دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

بررسی پایداری عددی و همگرایی مرتبه‌ی دوم برای حل کلاس جدیدی از معادلات قدر مطلقی

مظفر رستمی[۱]، طاهر لطفی[۲*]، علی برهمند[۳]

[۱و۲و۳] استاد، گروه ریاضی، دانشکده‌ی علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، همدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۲۸   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۶

چکیده

در این مقاله، کلاس جدیدی از معادلات قدر مطلق به صورت زیر را مطالعه می‌کنیم:

$$Ax-B|x|-b=o, \qquad (B\neq I,\ \sigma_{\max}(|B|)<\sigma_{\min}(A))$$

کلاس جدید معادلات قدر مطلقی را با استفاده از روش نیوتن تعمیم‌یافته حل می‌کنیم و همچنین همگرایی و پایداری عددی کلاس جدید را بررسی می‌کنیم. همچنین با تست مثال‌های عددی، کارایی و مؤثر بودن روش حل برای کلاس جدید با دیگر کارهایی که انجام شده است مورد بررسی واقع شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های غیرخطی، معادله‌ی قدرمطلقی، روش تکرار، پایداری عددی، مرتبه‌ی همگرایی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: lotfitaher@yahoo.ir

۱- مقدمه

کلاس جدید از معادلات قدر مطلقی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G(x) = Ax \quad B|x| \quad b = o, \qquad (1)$$
$$(B \neq I,\ \sigma_{\max}(|B|) < \sigma_{\min}(A)),$$

که در آن $A,B \in \ ^{n}$ و $b \in \ ^{n}$ و | | نشان دهنده‌ی مقدار قدرمطلقی است. تاکنون همگرایی و پایداری عددی کلاس جدید در حالت $B \neq I$ مورد بررسی قرار نگرفته است. اکنون می‌خواهیم در این مقاله، به بررسی همگرایی و پایداری عددی کلاس جدید بپردازیم. مسئله‌ی حل معادلات قدر مطلقی، جزو مسائل ان-پی سخت می‌باشد و از طرفی مسئله‌ی متمم خطی (LCP) هم‌ارز معادله‌ی قدر مطلق است. مرجع [۱۲] را ببینید. منگسرین[۲] برای حل معادله‌ی قدر مطلق، $B = I$، از روش نیوتن تعمیم‌یافته استفاده کرد و نشان داد که حل معادله‌ی قدر مطلق، $B = I$، اگر مقادر منفرد A، بیشتر از ۱ باشد، آنگاه دارای همگرایی خطی می‌باشد.

اگر مقادیر منفرد A بیشتر از ۱ باشد، آنگاه معادله‌ی قدر مطلق (۱)، $B = I$ جواب منحصر به فرد دارد، [۱۴، ۱۵].

کلاس جدید، $B \neq I$ با شرط $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد، [۱۵]. حل منحصر به فردی معادله‌ی قدر مطلق $B = I$ در مراجع [۲۱، ۱۱، ۱۰، ۱] بررسی شده است. در برخی دیگر از روش‌ها، همگرایی خطی کلاس جدید در حالت $B = I$ نشان داده شده است، [۱۶، ۱۳، ۵]. زینلی و لطفی [۲۱] برای حل کلاس جدید در حالت $B = I$ روش نیوتن تعمیم‌یافته را اصلاح کرده و اثبات کرده‌اند که این روش دارای همگرایی موضعی مرتبه‌ی ۲ است.

روش‌های ذکر شده به همگرایی و پایداری عددی معادلات قدرمطلقی در حالت $B = I$ پرداخته‌اند.

[۲] Mangasarian

بنابراین ما $B \neq I$ و شرط $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ را لحاظ کرده‌ایم و اثبات نموده‌ایم که در این حالت کلاس جدید نیز دارای همگرایی موضعی مرتبه‌ی دوم و دارای پایداری عددی می‌باشد.

فضای تابعی $W_2^1[0,1]$ یک فضای هسته باز تولید است که در بخش بعدی تعریف خواهد شد. هدف ما در این مقاله پیدا کردن تابعی مانند $u(x)$ در $W_2^1[0,1]$ است به‌طوری که در معادله (۱) صدق کند. بدین منظور با توجه به شکل معادله (۱) یک عملگر خطی روی $W_2^1[0,1]$ تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از عملگر الحاقی نظیر و توابع هسته باز تولید در $W_2^1[0,1]$ یک پایه برای آن می‌سازیم. سپس جواب معادله (۱) را بر حسب این پایه به دست می‌آوریم.

۲- روش نیوتن تعمیم‌یافته و همگرایی موضعی مرتبه‌ی دوم برای حل کلاس جدید معادلات قدر مطلق

فرض کنیم ژاکوبین تعمیم‌یافته از معادله‌ی (۱) به صورت زیر باشد:

$$J_G(x) = A \quad BD(x), \qquad (2)$$

که در آن $D(x) = diag(sign(x))$ فرض کنیم $x^{\cdot}$ بردار شروع مناسب برای حل دقیقی از معادله‌ی قدر مطلق باشد. روش نیوتن تعمیم‌یافته‌ی منگسرین برای حل کلاس جدید از معادلات قدر مطلقی به کار گرفته‌ایم:

$$\big(A \quad BD(x)\big)\Delta x^k = \quad Ax^k + B|x^k| + b \qquad (3)$$
$$x^{k+۱} = x^k + \Delta x^k, \big(k = ۰, ۱, ۲, \dots\big). \qquad (4)$$

ابتدا ما سیستم خطی (۳) را حل می‌کنیم و $x^{k+۱}$ از (۴) را بروز رسانی می‌کنیم. جزئیات بیشتر را در مراجع [۲۰، ۱۹، ۸، ۶، ۲] ببینید.

فرض کنیم $G(x) = Ax \quad B|x| \quad b$، $J_G(x)$ ژاکوبین تعمیم‌یافته‌ی $G(x)$ باشد و $D(x) = diag(sign(x))$ باشد. روش نیوتن تعمیم‌یافته برای پیدا کردن جواب معادله‌ی (۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G(x^i) + J_G(x^i)\left(x^{i+۱} \quad x^i\right) = o. \tag{5}$$

$$Ax^i \quad B\left|x^i\right| \quad b + \left(A \quad BD(x^i)\right) \times \left(x^{i+۱} \quad x^i\right) = o, \tag{6}$$

با توجه به نکته که $D(x^i)x^i = \left|x^i\right|$، روش نیوتن تعمیم‌یافته، شکل ساده شده، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(A \quad BD(x^i)\right)x^{i+۱} = b, \tag{7}$$

در نتیجه

$$x^{i+۱} = \left(A \quad B(x^i)\right)\backslash b, \tag{8}$$

لم ۱. فرض کنیم $G(x)$ عضوی از کلاس (۱) باشد، اگر $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ باشد، آنگاه $\left(A \quad BD(x)\right)^{-۱}$ برای هر ماتریس قطری D وجود دارد جایی که D دارای عناصر قطری ±۱ یا صفر می‌باشد.

برهان. اثبات به روش برهان خلف است. فرض کنیم $\left(A \quad BD(x)\right)^{-۱}$ منفرد باشد، آنگاه برای برخی از $x \neq o$ داریم:

$$\left(A \quad BD(x)\right)x = o, \tag{9}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Ax &= B|x| \\ x^TA^TAx &\le |(Ax)^T(Ax)| \\ &\le |Ax|^T|Ax| \\ &\le (|B||x|)^T|B||x| \\ &= |x|^T|B|^T|B||x|, \end{aligned} \tag{10}$$

در نتیجه تناقضی با فرض مسئله به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{min}(A) &= min\, x^TA^TAx \\ &\le x^TA^TAx \\ &\le |x|^T|B|^T|B||x| \\ &= max\, z^T|B|^T|B|z \\ &= \sigma \underset{\|z\|_z=۱}{max}(|B|), \end{aligned} \tag{11}$$

لم ۲. فرض کنیم $G(x^i) = Ax^i \quad Bx^i \quad b$ اگر $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$، آنگاه روش نیوتن تعمیم‌یافته برای رابطه‌ی (۳) خوش تعریف و کراندار است.

برهان. اثبات مشابه گزاره‌ی ۳ در [۱۰] است. همچنین به مرجع [۲۲] مراجعه کنید.

لم ۳. فرض کنیم $G(x)$ عضوی از کلاس جدید (۱) باشد، آنگاه:

$$\left\|\left(A \quad BD(x)\right)^{-۱}\right\| \le \frac{\left\|A^{-۱}\right\|\|D(x)\|}{۱-\left\|A^{-۱}\right\|\|B\|\|D(x)\|}. \tag{12}$$

برهان. چون $\left(A \quad BD(x)\right)^{-۱}$ وجود دارد، آنگاه:

$$\left(A \quad BD(x)\right)\left(A \quad BD(x)\right)^{-۱} = I. \tag{13}$$

بنابراین با گرفتن نرم از طرفین تساوی داریم:

$$\begin{aligned} &\|A \quad BD(x)\| \\ &\|A \quad BD(x)\|^{-۱} = ۱. \end{aligned} \tag{14}$$

در نتیجه

$$\|A \quad BD(x)\| = \frac{۱}{\|A-BD(x)\|}.$$

چون داریم:

$$\begin{aligned} &\|A\| \quad \|B\|\|D(x)\| \\ &\le \|A \quad BD(x)\|, \end{aligned} \tag{14}$$

با ضرب $\|A^{-۱}\|$ در طرفین نامساوی داریم:

$$\left\|A^{-۱}\right\| \|A\| \quad \left\|A^{-۱}\right\| \|B\|\|D(x)\| \le \left\|A^{-۱}\right\| \|A \quad BD(x)\|,$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{\left\|A^{-۱}\right\|\|A-BD(x)\|} \le \frac{۱}{۱-\left\|A^{-۱}\right\|\|B\|\|D(x)\|},$$

$$\|A \quad BD(x)\|^{-۱} \le \frac{\left\|A^{-۱}\right\| \|D(x)\|}{۱ \quad \left\|A^{-۱}\right\| \|B\|\|D(x)\|}. \qquad (۱)$$

لم ۴. فرض کنیم $G(x^i)$ عضوی از کلاس جدید (۱) باشد و $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$ و $\left\|A^{-۱}\right\| < \frac{۱}{۴}$، آنگاه $\left\|J_G^{-۱}(x^i)\right\| < ۱$.

برهان. چون $\left\|J_G^{-۱}(x^i)\right\| = \|A \quad BD(x^i)\|^{-۱}$، با توجه به لم ۳ داریم:

$$\left\|J_G^{-۱}(x^i)\right\| \le \frac{\left\|A^{-۱}\right\|\|D(x^i)\|}{۱-\left\|A^{-۱}\right\|\|B\|\|D(x^i)\|}$$

و از طرفی، با توجه به فرض مسئله که $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$، نتیجه می‌گیریم که $\left\|A^{-۱}\right\| \|B\| < ۱$، پس $\left\|J_G^{-۱}(x^i)\right\| < ۱$.

قضیه ۵. اگر D یک بازه‌ی باز در ^{n} باشد و J_G در همسایگی x در D دارای خاصیت لیپ‌شیتز باشد، آنگاه برای هر $t \in [۰,۱]$ و هر $x + t\Delta x \in D$ داریم:

$$\|G(x+\Delta x) \quad G(x) \quad J_G(x)\Delta x\| \le \frac{L_{J_G}}{۲}\|\Delta x\|^۲, \qquad (۲)$$

جایی که L_{J_G} پیوسته‌ی لیپ‌شیتز برای J_G در x است به عبارت دیگر:

$$\|J_G(x+t\Delta x) \quad J_G(x)\| \le L_{J_G}\|t\Delta x\|. \qquad (۳)$$

برهان. اثبات مشابه برهان قضیه‌ی ۲.۳ در [۲۱] است یا به مرجع [۲.۳] مراجعه نمایید.

قضیه ۶. فرض کنیم x جوابی از $G(x)$ از کلاس جدید (۱) باشد. یعنی اینکه $G(x \ ) = o$ و فرض کنیم که مفروضات لم ۵ برقرار باشد و G به طور پیوسته مشتق‌پذیر برای تمام $x^k \in N_r(x \ ) \subset D$ باشد، همچنین $\left\|J_G^{-۱}(x)\right\| < ۱$. آنگاه برای $k > ۰$، دنباله‌ی $\{x^k\}$ تولید شده توسط (۳) و (۴) در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$\left\|x^{k+۱} \quad x \ \right\| \le \frac{L_{J_G}}{۲}\|x^k \quad x \ \|^۲. \qquad (۴)$$

برهان.

$$x^{i+۱} = x^i \quad J_G^{-۱}(x^i)G(x^i), \qquad (۵)$$

بنابراین

$$x^{i+۱} \quad x \ = x^i \quad x \ \ J_G^{-۱}(x^i)\left(G(x^i) \quad G(x \ )\right) = J_G^{-۱}(x^i)\left(G(x \ ) \quad G(x^i) \quad J_G(x^i)\right)(x \quad x^i). \qquad (۶)$$

در نتیجه با گرفتن نرم از طرفین تساوی داریم:

$$\left\|x^{i+۱} \quad x \ \right\| = \|J_G^{-۱}(x^i)\left(G(x \ ) \quad G(x^i) \quad J_G(x^i)\right)(x \quad x^i)\| \le \left\|J_G^{-۱}(x)\right\| \|G(x \ ) \quad G(x^i) \quad J_k(x^i)(x \quad x^i)\|. \qquad (۲۲)$$

چون $\left\|J_G^{-۱}(x)\right\| < ۱$، آنگاه با استفاده از لم ۱-۴ داریم:

$$\left\|x^{k+1} \quad x\right\| \le \frac{L_{J_G}}{2}\left\|x^k \quad x\right\|^2. \qquad (۷)$$

قضیه ۷. فرض کنیم مفروضات قضیه‌ی ۶ برقرار باشد. اگر $0 < r_k \le r_0 < \frac{2}{L_{J_G}}$ و $N_{r_0}\left(x^k\right) \subset D$، آنگاه روابط (۳) و (۴) دنباله‌ی $\{x^k\}$ را به طوری که $x^k \in N_{r_0}(x)$ و $x^k \to x$ تولید می‌کند.

برهان. اثبات مشابه قضیه‌ی ۳.۳ در [۲۱] می‌باشد.

قضیه ۸. اگر مفروضات قضیه‌ی ۶ برقرار باشد، آنگاه جواب x در $N_{\frac{2}{L_{J_G}}}(x)$ منحصر به فرد است.

برهان. اثبات مشابه قضیه‌ی ۴.۳ در [۲۱] است یا به مرجع [۲۴] مراجعه نمایید.

۳. بررسی پایداری عددی معادلات کلاس جدید (۱)

در این قسمت، برای بررسی پایداری عددی معادلات قدر مطلق کلاس جدید (۱)، روابط (۲۴) و (۲۵) را در نظر بگیرید:

$$A \quad BD\left(\hat{x}^k + E_1^k\right)\Delta\hat{x}^k = Ax^k + B\left|x^k\right| + b + E_2^k, \qquad (۸)$$

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{x}^k + \Delta\hat{x}^k + E_3, \quad \left(k = 0, 1, 2, \dots\right). \qquad (۹)$$

این دو روابط را با استفاده از نقطه‌ی شناور با دقت اعداد متناهی و با جایگزین کردن $A \quad BD(\hat{x}^k + E_1)$ به به جای $J_G(\hat{x}^k)$ و $\hat{x}^k$ به جای x^k و با در نظر گرفتن خطاهای E_1^k، E_2^k و E_3^k که همگی خطاهای محاسباتی هستند، به دست آورده‌ایم.
کاندیشن نامبر $G(x, d)$ که نقش مهمی در مطالعه‌مان دارد و برای جزئیات بیشتر [۶] را ببینید.

در تمام فرمول‌ها برای سادگی، بردار b را در نظر نگرفته‌ایم. کاندیشن نامبر از $G(x, d)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathrm{cond}\,(G; d) = \left\|G_x'(x\ ; d)^{-1} G_d'(x\ ; d)\right\| \frac{\|d\|}{\|x\ \|}, \qquad (۱۰)$$

جایی که G_x' و G_d' مشتقات فرچه‌ت نسبت به x و d هستند. برای جزئیات بیشتر [۲۱، ۲۰، ۱۸، ۶] را ببینید. فرض کنیم A و B ماتریس‌هایی به عنوان بردارهای ورودی نسبت به G باشند، آنگاه اگر
$G(x; A, B) = Ax \quad B|x| \quad b,$

آنگاه $G_x'(x; A, B) = A \quad BD(x)$ و $G_A'(x; A, B) = diag\ (x)$ و $G_B'(x; A, B) =$ $D(x)|x|$ که در آن $\mathrm{diag}(x)$ یک ماتریس قطری با عناصر $d_{ii} = x_i$ و $i = 1, \dots, n$ می‌باشند:

$$\mathrm{cond}(G; A, B) = \left\|G_x'(x; A)^{-1} G_A'(x\ ; A)\right\| \frac{\|A\|}{\|x\ \|} + \left\|G_x'(x\ ; B)^{-1} G_B(x\ ; B)\right\| \frac{\|B\|}{\|x\ \|}. \qquad (۲۷)$$

با جایگزین کردن مشتقات G_x' و G_A' در رابطه‌ی (۲۷) داریم:

$$\mathrm{cond}(G; A, B) = \left\|\left(A \quad BD(x\ )\right)^{-1} \times diag(x\ )\right\| \times \frac{\|A\|}{\|x\ \|} + \left\|\left(\quad BD(x\ )\right)^{-1} \times diag(x\ )\right\| \times \frac{\|B\|}{\|x\ \|}. \qquad (۱۱)$$

با ساده‌تر کردن تساوی بالا داریم:

$$\mathrm{cond}(G; A, B) = \left\|\left(A \quad BD(x\ )\right)^{-1}\right\| \times \|A\| + \|(\quad BD(x\ )^{-1}\| \times \|B\|. \qquad (۱۲)$$

در رابطه‌ی (۲۹) اگر $D(x\ ) = o$، آنگاه داریم:

$$K(G;A,B) = \left\|A^{-۱}\right\| \|A\|. \qquad (۱۳)$$

اکنون با در نظر گرفتن x تولید شده در روابط (۳) و (۴) به‌طور قطع می‌توان گفت که $x^{k+۱}$ خیلی وابسته به کاندیشن نامبر در رابطه‌ی (۳۰) است. اگر k خیلی بزرگ باشد، یعنی عدد کاندیشن نامبر عددی بزرگی باشد، آنگاه مقدار $G(x^k)$ به صفر میل می‌کند. بنابراین ما یک سیستم خطی همگن داریم. اکنون فرض کنیم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{fl}\left(G\left(x^k;A,B\right)\right) \\ &= \left(I+\Delta G_\varepsilon^k\right)G\left(x^k+x_\varepsilon^k;A+A_\varepsilon,B+B_\varepsilon\right) \\ &= G\left(x^k\right)+\delta G\left(x^k\right), \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

جایی که $\mathrm{eps} = ۵\times ۱۰^{-t}$ و O_ε به ترتیب دقت ماشین و خطای گرد کردن O و $\|\Delta G_\varepsilon\| \sim \mathrm{eps}$ و $\|x_\varepsilon\| \sim \mathrm{eps}$ و $\|A_\varepsilon\| \sim \mathrm{eps}\|A\|$ و $\|B_\varepsilon\| \sim \mathrm{eps}\|B\|$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} &\delta G\left(x^k\right) = \Delta G_\varepsilon^k G\left(x^k\right) + \\ &\left(A \quad BD\left(x^k\right)\right)x_\varepsilon^k + \\ &\mathrm{diag}\left(x^k\right)D\left(A_\varepsilon\right) \\ &+\left(\quad BD\left(x^k\right)\right)x_\varepsilon^k + \\ &\mathrm{diag}\left(x\ \right)D\left(B_\varepsilon\right) + O(\mathrm{eps})^{۲}, \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

جایی که D یک بردار با عناصر $d_i =$ $\max A_\varepsilon(i,j)$، $j = ۱,\dots,n$ و $d_i =$ $\max B_\varepsilon(i,j)$ که در آن $j = ۱,\dots,n$. بنابراین فرض کنیم:

$$\begin{aligned} &fl\left(G'\left(x^k;A,B\right)\right) \\ &= G'\left(x^k\right)+\delta G'\left(x^k\right), \\ &\delta G'\left(x^k\right) = O(eps). \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

آنگاه حل عددی (۳) با استفاده از $E_k = O(\mathrm{eps})$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\left(G'\left(x^k\right)+\delta G'\left(x^k\right)+E^k\right)\Delta\tilde{x}^k \qquad (۱۷)$$

$$= G\left(x^k\right)+\delta G\left(x^k\right),$$

برای جزئیات بیشتر [۶] را ببینید. سپس $x^{k+۱}$ توسط فرمول زیر مقایسه شده است:

$$x^{k+۱} = \left(I+\varepsilon^k\right)\left(x^k+\Delta\tilde{x}^k\right) \qquad (۱۸)$$

جایی که ε^k ماتریس قطری با $\|\varepsilon^k\| \sim eps$ می‌باشد. اکنون می‌توانیم پایداری عددی (۳۴) و (۳۵) را اثبات کنیم.

قضیه ۸. فرض کنیم روابط (۳۱) و (۳۳) برقرار باشند، آنگاه روش (۳۴) و (۳۵) دارای پایداری عددی هستند.

برهان. اثبات مشابه قضیه‌ی ۵.۱ در [۲۰] است یا به مرجع [۲۵] مراجعه نمایید.

اجرای عددی و مقایسات

در این قسمت از مطالعه، ما مرتبه‌ی همگرایی محاسباتی برای حل ۱۰۰ مثال از معادلات در کلاس جدید (۱) با استفاده از روش نیوتن تعمیم‌یافته به صورت زیر به دست آورده‌ایم.

با استفاده از دستور randi([-m,m],n,n) در متلب، ۱۰۰ ماتریس تصادفی $A,B \in {}^{n\times n}$ برای مقادیر متفاوت به طوری که $n = ۲۰,۵۰,۱۰۰,۵۰۰,۱۰۰۰$ و $m = ۱,۲,\dots,۲۰$ را به دست آورده‌ایم. ۱۰۰ جواب x با همین ایده تنها برای $m = ۰.۵$ و همچنین بردار b را به صورت $b = Ax \quad B|x|$ به دست آمده است.

مقادیر $x^{۰}$ ابتدایی طوری انتخاب شده است که در مفروضات همخوانی داشته باشد. ما مرتبه‌ی همگرایی عددی (COC) به‌صورت زیر استفاده کرده‌ایم. برای جزئیات بیشتر به [۲۰، ۱۷، ۶، ۳] را ببینید.

$$COC = \frac{L_n\left\|x^{k+۱}-x^k\right\|}{L_n\left\|x^k-x^{k-۱}\right\|}, \qquad (۱۹)$$

$\left(k = ۰, ۱, ۲, \ldots\right)$.

در جدول‌های ۱ تا ۵، مرتبه‌ی همگرایی معادلات کلاس جدید (۱) را با دیگر روش‌ها مقایسه کرده‌ایم.

جدول ۱: نتایج عددی و مقایسات برای $n = ۲۰$

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۱٫۷۳۰۰	۰٫۰۰۴۵۵
روش حل منگسرین در [۱۰]	۰٫۹۹۸۴	۰٫۰۰۰۲۵۵
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۲۲۷۵	۰٫۰۰۰۳۹۲
روش حل کلاس جدید (۱)	۲٫۰۵۱۷	۰٫۰۰۰۳۹۲

جدول ۲: نتایج عددی و مقایسات برای $n = ۵۰$

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۲٫۰۸۱۴	۰٫۰۰۴۵۱
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۰۰۵۰	۰٫۰۰۰۳۵۰
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۷۰۰
روش حل کلاس جدید (۱)	۲٫۰۱۵۰	۰٫۰۰۰۸۹۷

جدول ۳: نتایج عددی و مقایسات برای $n = ۱۰۰$

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۱٫۹۶۸۳	۰٫۰۰۰۸۹۶
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۰۲۸۴	۰٫۰۰۱۰۲۱
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۷۴۴	۰٫۰۰۲۱۰۵
روش حل کلاس جدید (۱)	۱٫۹۱۲۰	۰٫۰۰۳۷۵۲

جدول ۴: نتایج عددی و مقایسات برای $n = ۵۰۰$

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۲٫۱۰۳۲	۰٫۰۲۱۶
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۰۲۲۸	۰٫۱۷۹۳۵
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۱۰۰	۰٫۰۳۵۸۱
روش حل کلاس جدید (۱)	۲٫۱۰۳۸	۰٫۰۷۳۹

جدول ۵: نتایج عددی و مقایسات برای $n = ۱۰۰۰$

روش	COC	زمان
روش حل زینلی و لطفی در [۲۱]	۲٫۰۱۵۸	۰٫۰۷۸۸
روش حل منگسرین در [۱۰]	۱٫۱۱۸۱	۰٫۰۷۵۱۴
روش حل خاکسار در [۵]	۱٫۰۰۲۷	۰٫۱۷۶۶
روش حل کلاس جدید (۱)	۱٫۹۷۹۱	۰٫۴۳۱۲

نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش نیوتن تعمیم‌یافته برای حل کلاس جدیدی از معادلات مقدار قدرمطلقی را به کار گرفتیم که نه تنها دارای پایداری عددی بلکه دارای همگرایی موضعی مرتبه‌ی دوم نیز می‌باشد. از مزایای این روش، این است که دامنه‌ی انتخابمان برای حل معادلات قدر مطلقی بیشتر شده است. چون تا قبل از این کار، فقط انتخابمان روی معادلات در حالت $B = I$ بوده است. برای کارهای عادی پیشنهاد می‌شود از روش‌هایی بدون مشتقی مانند وتری یا استیفنسن برای حل این معادلات همراه با تحلیل خطا انجام شود. همچنین، تعمیم و توسعه روش‌ها بالاتر بدون مشتق هم می‌تواند ایده جالبی باشد زیرا بیشتر روش‌ها همگرایی خطی دارند و حجم محاسباتی بالای را هم در بر می‌گیرند. استفاده از تحلیل دینامیکی ناحیه جذب هم می‌تواند ایده مناسب دیگری برای مطالعه این معادلات باشد.

تشکر و قدردانی: نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند از داوران محترم که به ارتقا کیفیت مقاله کمک نموده‌اند مراتب تشکر و قدردانی خود را صمیمانه ابراز دارند.

فهرست منابع

[1] L. Caccetta, B. Qu, and G. Zhou. A globally and quadratically convergent method for absolute value equations. Computational Optimization and Applications, 48(1):45–58, 2011.

[2] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martinez, and J. R. Torregrosa. A modified Newton-Jarratts composition. Numerical Algorithms, 55(1):87–99, 2010.

[3] A. Cordero, T. Lotfi, K. Mahdiani, and J. R. Torregrosa. A stable family with high order of convergence for solving nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 254:240–251, 2015.

[4] R. Farhadsefat, T. Lotfi, and J. Rohn. A note on regularity and positive definiteness of interval matrices. Open Mathematics, 10(1):322–328, 2012.

[5] F. K. Haghani. On generalized Traubs method for absolute value equations. Journal of Optimization Theory and Applications, 166(2):619–625, 2015.

[6] N. J. Higham. Accuracy and stability of numerical algorithms. SIAM, 1996.

[7] J. L. Hueso, E. Martinez, and J. R. Torregrosa. Modified Newtons method for systems of nonlinear equations with singular Jacobian. Journal of Computational and Applied Mathematics, 224(1):77–83, 2009.

[8] T. Lotfi, P. Bakhtiari, A. Cordero, K. Mahdiani, and J. R. Torregrosa. Some new efficient multipoint iterative methods for solving nonlinear systems of equations. International Journal of Computer Mathematics, 92(9):1921–1934, 2015.

[9] T. Lotfi, K. Mahdiani, P. Bakhtiari, and F. Soleymani. Constructing two-step iterative methods with and without memory. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(2):183–193, 2015.

[10] O. Mangasarian. A generalized newton method for absolute value equations. Optimization Letters, 3(1):101–108, 2009.

[11] O. Mangasarian and R. Meyer. Absolute value equations. Linear Algebra and Its Applications, 419(2-3):359–367, 2006.

[12] O. L. Mangasarian. Absolute value equation solution via concave minimization. Optimization Letters, 1(1):3–8, 2007.

[13] O. L. Mangasarian. A hybrid algorithm for solving the absolute value equation. Optimization Letters, 9(7):1469–1474, 2015.

[14] O. Prokopyev. On equivalent reformulations for absolute value equations. Computational Optimization and Applications, 44(3):363, 2009.

[15] J. Rohn. On unique solvability of the absolute value equation. Optimization Letters, 3(4):603–606, 2009.

[16] J. Rohn, V. Hooshyarbakhsh, and R. Farhadsefat. An iterative method for solving absolute value equations and sufficient conditions for unique solvability. Optimization Letters, 8(1):35–44, 2014.

[17] F. Soleymani, T. Lotfi, and P. Bakhtiari. A multi-step class of iterative methods for nonlinear systems. Optimization Letters, 8(3):1001–1015, 2014.

[18] J. Stoer and R. Bulirsch. Introduction to numerical analysis, volume 12. Springer Science & Business Media, 2013.

[19] J. F. Traub. Iterative methods for the solution of equations, volume 312. American Mathematical Soc., 1982.

[20] H. Wozniakowski. Numerical stability for solving nonlinear equations. Numerische Mathematik, 27(4):373–390, 1976.

[21] N. Zainali and T. Lotfi. On developing a stable and quadratic convergent method for solving absolute value equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 330:742–747, 2018.

[22] T. Lotfi; Y. Seif, An improved generalized Newton generalized method for absolute value equation, New Researches in Mathematics, 29 (7) 103-110, 2021

[23] Wang, A., Cao, Y., Chen, J.-X., Modified Newton-Type iteration methods for generalized absolute value equations, J. Optimization Theory and Applications, 181(1), 216-230, 2019

[24] L. Zheng, L. The Picard-HSS-SOR iteration method for absolute value equations. *J Inequal Appl* **2020,** 258 2020.

[25] Y. Cao, Q. Shi, S. Zhu, A relaxed generaized Newton iteration method for generalized absolute value equation, AIMS Mathematics, 6(2), 1258-1275, 2021