h)({}^{h}g\otimes {}^{h}h'),$$

که در آن $g,g'\in G$ و $h,h'\in H$ و همچنین ${}^{g}g'=gg'g^{-1}$ همان عمل مزدوج در G است. این گروه تعمیمی از حاصل ضرب تانسوری معمولی گروه های آبلی به عنوان $\mathbb{Z}$- مدول می باشد که دارای کاربردهای توپولوژیکی نیز هست و توسط براون و لودی در سال ۱۹۸۷ معرفی شد. برای مطالعه بیشتر به [2] مراجعه کنید. در حالت خاص $G=H$ و با این فرض که همه عمل ها مزدوج باشند، گروه $G\otimes G$ را مربع تانسوری ناآبلی G می نامند. با توجه به ارتباط این مفهوم با سایر موضوعات نظریه گروه‌ها، تاکنون مطالعات فراوانی در مورد خواص جبری این گروه انجام شده است.

چون عمل مزدوج عملی سازگار است، لذا عمل قطری G روی $G\otimes G$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $g,g_1,g_2\in G$ داریم

$${}^{g}(g_1\otimes g_2)={}^{g}g_1\otimes {}^{g}g_2.$$

همچنین مربع تانسوری $G\otimes G$ روی G تحت عمل مزدوج از طریق همریختی القا شده توسط نگاشت جابجاگر $[-,-]:G\otimes G\to G$ عمل می‌کند. بدیهی است که این عمل‌ها سازگار هستند و لذا می‌توانیم حاصلضرب تانسوری ناآبلی سه‌تایی را به صورت

$$\otimes^{3}G=(G\otimes G)\otimes G$$

بسازیم. این گروه اولین بار توسط الیس در [5] معرفی شد.

مربع بیرونی ناآبلی $G\wedge G$ به صورت گروه خارج‌قسمتی $G\otimes G$ به مدول زیرگروه مرکزی $\nabla(G)$ تولید شده توسط مولدهای $g\otimes g$، به ازای هر $g\in G$ تعریف می‌شود. لازم به ذکر است تصویر مولد $g\otimes g'$ در $G\wedge G$ به صورت $g\wedge g'$ نمایش داده می‌شود. همچنین طبق تعریف ۱۱.۲ از مرجع [2] حاصلضرب بیرونی سه‌تایی

$\wedge^3 G=(G\wedge G)\wedge G$ با استفاده از حاصلضرب تانسوری $(G\wedge G)\otimes G$ و با اضافه کردن روابط $(g\wedge g')\otimes[g,g']=1$ به ازای هر $g,g'\in G$ به دست می‌آید.

فرض کنید G یک گروه متناهی با نمایش آزاد F/R باشد که در آن F یک گروه آزاد و R زیرگروهی نرمال از آن است. c-امین ضربگر پوچ‌توان (ضربگر c-پوچ‌توان) گروه G نخستین بار توسط بئر در [6] معرفی شده که آن را با نماد $\mathcal{M}^{(c)}(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}^{(c)}(G)=\frac{R\cap\gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+1}(R,F)};c\geq 1$$

که در آن $\gamma_{c+1}(R,F)=[\gamma_c(R,F),F]$ ، $\gamma_1(R,F)=R$. به سادگی قابل بررسی است که ضربگر c - پوچ‌توان گروهی آبلی و مستقل از انتخاب نمایش آزاد گروه G می‌باشد. به علاوه، در حالت خاص $c=1$، این گروه همان ضربگر شور می‌باشد که در نظریه گروه‌ها جایگاه مهمی دارد. یادآوری می‌کنیم که این ساختار ابزاری برای مطالعه و تعیین ایزولوجیسم گروه‌ها و دسته‌بندی p-گروه‌های متناهی به رده‌های ایزولوجیسم می‌باشد (به مرجع [7] مراجعه نمایید).

در بخش دوم این مقاله به دسته‌بندی ۲-گروه‌های متناهی پوچ‌توان از رده بیشین اشاره می‌کنیم و مطالبی را پیرامون آنها بیان می‌کنیم و نتیجه اصلی این مقاله را در قالب قضیه بیان می‌کنیم.

در بخش سوم، به محاسبه ساختار حاصلضرب تانسوری ناآبلی سه‌تایی و دومین ضربگر ۲-گروه‌های متناهی پوچ توان از رده بیشین اشاره می کنیم و روابطی را بیان و اثبات می‌کنیم و همچنین به اثبات نتیجه اصلی این مقاله اشاره می‌کنیم.

۲- رده‌بندی ۲-گروه‌های پوچ‌توان از رده بیشین

یادآوری می‌کنیم که گروه G را فرادوری گوییم، هرگاه دارای زیرگروهی نرمال و دوری مانند N باشد به طوری که G/N نیز دوری باشد. واضح است که گروه فرادوری G را می‌توان به صورت $G=HN$ نوشت که در آن $H\leq G$ و همچنین $N\lhd G$ و هر دو زیرگروه H و N دوری هستند. اگر $H\cap N=1$، آن‌گاه G گروه فرادوری شکافنده نامیده می‌شود. می توان نشان داد که یک گروه فرادوری شکافنده متناهی دارای نمایش

$$\langle x,y\mid x^m=y^n=1,xyx^{-1}=y^l\rangle,$$

است هرگاه اعداد صحیح m، n و l در رابطه $l^m\overset{n}{\equiv}1$ صدق می‌کنند.

فرض کنید $Q_{2^{n-2}}$ ، $D_{2^{n-1}}$ و $SD_{2^{n-1}}$ به ترتیب گروه چهارگان تعمیم‌یافته، گروه دووجهی و گروه نیمه دووجهی از مرتبه 2^n را نشان دهند که دارای نمایش زیر می‌باشند:

$$Q_{2^{n-2}}=\langle x,y\mid y^{2^{n-1}}=1,x^2=y^{2^{n-2}},xyx^{-1}=y^{-1}\rangle,n\geq 3,\quad(1)$$

$$D_{2^{n-1}}=\langle x,y\mid y^{2^{n-1}}=x^2=1,xyx^{-1}=y^{-1}\rangle,n\geq 2,\quad(2)$$

$$SD_{2^{n-1}}=\langle x,y\mid y^{2^{n-1}}=x^2=1,xyx^{-1}=y^{-1+2^{n-2}}\rangle,n>3.\quad(3)$$

قضیه زیر ۲-گروه‌های از رده بیشین را دسته‌بندی می‌کند:

قضیه ۱.۲. [7، قضیه ۴.۵] فرض کنید P یک ۲-گروه از مرتبه 2^n باشد به طوری که $cl(P)=n-1$. در این صورت P با یکی از گروه‌های $Q_{2^{n-2}}$، $D_{2^{n-1}}$ و $SD_{2^{n-1}}$ یکریخت است.

بنا به قضیه ۶.۳ از [8] واضح است که گروه‌های $Q_{2^{n-2}}$، $D_{2^{n-1}}$ و $SD_{2^{n-1}}$ فرادوری هستند و در میان آنها گروه‌های $D_{2^{n-1}}$ و $SD_{2^{n-1}}$ شکافنده نیز می‌باشند. در ادامه خواهیم دید که می‌توان قضیه ۶.۱ از [9] را برای معرفی ساختار ضربگر ۲-پوچ‌توان گروه های (۲) و (۳) به کار گرفت. از این رو هدف ما در این مقاله محاسبه ضربگر ۲-پوچ‌توان گروه‌های چهارگان تعمیم‌یافته می‌باشد.

قضیه ۲.۲. (قضیه اصلی) فرض کنید گروه‌های $Q_{2^{n-2}}$، $D_{2^{n-1}}$ و $SD_{2^{n-1}}$ هر سه ۲-گروه‌هایی از رده بیشین و با نمایش گفته شده در بالا باشند. در این صورت

$$\otimes^3 D_{2^{n-1}} \cong \begin{cases} (C_2)^8 & n=2, \\ C_{2^{n-1}} \times C_4 \times (C_2)^6 & n>2 \end{cases}$$

$$\otimes^3 SD_{2^{n-1}} \cong \begin{cases} (C_4)^2 \times (C_2)^6 & n=4, \\ C_{2^{n-2}} \times C_{2^3} \times (C_2)^6 & n>4 \end{cases}$$

$$\otimes^3 Q_{2^{n-2}} \cong \begin{cases} (C_2)^8 & n=3, \\ C_{2^{n-2}} \times C_4 \times (C_2)^6 & n>3 \end{cases}$$

$$\wedge^3 G \cong \begin{cases} C_{2^{n-1}} \times C_2 & G=D_{2^{n-1}} \\ C_{2^{n-2}} \times C_2 & G=SD_{2^{n-1}} \\ C_{2^{n-2}} \times C_2 & G=Q_{2^{n-2}} \end{cases}$$

$$\mathcal{M}^{(2)}(G) \cong \begin{cases} C_2 \times C_4 & G=D_{2^{n-1}} \\ C_2 \times C_2 & G=SD_{2^{n-1}} \\ C_2 \times C_2 & G=Q_{2^{n-2}} \end{cases}$$

۳- محاسبه حاصلضرب تانسوری ناآبلی و ضربگر ۲-پوچ‌توان ۲-گروه‌های پوچ‌توان از رده بیشین

در این بخش، قضیه اصلی را اثبات می‌کنیم. بدین منظور با توجه به اینکه از بین ۲-گروه‌های پوچ‌توان از رده بیشین، تنها دو مورد شکافنده هستند، لذا بر این اساس می‌بایست اثبات را برای گروه‌های شکافنده و غیرشکافنده به تفکیک دنبال کرد. برای گروه‌های شکافنده که همان گروه‌های $D_{2^{n-1}}$ و $SD_{2^{n-1}}$ هستند، می‌توان از قضیه اصلی مرجع [9]

استفاده کرده و ساختارهای مورد نظر را مشخص نمود. به علاوه، برای گروه $Q_{2^{n-2}}$ که شکافنده نیست، می‌بایست به طور مستقیم و با استفاده از روابطی کاربردی که در ادامه اثبات خواهیم کرد، ساختارهای مورد نظر را به دست آورد. ابتدا اثبات قضیه اصلی را با بررسی گروه‌های شکافنده $D_{2^{n-1}}$ و $SD_{2^{n-1}}$ انجام می دهیم. این اثبات را با ارائه نتیجه ساختاری زیر آغاز می کنیم.

قضیه ۱.۳. ([9، قضیه اصلی]) فرض کنید G یک گروه فرادوری شکافنده متناهی با نمایش زیر باشد

$$\langle x, y \mid x^m = y^n = 1, xyx^{-1} = y^l \rangle,$$

هرگاه اعداد صحیح m، n و l در رابطه $l^m \overset{n}{\equiv} 1$ صدق می‌کنند. در این صورت

۱- اگر n فرد باشد، آن‌گاه

$$\otimes^3 G \cong C_m \times C_{(n,l-1)} \times C^2_{(m,n,l-1)} \times C_{(n,1+l+\ldots+l^{m-1})}$$
$$\times C^2_{(n,l-1,1+l+\ldots+l^{m-1})} \times C_{(m,n,l-1,1+l+\ldots+l^{m-1})}.$$

۲- اگر n زوج باشد، آن‌گاه

$$\otimes^3 G \cong (A \otimes G^{ab}) \times (B \otimes G),$$

که در آن $G^{ab} = \frac{G}{G'}$ گروه آبلی، C_m گروه دوری از مرتبه m، (m,n) بزرگتین مقسوم علیه مشترک دو عدد m و n و $A = \langle X, Z \rangle$، $B = \langle Y, T \rangle$ زیرگروه‌های $G \otimes G$ هستند که در آن $X = x \otimes x$، $Z = (x \otimes y)(y \otimes x)$، $Y = y \otimes y$ و $T = x \otimes y$ به طوری که

$$A \otimes G^{ab} \cong C_m \times C_{(m,n,l-1)} \times C_{(n,l-1,1+l+\ldots+l^{m-1})}$$
$$\times C_{(m,n,l-1,1+l+\ldots+l^{m-1})}$$

و $B \otimes G$ نیز زیرگروه آبلی تولید شده توسط $Y_x = Y \otimes x$، $Y_y = Y \otimes y$، $T_x = T \otimes x$ و $T_y = T \otimes y$ و با روابط

$$Y_x^{(m,n,2(l-1))} = Y_y^{(n,l-1)} = T_y^{(n,4(l-1),1+l+\ldots+l^{m-1})} = 1,$$
$$Y_x^{l-1} = T_y^{l^2-1}$$

و

$$\begin{cases} T_x^{(n,1+l+\ldots+l^{m-1})} = 1, & m \overset{4}{\equiv} 0 \vee 1 \\ T_x^n = 1, T_x^{1+l+\ldots+l^{m-1}} = T_y^{-(l-1)^2}, & m \overset{4}{\equiv} 2 \vee 3 \end{cases}$$

است هرگاه $T^{1+l+\ldots+l^{m-1}} = 1$ یا $T_x^{(n,1+l+\ldots+l^{m-1})} = 1$،

هرگاه $T^{1+l+\ldots+l^{m-1}} \neq 1$.

۳- $\wedge^3 G \cong C_{(n,l-1,1+l+\ldots+l^{m-1})} \times C_{(n,1+l+\ldots+l^{m-1})}$

۴- $\mathcal{M}^{(2)}(G) \cong C_{(n,l-1,1+l+\ldots+l^{m-1})} \times C_{(n,1+l+\ldots+l^{m-1})(n,(l-1)^2)/n}$

اکنون می‌توانیم به اثبات قضیه اصلی این مقاله برای گروه‌های فرادوری شکافنده بپردازیم. ابتدا قضیه قبل را با قرار دادن $G = D_{2^{n-1}}$ به کار می‌بریم. واضح است که $T^{1+l+\ldots+l^{m-1}} = T^0 = 1$. در این صورت دو حالت زیر وجود دارد:

- اگر $n = 2$، آن‌گاه نتیجه مورد نظر در [10] ارائه شده است.
- اگر $n > 2$، آن‌گاه

$$Y_x^{(2,2^{n-1},-4)} = Y_y^{(2^{n-1},-2)} = T_y^{(2^{n-1},-8,0)} = 1,$$
$$T_x^{2^{n-1}} = 1,$$
$$T_x^0 = T_y^{-(-2)^2}.$$

بنابراین

$$Y_x^2 = Y_y^2 = T_y^8 = 1,$$
$$T_x^{2^{n-1}} = 1,$$
$$T_y^{-4} = 1.$$

از این رو،

$$\otimes^3 D_{2^{n-1}} \cong \begin{cases} (C_2)^8 & n = 2, \\ C_{2^{n-1}} \times C_4 \times (C_2)^6 & n > 2 \end{cases}$$

و

$$\wedge^3 D_{2^{n-1}} \cong C_{2^{n-1}} \times C_2,$$
$$\mathcal{M}^{(2)}(D_{2^{n-1}}) \cong C_2 \times C_4.$$

بنابراین نتیجه مورد نظر برای گروه دووجهی حاصل شد.

اکنون می‌خواهیم با روش و استدلالی مشابه گروه $D_{2^{n-1}}$، نتایج را برای گروه نیمه دووجهی $SD_{2^{n-1}}$ به دست آوریم. لذا در قضیه قبل قرار دهید $G = SD_{2^{n-1}}$ و فرض کنید $T^{1+l+\ldots+l^{m-1}} = T^{2^{n-2}} \neq 1$ در $SD_{2^{n-1}}$. اگر $n = 4$، آن‌گاه $Y_x^{(2,2^3,2(-2+2^2))} = Y_y^{(2^3,(-2+2^2))} = T_y^{(2^3,4(-2+2^2),2^2)} = 1,$ و همچنین $T_x^{(2^3,2^2)} = 1$. بنابراین

$$Y_x^2 = Y_y^2 = T_y^4 = 1,$$
$$T_x^4 = 1.$$

اگر $n > 4$، آن‌گاه

$$Y_x^{(2,2^{n-1},-4)} = Y_y^{(2^{n-1},(-2+2^{n-2}))} =$$
$$T_y^{(2^{n-1},4(-2+2^{n-2}),2^{n-2})} = 1,$$
$$T_x^{(2^{n-1},2^{n-2})} = 1.$$

از این رو

$$Y_x^2 = Y_y^2 = T_y^{2^3} = 1,$$
$$T_x^{2^{n-2}} = 1.$$

بنابراین

$$\otimes^3 SD_{2^{n-1}} \cong \begin{cases} (C_4)^2 \times (C_2)^6 & n=4 \\ C_{2^{n-2}} \times C_{2^3} \times (C_2)^6 & n>4 \end{cases}$$

و همچنین داریم

$$\wedge^3 SD_{2^{n-1}} \cong C_{2^{n-2}} \times C_2,$$
$$\mathcal{M}^{(2)}(SD_{2^{n-1}}) \cong C_2 \times C_2.$$

بنابراین تاکنون قضیه اصلی این مقاله برای ۲-گروه‌های فرادوری شکافنده و پوچ‌توان از رده بیشین اثبات شده است.

در ادامه این بخش روابطی را بین مولدهای حاصلضرب تانسوری سه‌تایی گروه چهارگان تعمیم‌یافته $Q_{2^{n-2}}$ بدست می‌آوریم و سپس به اثبات قضیه اصلی در مورد این گروه می‌پردازیم.

ابتدا لم کاربردی زیر را ارائه می‌کنیم که نتیجه مستقیمی از گزاره ۳ در مرجع [11] می‌باشد.

لم ۲.۳ فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. به ازای هر $x, y, z, w \in G$ روابط زیر برقرار می‌باشند:

۱- $^{x}(y \otimes z) = (x \otimes [y,z])(y \otimes z)$

۲- $^{x}(y \otimes z \otimes w) = (y \otimes z \otimes w)(w \otimes [y,z] \otimes x)$

با استفاده از گزاره ۲ از [11] و قرار دادن $G = Q_{2^{n-2}} \otimes Q_{2^{n-2}}$ و $H = Q_{2^{n-2}}$ نتیجه می‌شود $\ker(\lambda' : \otimes^3 Q_{2^{n-2}} \to Q_{2^{n-2}})$ مرکزی است و چون $Im\lambda' = \gamma_3(Q_{2^{n-2}})$ دوری است، لذا نتیجه می‌شود که $\otimes^3 Q_{2^{n-2}}$ آبلی می‌باشد.

گزاره ۳.۳. گروه $Q_{2^{n-2}}$ روی عناصر $y \otimes y \otimes x$ و $x \otimes x \otimes y$ به صورت بدیهی عمل می‌کند.

اثبات. با به کارگیری رابطه (۲.۴) از [11] و لم ۲.۳ نتیجه مورد نظر را به دست می‌آوریم. ■

در موارد زیر از نتایج ارائه شده در بخش ۴ از [11] استفاده می‌کنیم. در نتیجه فرض می‌کنیم که $n > 3$، ولی اگر $n = 3$، آن گاه نتیجه مورد نظر در [10] ارئه شده است. در ادامه مطلب p و q را اعداد صحیح ثابت فرض می‌کنیم به طوری که $p, q \geq 1$، مگر آنکه خلاف آن را بیان کنیم.

گزاره ۴.۳. فرض کنید $n > 3$ و همچنین p و q اعداد صحیح ثابت باشند به طوری که $p, q \geq 1$. در این صورت به ازای هر $x, y, z \in Q_{2^{n-2}}$ روابط زیر برقرار هستند:

۱- $(y \otimes y \otimes y)^2 = 1.$

۲- $(x \otimes y) \otimes y^p = (x \otimes y \otimes y)^p$

۳- $^{y}(x \otimes y \otimes y) = (x \otimes y \otimes y)$

۴- $(x \otimes y)^q \otimes y = (x \otimes y \otimes y)^q$

۵- $(x \otimes y)^q \otimes y^p = (x \otimes y \otimes y)^{qp}$

۶- $^{x}(x \otimes y \otimes y) = (x \otimes y \otimes y)$

۷- $(x \otimes x) \otimes y^p = (x \otimes x \otimes y)^p$

۸- $(x \otimes x \otimes y)^2 = 1$

۹- $(x\otimes y\otimes y)^{2^{n-2}}=1$

۱۰- ${}^{y}(x\otimes y\otimes x)=(x\otimes y\otimes x)\,(x\otimes y\otimes y)^{-2}$

۱۱- $(x\otimes y)^{q}\otimes x=(x\otimes y\otimes x)^{q}\;(x\otimes y\otimes y)^{2q(q-1)}$

۱۲- $(x\otimes y\otimes x)^{2^{n-2}}=1$

۱۳- $(x\otimes y)^{q}\otimes x^{-1}=(x\otimes y\otimes x)^{q}\;(x\otimes y\otimes y)^{2q(q-1)}$

۱۴- به ازای p و q دلخواه داریم

$$(x\otimes y)^{q}\otimes xy^{p}=(x\otimes y\otimes x)^{q}\;(x\otimes y\otimes y)^{qp+2q(q-1)}$$
$$=(x\otimes y)^{q}\otimes x^{-1}y^{p}$$

۱۵- $1=(x\wedge y)^{2^{n-2}}\wedge y=(x\wedge y\wedge y)^{2^{n-2}}$

۱۶- $(x\wedge y\wedge x)^{2^{n-2}}=(y\wedge x\wedge x)^{2^{n-2}}=1$.

اثبات.

۱- بنا به روابط صفحه ۱۸۹ از [۱۱] داریم

$$1=(y\otimes y)^{2}\otimes y=(y\otimes y\otimes y)^{2}.$$

۲- با به کارگیری استقرا روی p و با توجه به رابطه (۱۷) از [۱۱] و رابطه ۱ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

۳- با توجه به لم ۲.۳ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

۴- با کمک استقرا روی q و همچنین رابطه ۳ نتیجه مورد نظر اثبات می‌گردد.

۵- اثبات را با استقرا روی هر دو مقدار p و q انجام می‌دهیم. ابتدا فرض کنید $q=1$. با در نظر گرفتن رابطه ۳ و استقرا روی p نتیجه می‌گیریم که

$$(x\otimes y)\otimes y^{p}=(x\otimes y\otimes y)^{p}.$$

به منظور اثبات قسمت دوم، کافی است مشابه اثبات قسمت اول عمل کنیم. با استفاده از رابطه ۳ داریم

$$\begin{aligned}&(x\otimes y)^{q+1}\otimes y^{p}\\&={}^{x\otimes y}\;((x\otimes y)^{q}\otimes y^{p})(x\otimes y\otimes y^{p})\\&={}^{y^{-2}}\;(x\otimes y\otimes y)^{qp}\;(x\otimes y\otimes y)^{p}\\&=(x\otimes y\otimes y)^{qp}\;(x\otimes y\otimes y)^{p}\\&=(x\otimes y\otimes y)^{(q+1)p}.\end{aligned}$$

۶- با استفاده از رابطه (۳.۴) از [۱۱] و نیز روابط ۱ و ۵ داریم

$$\begin{aligned}&{}^{x}(x\otimes y\otimes y)=x\otimes y^{-1}\otimes y^{-1}\\&=(x\otimes y)^{-1}(y\otimes y)^{2}\otimes y^{-1}\\&={}^{(x\otimes y)^{-1}}\;(y\otimes y\otimes y)^{-2}((x\otimes y)^{-1}\otimes y^{-1})\\&=(x\otimes y)^{-1}\otimes y^{-1}.\end{aligned}$$

۷- با استفاده از گزاره ۳.۳ رابطه مورد نظر اثبات می‌گردد.

۸- با استفاده از گزاره ۳.۳ و رابطه ۷ داریم

$${}^{x}(x\otimes x\otimes y)=x\otimes x\otimes {}^{x}y=x\otimes x\otimes y^{-1}=(x\otimes x\otimes y)^{-1}.$$

۹- با استفاده از رابطه (۱۰.۴) از [۱۱] و همچنین روابط ۴ و ۷ داریم

$$(x\otimes x\otimes y)^2=(x\otimes x)^2\otimes y$$
$$=(x\otimes y)^{2^{n-2}}\otimes y$$
$$=(x\otimes y\otimes y)^{2^{n-2}}=1.$$

۱۰- از رابطه (۳.۴) از [۱۱] و لم ۲.۳ همچنین روابط ۱ و ۵ نتیجه می‌گیریم

$$^{y}(x\otimes y\otimes x)=(x\otimes y^{-2}\otimes y)(x\otimes y\otimes x)$$
$$=((x\otimes y)^{-2}\ (y\otimes y)^{-6}\otimes y)\ (x\otimes y\otimes x)$$
$$=(x\otimes y\otimes y)^{-2}\ (x\otimes y\otimes x).$$

۱۱- با به کارگیری رابطه ۱۰ داریم

$$(x\otimes y)^q\otimes x=(x\otimes y)(x\otimes y)^{q-1}\otimes x$$
$$=^{(x\otimes y)}((x\otimes y)^{q-1}\otimes x)(x\otimes y\otimes x)$$
$$=^{y^{-2}}((x\otimes y)(x\otimes y)^{q-2}\otimes x)(x\otimes y\otimes x)$$
$$=\dots$$
$$=\prod_{k=0}^{q-1}{}^{y^{-2k}}(x\otimes y\otimes x)$$
$$=(x\otimes y\otimes x)^q\ (x\otimes y\otimes y)^{2q(q-1)}.$$

۱۲- با توجه به این که طبق رابطه (۵.۴) از [۱۱] داریم $(y\otimes y)^2=1$. لذا با استفاده از روابط (۱۱.۴) از [۱۱] و ۹ نتیجه می‌گیریم که

$$1=(y\otimes y)^2\otimes x$$
$$=(x\otimes y)^{2^{n-2}}\otimes x$$
$$=(x\otimes y\otimes x)^{2^{n-2}}\ (x\otimes y\otimes y)^{2n(n-1)}$$
$$=(x\otimes y\otimes x)^{2^{n-2}}.$$

۱۳- با به کارگیری روابط 1، ۵، ۶، ۹ و ۱۱ داریم

$$(x\otimes y)^q\otimes x^{-1}=(x\otimes y)^q\otimes xy^{2^{n-2}}$$
$$=((x\otimes y)^q\otimes x)^x((x\otimes y)^q\otimes y^{2^{n-2}})$$
$$=(x\otimes y\otimes x)^q\ (x\otimes y\otimes y)^{2q(q-1)}\ (x\otimes y\otimes y)^{q2^{n-2}}$$
$$=(x\otimes y\otimes x)^q\ (x\otimes y\otimes y)^{2q(q-1)+q2^{n-2}}.$$

۱۴- با استفاده از روابط ۵، ۶ و ۱۱ نتیجه می‌گیریم

$$(x\otimes y)^q\otimes xy^p=((x\otimes y)^q\otimes x)^x((x\otimes y)^q\otimes y^p)$$
$$=(x\otimes y\otimes x)^q\ (x\otimes y\otimes y)^{qp+2q(q-1)}.$$

۱۵- طبق مطالب گفته شده در صفحه ۱۷۸ از مرجع [۱۱] دنباله دقیق زیر را داریم

$$0\to\mathcal{M}(Q_{2^{n-2}})\to Q_{2^{n-2}}\wedge Q_{2^{n-2}}\to(Q_{2^{n-2}})'\to 1,$$

از مرجع [۱۲، نتیجه ۷,۴,۲] نتیجه می شود که $\mathcal{M}(Q_{2^{n-2}})=1$، لذا $Q_{2^{n-2}}\wedge Q_{2^{n-2}}\cong (Q_{2^{n-2}})'$ و از آنجا که

$$(Q_{2^{n-2}})'=\langle y^2\rangle\cong C_{2^{n-2}},$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$Q_{2^{n-2}}\wedge Q_{2^{n-2}}=\langle x\wedge y\rangle\cong C_{2^{n-2}},$$

و $|x\wedge y|=2^{n-2}$. از این رو

$$1=(x\wedge y)^{2^{n-2}}\wedge y=(x\wedge y\wedge y)^{2^{n-2}}.$$

۱۶- با استفاده از رابطه ۱۵ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}1&=(x\wedge y)^{2^{n-2}}\wedge x\\&=(x\wedge y\wedge x)^{2^{n-2}}\ (x\wedge y\wedge y)^{2^{n-2}2(2^{n-2}-1)}\\&=(x\wedge y\wedge x)^{2^{n-2}}.\end{aligned}$$

از

$$\begin{aligned}1&=xy\wedge xy\\&=(xy\wedge x)^x(xy\wedge y)\\&={}^x(y\wedge x)(x\wedge x)^x[{}^x(y\wedge y)^x(x\wedge y)]\\&={}^x(y\wedge x)^x(x\wedge y)\end{aligned}$$

با عمل x^{-1} بر روی طرفین تساوی فوق نتیجه می گیریم $(x\wedge y)^{-1}=(y\wedge x)$، بنابراین قسمت دوم نتیجه می شود.

بنابراین اثبات کامل می‌گردد. ■

گزاره ۵.۳. ([۱۳، گزاره ۲.۳]) فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده c باشد. در این صورت دنباله زیر دقیق است:

$$(\gamma_c(G)\otimes G)\otimes G\to\otimes^3 G\to\otimes^3\frac{G}{\gamma_c(G)}\to 1.$$

می دانیم $\gamma_c(Q_{2^{n-2}})=\langle y^{-2^{n-2}}\rangle$، که در آن $c=n-1$ و $(\frac{Q_{2^{n-2}}}{\langle y^{-2^{n-2}}\rangle})\cong D_{2^{n-2}}$. دنباله دقیق زیر را داریم

$$\begin{aligned}(\langle y^{-2^{n-2}}\rangle\otimes Q_{2^{n-2}})\otimes Q_{2^{n-2}}&\to\otimes^3 Q_{2^{n-2}}\\&\to\otimes^3 D_{2^{n-2}}\to 1.(17)\end{aligned}$$

بدیهی است که

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}((\langle y^{-2^{n-2}}\rangle\otimes Q_{2^{n-2}})\otimes Q_{2^{n-2}}\to\otimes^3 Q_{2^{n-2}})\\&=\langle y^{2^{n-2}}\otimes a\otimes b,\forall a,b\in Q_{2^{n-2}}\rangle\\&=\langle y^{2^{n-2}}\otimes y\otimes y,y^{2^{n-2}}\otimes y\otimes x,y^{2^{n-2}}\otimes x\otimes y,\\&\quad y^{2^{n-2}}\otimes x\otimes x\rangle.\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم که این گروه بدیهی است.

از روابط (۶.۴) و (۱۱.۴) از مرجع [۱۱] و همچنین روابط ۹، ۱۱ و ۱۲ از گزاره ۴.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$y^{2^{n-2}} \otimes x \otimes x = (y \otimes x)^{2^{n-2}} \otimes x = (x \otimes y)^{2^{n-2}} \otimes x$$
$$= (x \otimes y \otimes x)^{2^{n-2}} \ (x \otimes y \otimes y)^{22^{n-2}(2^{n-2}-1)} = 1.$$

با استفاده از رابطه (۱۱.۴) از [۱۱] و روابط ۱ و ۵ از گزاره ۴.۳ و همچنین با توجه به این که $(y \otimes y)^2 = 1$، داریم

$$y^{2^{n-2}} \otimes x \otimes y = (y \otimes x)^{2^{n-2}} \ (y \otimes y)^{2^{n-2}(2^{n-2}-1)} \otimes y$$
$$= (x \otimes y)^{2^{n-2}} \otimes y$$
$$= (x \otimes y \otimes y)^{2^{n-2}} = 1.$$

اکنون رابطه $(y \otimes y)^2 = 1$ ادعای ما را اثبات می‌کند و بنابراین طبق رابطه (۱۷) داریم

$$\otimes^3 Q_{2^{n-2}} \cong \otimes^3 D_{2^{n-2}}. \qquad (18)$$

از این رو به ازای هر $n > 3$ ، داریم

$$\otimes^3 Q_{2^{n-2}} \cong C_{2^{n-2}} \times C_4 \times (C_2)^6.$$

لم ۶.۳. فرض کنید G یک گروه پوچتوان از رده c باشد. در این صورت دنباله زیر دقیق است

$$(\gamma_c(G) \wedge G) \wedge G \to \wedge^3 G \to \wedge^3 (\frac{G}{\gamma_c(G)}) \to 1.$$

اثبات. با توجه به اثبات لم ۸.۳ در [۱۴] و فرایندی مشابه در اثبات لم ۱.۳ از [۱۳] حکم مورد نظر اثبات می‌گردد. ■

با قرار دادن $G = Q_{2^{n-2}}$ ، نتیجه می‌شود که دنباله

$$(\langle y^{-2^{n-2}} \rangle \wedge Q_{2^{n-2}}) \wedge Q_{2^{n-2}} \to \wedge^3 Q_{2^{n-2}}$$
$$\to \wedge^3 D_{2^{n-2}} \to 1, \ (19)$$

دقیق است. بنابراین با استفاده از روابط (۱۸) و (۱۹) و همچنین قضیه اصلی در مرجع [9] و با توجه به این واقعیت که

$$Im((\langle y^{-2^{n-2}} \rangle \wedge Q_{2^{n-2}}) \wedge Q_{2^{n-2}} \to \wedge^3 Q_{2^{n-2}}) = 1,$$

این گونه استنباط می‌کنیم که

$$\wedge^3 Q_{2^{n-2}} \cong \wedge^3 D_{2^{n-2}} \cong C_{2^{n-2}} \times C_2. \qquad (20)$$

از این رو نتیجه می‌شود که گروه $\wedge^3 Q_{2^{n-2}}$ توسط عناصر $x \wedge y \wedge x$ و $x \wedge y \wedge y$ به ترتیب از مرتبه 2^{n-2} و 2 تولید می‌شود. حال برای محاسبه $\mathcal{M}^{(2)}(Q_{2^{n-2}})$ آماده‌ایم. روش ما متکی بر رویکرد حاصلضرب تانسوری ارئه

شده توسط برنز و الیس در [۱۴] است. فرض کنید $\gamma_3^\sharp(G)$ گروه خارج‌قسمتی $\wedge^3 G/\tau(G)$ باشد که در آن $\tau(G)$ زیرگروه نرمال $\wedge^3 G$ تولید شده توسط عناصر

$$\langle a,b,c\rangle = ((a\wedge b)\wedge {}^b c)((b\wedge c)\wedge {}^c a)((c\wedge a)\wedge {}^a b),$$

به ازای هر $a,b,c\in G$ است. بنا به قضیه ۹.۲ از مرجع [۱۴] مشخص است که بروریختی

$$\ker([\ ,\ ,\ ]:\wedge^3 G\to G)\twoheadrightarrow \mathcal{M}^{(2)}(G),$$

داده شده در قضیه ۹.۲ در [۱۴] منجر به یکریختی طبیعی زیر می‌شود:

$$\mathcal{M}^{(2)}(G)\cong \ker([\ ,\ ,\ ]:\gamma_3^\sharp(G)\to G). \quad (21)$$

بنابراین برای توصیف $\mathcal{M}^{(2)}(Q_{2^{n-2}})$، ابتدا می‌بایست زیرگروه $\tau(Q_{2^{n-2}})$ از گروه $\wedge^3 Q_{2^{n-2}}$ را ارزیابی کرد.

با استناد به رابطه (۱۷) از [۱۱] و روابط ۳، ۵ و ۶ از گزاره ۴.۳ همراه با روابط اولیه تعریف مربع بیرونی ناآبلی داریم

$$\begin{aligned}\langle x,y,y\rangle &= (x\wedge y\wedge {}^y y)(y\wedge y\wedge {}^y x)(y\wedge x\wedge {}^x y)\\ &= (x\wedge y\wedge y)(y\wedge x\wedge y^{-1})\\ &= (x\wedge y\wedge y)((x\wedge y)^{-1}\wedge y)^{-1}\\ &= (x\wedge y\wedge y)(x\wedge y\wedge y)\\ &= (x\wedge y\wedge y)^2.\end{aligned}$$

به طور مشابه رابطه (۱۷) از [۱۱] و روابط ۳، ۵، ۹ و ۱۰ از گزاره ۴.۳ ایجاب می‌کنند که

$$\begin{aligned}\langle x,y,x\rangle &= (x\wedge y\wedge {}^y x)(y\wedge x\wedge {}^x x)(x\wedge x\wedge {}^x y)\\ &= (x\wedge y\wedge y^2x)((x\wedge y)^{-1}\wedge x)\\ &= (x\wedge y\wedge y)^2\ {}^{y^2}(x\wedge y\wedge x)\\ &\quad (x\wedge y\wedge x)^{-1}(x\wedge y\wedge y)^6\\ &= (x\wedge y\wedge y)^2(x\wedge y\wedge x)(x\wedge y\wedge y)^{-4}\\ &\quad (x\wedge y\wedge x)^{-1}\ (x\wedge y\wedge y)^6\\ &= (x\wedge y\wedge y)^4.\end{aligned}$$

بنابراین $\tau(Q_{2^{n-2}})=\langle (x\wedge y\wedge y)^2\rangle$. از این رو

$$\gamma_3^\sharp(Q_{2^{n-2}})\cong \wedge^3 Q_{2^{n-2}}.$$

لذا طبق (۲۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}^{(2)}(Q_{2^{n-2}})\cong C_2\times C_2.$$

فهرست منابع

[1] J.H.C. Whitehead, "A certain exact sequence", *Ann. Math.*, vol. **52**, pp. 51-110, 1950.

[2] R. Brown and J.-L. Loday, "Van Kampen theorems for diagrams of spaces", *Topology*, vol. **26**, pp. 311-335, 1987.

[3] R.K. Dennis, *In Search of New "Homology" Functors Having a Close Relationship to* K *-Theory*, Cornell University, Ithaca N.Y., 1976.

[4] C. Miller, "The second homology of a group", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. **3**, pp. 588-595, 1952.

[5] G. Ellis and A. McDermott, "Tensor products of prime-power groups", *J. Pure Appl. Algebra*, vol. **132**, no. 2, pp. 119-128, 1998.

[6] R. Baer, "Representations of groups as quotient groups, I, II, and III", *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. **58**, pp. 295-419, 1945.

[7] P. Hall, "The classification of prime-power groups", *J. Reine Angew. Math,*. vol. **182**, pp. 130-141, 1940.

[8] Eugene Joachim Charles Hempel, *Metacyclic Groups*, May 1998.

[9] S. Aofi Al-Akbi and S. H. Jafari, "Finite split metacyclic groups and their 2-nilpotent multipliers", Submitted.

[10] S. H. Jafari, and F. Fasihi, "A tensor product approach to compute 2-nilpotent multiplier p-groups", *Asian-European Journal of Mathematics*, **15**, no. **5**, pp. 2250090 (10 pages), 2022.

[11] R. Brown, D. L. Johnson and E. F. Robertson, "Some computation of non-abelian tensor products of groups", *J. Algebra*, vol. **111** ,pp. 177-202, 1987.

[12] G. Karpilovsky, The schur multiplier, Oxford University Press, New York, 1987.

[13] S. H. Jafari, and H. Hadizadeh, "On the triple tensor product of prime-power groups", *J. Group Theory*, vol. **23**,, pp. 879-892, 2020.

[14] J. Burns and G. Ellis, "On the nilpotent multipliers of a group", Z. vol. **226**, pp. 405-428, 1997.