

## گراف پوچساز قوی حلقه جابجایی

نازی عباچی<sup>۱\*</sup>، شروین صاحبی<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، واحد بوئین زهرا، دانشگاه آزاد اسلامی، بوئین زهرا، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۲۲

### چکیده

فرض کنید  $R$  حلقه جابجایی و یکدار و  $Z(R)$  مجموعه مقسوم علیه‌های صفر  $R$  باشد. اندرسون و بداوی گراف توتال  $T(\Gamma(R))$  را تعریف کرده که مجموعه رئوس آن تمام عناصر  $R$  بوده و دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجاورند اگر و تنها اگر  $x+y \in Z(R)$ . همچنین آن‌ها زیرگرافی از  $T(\Gamma(R))$  را با مجموعه رئوس  $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$  مطالعه کرده و با نماد  $Z_0(\Gamma(R))$  نشان دادند. در این گراف توتال نیز دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجاورند اگر و تنها اگر  $x+y \in Z(R)$ . در این مقاله گراف پوچساز قوی  $G_A(R)$  با مجموعه رئوس  $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$  تعریف می‌شود. در این گراف دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجاورند اگر و تنها اگر  $ann_R(x) \cap ann_R(y) \neq \{0\}$ . بنابراین هر یال  $G_A(R)$ ، یالی از  $Z_0(\Gamma(R))$  است. در این مقاله خواصی مانند همبندی، قطر، کمر و...  $G_A(R)$  بررسی و نشان داده می‌شود اگر  $R$  یک حلقه کاهشی باشد،  $G_A(R)$  همبند است اگر و تنها اگر  $|Min(R)| \geq 3$  و  $diam(G_A(R)) \in \{1, 2\}$  و نیز اگر  $R$  حلقه غیرکاهشی باشد،  $G_A(R)$  گرافی همبند بوده و  $diam(G_A(R)) \in \{0, 1, 2\}$ . همچنین در صورتی که  $R$  حوزه صحیح نباشد،  $girth(G_A(R)) \in \{3, \infty\}$ . تام و کردال بودن  $G_A(R)$  بررسی شده و نشان داده می‌شود اگر  $G_A(R)$  دارای عدد خوشه‌ای متناهی باشد،  $G_A(R)$  کردال است اگر و تنها اگر  $|Max(R)| \leq 3$  و  $G_A(R)$  تام است اگر و تنها اگر  $|Max(R)| \leq 4$ ، که  $Max(R)$  مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال  $R$  است.

واژه‌های کلیدی: مقسوم علیه صفر؛ گراف کردال؛ گراف کامل؛ گراف تام.

## ۱- مقدمه

اختصاص یک موضوع ترکیبی به ساختار جبری باعث به وجود آمدن مسائل جالب در جبر و ترکیبیات شده است. بنابراین مطالعه گراف‌های وابسته به حلقه‌ها یکی از موضوعات مهم در این زمینه می‌باشد. مقالات زیادی برای به دست آوردن نتایج جبری در نظریه حلقه‌ها وجود دارد (به عنوان مثال [5]–[1]).

در این مقاله حلقه  $R$ ، حلقه جابجایی و یک‌دار در نظر گرفته شده است. مجموعه تمام عناصر پوچ توان، ایده‌آل‌های اول مینیمال و ایده‌آل‌های ماکسیمال به ترتیب با  $Nil(R)$ ،  $Min(R)$  و  $Max(R)$  نشان داده می‌شود. همچنین مجموعه تمام مقسوم علیه‌های صفر  $R$ -مدول  $M$  با نماد  $Z(M)$  نشان داده شده (رابطه (۱)) که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(M) = \{r \in R \mid rx = 0, 0 \neq x \in M\} \quad (۱)$$

مشخصه حلقه  $R$  با نماد  $char(R)$  نشان داده می‌شود. برای زیر مجموعه  $A$  از حلقه  $R$ ،  $A^* = A \setminus \{0\}$ . برای هر ایده‌آل  $I$  از  $R$ ، پوچساز  $I$  با  $ann_R(I)$  نشان داده می‌شود. ایده‌آل ناصفر  $I$  از  $R$  اساسی است، اگر  $I$  با هر ایده‌آل ناصفر  $R$  اشتراک ناصفر داشته باشد. حلقه  $R$  کاهش یافته است، اگر عنصر پوچ توان ناصفر نداشته باشد (برای اصطلاحات دیگر در نظریه حلقه به [7]، [6] مراجعه شود).

فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف باشد که در آن  $V = V(G)$  مجموعه رئوس و  $E = E(G)$  مجموعه یال‌هاست. قطر و کمر گراف  $G$  به ترتیب با  $diam(G)$  و  $girth(G)$  نشان داده می‌شود. از نماد  $K_n$  برای گراف کامل مرتبه  $n$  استفاده می‌شود.  $G$  گراف پوچ است اگر یالی نداشته باشد. گراف  $n$ -بخشی‌گرافی است که مجموعه رئوس آن به  $n$  زیر مجموعه تقسیم می‌شود به طوری که دو سر هیچ یالی در یک مجموعه نباشد. گراف  $n$ -بخشی کامل گرافی است که هر رأس آن با همه رئوس دیگر که در یک زیر مجموعه نیستند مجاور باشد. در گراف  $G$ ، رأس  $x$  را ایزوله گویند هرگاه  $x$  با هیچ رأسی از  $G$  مجاور نباشد.

برای گراف  $G$ ،  $S \subseteq V(G)$  یک خوشه است، اگر زیرگراف القایی روی  $S$  کامل باشد. تعداد رئوس بزرگترین خوشه‌ی گراف  $G$  عدد خوشه‌ای  $G$  است و با  $\omega(G)$  نشان داده می‌شود.

عدد رنگی گراف  $G$  ( $\chi(G)$ ) کمترین تعداد رنگ‌هایی است که می‌توان به رئوس گراف نظیر کرد به طوری که هر دو رأس مجاور رنگ‌های متفاوتی داشته باشند.

واضح است برای هر گراف  $G$ ،  $\omega(G) \leq \chi(G)$ .

$G$  را تام ضعیف گویند اگر  $\omega(G) = \chi(G)$ . گراف تام  $G$  گرافی است که برای هر زیرگراف القایی آن، عدد رنگی و خوشه‌ای با هم برابر باشند.

یک کرد از دور  $C$  یالی است که در  $C$  نباشد ولی ابتدا و انتهای آن جزء رئوس  $C$  باشند.

گراف  $G$  را کردال گویند اگر هر دور با طول حداقل ۴ شامل یک کرد باشد.

گراف  $H = (V_0, E_0)$  زیرگرافی از  $G$  است، اگر  $V_0 \subseteq V$  و  $E_0 \subseteq E$ . به علاوه  $H$  را زیرگراف القایی توسط  $V_0$

گویند، اگر  $V_0 \subseteq V$  و  $E_0 = \{uv \mid u, v \in V_0\}$  که با نماد  $G[V_0]$  نشان داده می‌شود.

فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف متمایز باشند. الحاق  $G_1$  و  $G_2$  با نماد  $G_1 \hat{e} G_2$ ، گرافی است با رؤس  $E(G_1 \hat{e} G_2) = (G_1) \cup (G_2)$  و مجموعه یال‌های  $V(G_1 \hat{e} G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ . همچنین  $E(G_1 + G_2) = \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$  گرافی است با مجموعه رؤس  $V(G_1) \cup V(G_2)$  و مجموعه یال‌های  $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$  (برای اصطلاحات دیگر در تئوری گراف به [8] مراجعه شود).

فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی با  $1 \neq 0$  باشد. اندرسون و بداوی در [9] گراف توتال  $T(\Gamma(R))$  را تعریف کرده به طوری که مجموعه رؤس آن تمام عناصر  $R$  بوده و دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجاورند اگر و تنها اگر  $x + y \in Z(R)$ . همچنین آن‌ها زیرگرافی از  $T(\Gamma(R))$  را با مجموعه رؤس  $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$  مطالعه کردند. این زیر گراف را با نماد  $Z_0(\Gamma(R))$  نشان دادند. در این گراف نیز دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجاورند اگر و تنها اگر  $x + y \in Z(R)$ . در واقع این زیرگراف، گراف توتال روی مقسوم علیه‌های صفر ناصفر  $R$  است. در این مقاله برای حلقه  $R$ ، گراف غیر جهت دار دیگری با رؤس  $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$  تعریف می‌شود به طوریکه دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجاورند اگر و تنها اگر  $ann_R(x) \neq ann_R(y)$ . این گراف، گراف پوچساز قوی نامیده شده و با نماد  $G_A(R)$  نشان داده می‌شود. به سادگی می‌توان دید  $G_A(R)$  زیر گرافی از  $Z_0(\Gamma(R))$  است، و نیز روابط بین ویژگی‌های گراف  $G_A(R)$  و خواص جبری حلقه‌ها بررسی می‌شود. به علاوه رابطه بین گراف پوچساز قوی و گراف توتال روی عناصر مقسوم علیه صفر ناصفر حلقه جابجایی مطالعه و به طور خاص شرایط یکسان بودن گراف پوچساز قوی و گراف توتال بررسی می‌شود. در نهایت تام بودن گراف پوچساز قوی بررسی شده و نشان داده می‌شود اگر  $G_A(R)$  عدد خوشه‌ای متناهی داشته باشد، آنگاه  $G_A(R)$  تام است اگر و تنها اگر  $|Max(R)| \leq 4$  که  $Max(R)$  مجموعه همه ایده‌آل‌های ماکسیمال  $R$  است.

## ۲- خواص اساسی $G_A(R)$

در این بخش خاصیت‌های اساسی گراف  $G_A(R)$  بررسی می‌شود. برای مثال نشان داده می‌شود  $G_A(R)$  همبند است اگر و تنها اگر  $Z_0(\Gamma(R))$  گراف همبند باشد. به علاوه همه حلقه‌هایی که گراف پوچساز قوی آن‌ها دارای قطر ۱ یا ۲ می‌باشند، مشخص می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود، اگر گراف  $G_A(R)$  شامل یک دور باشد، آن‌گاه  $girth(G_A(R)) = 3$ .

لم ۱،۲: فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد در این صورت:

- (۱) برای هر  $x \in Nil(R)$ ،  $ann_R(x)$  ایده‌آل اساسی  $R$  است.
- (۲) اگر  $a \in Nil(R)$  و  $x \in Z(R)$ ، آن‌گاه  $a + x \in Z(R)$ .
- (۳) برای هر  $x \in R$ ،  $Rx + ann_R(x)$  یک ایده‌آل اساسی از  $R$  است.
- (۴) اگر برای  $x, y \in R$ ،  $xy = 0$ ، آن‌گاه  $ann_R(x) + ann_R(y)$  ایده‌آل اساسی  $R$  است.

**برهان: (۱)** فرض کنید  $x \in Nil(R)$  چنان موجود باشد که  $ann_R(x)$  یک ایده آل اساسی از  $R$  نباشد. در این صورت ایده آلی مانند  $I$  از  $R$  وجود دارد به طوری که  $I \cap ann_R(x) = (0)$ . این نتیجه می دهد برای هر  $a \in I^*$ ،  $ax \neq 0$ . واضح است  $ax \in I$ ، لذا  $axx = ax^2 \neq 0$ . از ادامه این روند نتیجه می شود برای هر عدد صحیح و مثبت  $n$ ،  $ax^n \neq 0$  و این یک تناقض است. این تناقض نشان می دهد  $ann_R(x)$  ایده آل اساسی از  $R$  می باشد.

**(۲)** فرض کنید  $a \in Nil(R)$  و  $x \in Z(R)$ . طبق قسمت (۱)،  $ann_R(a) + ann_R(x) \neq (0)$ . لذا  $0 \neq z \in ann_R(a) + ann_R(x)$  وجود دارد به طوریکه  $z(a+x) = 0$ . بنابراین  $a+x \in Z(R)$ . اگر  $Rx + ann_R(x)$  یک ایده آل اساسی از  $R$  نباشد، آن گاه ایده آل غیر صفر  $J$  از  $R$  موجود است به طوری که  $J \cap (Rx + ann_R(x)) = (0)$ . این به وضوح نتیجه می دهد  $JRx = (0)$ . بنابراین  $J \subseteq ann_R(x)$  که یک تناقض است. این تناقض نشان می دهد  $Rx + ann_R(x)$  یک ایده آل اساسی از  $R$  می باشد.

**(۴)** از  $xy = 0$ ، نتیجه می شود  $x \in ann_R(y)$ . بنابراین  $Rx \subseteq ann_R(y)$ . حال از قسمت (۳) نتیجه می شود  $ann_R(x) + ann_R(y)$  ایده آل اساسی از  $R$  می باشد.  $\square$

**لم ۲،۲:** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. در این صورت عبارات زیر برقرارند:

(۱) اگر  $x-y$  یالی از گراف  $G_A(R)$  باشد، آن گاه  $x-y$  یالی از گراف  $Z_0(\Gamma(R))$  نیز می باشد.  
 (۲) اگر  $x \in Nil(R)^*$ ، آن گاه  $x$  با همه رئوس دیگر گراف  $G_A(R)$  مجاور است.  
**برهان: (۱)** فرض کنید  $x-y$  یالی از  $G_A(R)$  باشد. لذا  $ann_R(x) \cap ann_R(y) \neq (0)$ ، و برای هر  $0 \neq z \in ann_R(x) \cap ann_R(y)$ ،  $z(x+y) = 0$ . این نتیجه می دهد  $x-y$  یک یال از گراف  $Z_0(\Gamma(R))$  نیز می باشد.

**(۲)** طبق قسمت (۱) لم ۱،۲،  $ann_R(x)$  یک ایده آل اساسی از  $R$  است. بنابراین برای هر  $y \in Z(R)^*$ ، نتیجه می شود  $ann_R(x) \cap ann_R(y) \neq (0)$ . بنابراین  $x$  با همه رئوس دیگر گراف  $G_A(R)$  مجاور است.  $\square$

در ادامه همبندی، قطر و کمر گراف  $G_A(R)$  بررسی می شود. برای حلقه کاهش یافته  $R$ ، اگر  $Z(R) \neq \{0\}$ ، آن گاه  $|Min(R)| \geq 2$ . همچنین اگر  $|Min(R)| = 2$ ، چون  $G_A(R)$  زیر گرافی از  $Z_0(\Gamma(R))$  است، لذا طبق قضیه ۳،۲ مرجع [9]،  $G_A(R)$  همبند نیست (در این مورد  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$ ).

**قضیه ۱،۲: الف)** فرض کنید  $R$  یک حلقه کاهش یافته باشد به طوری که حوزه صحیح نباشد. در این صورت  $G_A(R)$  همبند است اگر و تنها اگر  $|Min(R)| \geq 3$ . به علاوه اگر گراف  $G_A(R)$  همبند باشد، آن گاه  $diam(G_A(R)) \in \{1, 2\}$ .

**ب)** اگر  $R$  یک حلقه غیر کاهش یافته باشد،  $G_A(R)$  همبند است و  $diam(G_A(R)) \in \{0, 1, 2\}$ .

**برهان:** الف) یک طرف حکم بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر فرض کنید  $R$  یک حلقه کاهشی باشد و  $|Min(R)| \geq 3$ . فرض کنید  $x, y \in Z(R)^*$  به طوری که  $\lambda$  و  $y$  مجاور نباشند. لذا  $ann_R(x) \cap ann_R(y) = (0)$ . اگر  $xy \neq 0$ ، آن گاه  $x - xy - y$  یک مسیر از  $\lambda$  به  $y$  در  $G_A(R)$  می باشد. لذا فرض کنید  $xy = 0$ . در این حالت ادعا می شود  $z \in Z(R)^* \setminus \{x, y\}$  وجود دارد به طوری که

$$ann_R(z) \cap ann_R(y) \neq (0)$$

$$ann_R(z) \cap ann_R(x) \neq (0) \text{ و}$$

که به وضوح نتیجه می دهد  $x - z - y$  یک مسیر از  $\lambda$  به  $y$  در گراف  $G_A(R)$  می باشد. به برهان خلف فرض کنید برای هر  $z \in Z(R)^* \setminus \{x, y\}$ ،  $ann_R(z) \cap ann_R(x) = (0)$  یا  $ann_R(z) \cap ann_R(y) = (0)$ . لذا برای هر  $z \in Z(R)^* \setminus \{x, y\}$ ،  $ann_R(z) \subseteq ann_R(ann_R(x))$  یا  $ann_R(z) \subseteq ann_R(ann_R(y))$ . همچنین از  $ann_R(x) \cap ann_R(y) = (0)$  نتیجه می شود  $ann_R(y) \subseteq ann_R(ann_R(x))$  و  $ann_R(x) \subseteq ann_R(ann_R(y))$ .

از طرف دیگر چون  $R$  یک حلقه کاهشی است طبق گزاره ۱۵،۱ [6] داریم  $Z(R) = \bigcup_{x \neq 0} ann_R(x)$  لذا  $Z(R) = ann_R(ann_R(x)) \cup ann_R(ann_R(y))$  چون  $xy = 0$ ، از قسمت ۴ لم ۲، نتیجه می شود  $ann_R(x) + ann_R(y) = I$  یک ایده آل اساسی است و چون  $R$  یک حلقه کاهشی است،  $ann_R(ann_R(x)) \cap ann_R(ann_R(y)) = (0)$  این به همراه نتیجه ۴،۲ مرجع [10]، نتیجه می دهد  $|Min(R)| = 2$ ، که یک تناقض است. این تناقض اثبات ادعا را کامل می کند و لذا  $G_A(R)$  یک گراف همبند است و  $diam(G_A(R)) \in \{1, 2\}$ .

ب) چون  $R$  حلقه غیر کاهشی است، از قسمت ۲ لم ۲، نتیجه می شود هر عنصر پوچ توان غیر صفر با همه رئوس دیگر مجاور است، لذا  $G_A(R)$  یک گراف همبند بوده و  $diam(G_A(R)) \in \{0, 1, 2\}$ .  
در قضیه بعدی نشان داده می شود که  $girth(G_A(R)) = 3$ . ابتدا لم زیر بیان می شود.

**لم ۳،۲:** فرض کنید  $R$  یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت اگر  $x \in Z(R)^*$  موجود باشد به طوری که  $x^n = x^m$  ( $m$  و  $n$  دو عدد صحیح و مثبت)، آن گاه  $R$  یک حلقه تجزیه پذیر است.

**برهان:** فرض کنید  $x \in Z(R)^*$  به طوری که  $x^n = x^m$  ( $m$  و  $n$  اعداد صحیح و مثبت). بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد  $n < m$ .

بنابراین  $x^n(1 - x^{m-n}) = 0$ . لذا  $(1 - x^{m-n}) \in ann_R(x^n)$ ، که نتیجه می دهد  $Rx + ann_R(x) = R$ . چون  $R$  یک حلقه کاهشی است لذا  $R$  یک حلقه تجزیه پذیر است. □

**قضیه ۳،۲:** فرض کنید  $R$  حوزه صحیح نباشد. در این صورت  $girth(G_A(R)) \in \{3, \infty\}$ .

**برهان:** اگر  $R$  یک حلقه غیر کاهشی باشد، آن گاه از قسمت ۲ لم ۲، نتیجه می شود هر عنصر پوچ توان غیر صفر با همه رئوس دیگر در  $G_A(R)$  مجاور است. بنابراین  $girth(G_A(R)) \in \{3, \infty\}$ . اگر  $R$  یک حلقه کاهشی

باشد. چون  $R$  حوزه صحیح نیست، می‌توان  $x \in Z(R)^*$  را انتخاب کرد. اگر برای هر دو عدد صحیح مثبت و متمایز  $m$  و  $n$ ،  $x^n \neq x^m$ ، آن‌گاه  $\text{girth}(G_A(R)) = 3$ . لذا فرض کنید دو عدد صحیح و مثبت متمایز مانند  $m$  و  $n$  وجود دارند به طوری که  $x^n = x^m$ . در این صورت از لم ۲، ۳ نتیجه می‌شود  $R \cong R_1 \times R_2$  که در آن  $R_1$  و  $R_2$  دو حلقه می‌باشند. اگر  $|\text{Min}(R)| = 2$ ، به سادگی می‌توان دید  $G_A(R) = K_{|R_1^+|} + K_{|R_2^+|}$  و لذا  $\text{girth}(G_A(R)) \in \{3, \infty\}$ . اگر  $|\text{Min}(R)| \geq 3$ ، چون  $R \cong R_1 \times R_2$ ، لذا  $|\text{Min}(R_1)| \geq 2$  یا  $|\text{Min}(R_2)| \geq 2$ . بدون کاستن از کلیت فرض کنید  $|\text{Min}(R_2)| \geq 2$ . با روش مشابه برای  $R_2$ ،  $\text{girth}(G_A(R)) = 3$  یا دوباره تجزیه می‌شود. بدون کاستن از کلیت فرض کنید  $R \cong R_1 \times R_2 \times R_3$ . در این صورت دور  $(1,0,0) - (1,1,0) - (0,1,0) - (1,0,0)$  یک مثلث در گراف  $G_A(R)$  می‌باشد و لذا در این حالت نیز  $\text{girth}(G_A(R)) = 3$ .  $\square$

حال حلقه‌هایی که گراف پوچساز قوی آن‌ها کامل است طبقه‌بندی می‌شود. ابتدا حلقه‌هایی مشخص می‌شود که در آن‌ها رأسی از گراف  $G_A(R)$  وجود دارد که با بقیه رئوس مجاور است.

**قضیه ۲، ۳:** فرض کنید  $R$  حوزه صحیح نباشد. در این صورت  $\lambda$  با همه رئوس دیگر  $G_A(R)$  مجاور است اگر و تنها اگر  $Z(\text{ann}_R(x)) = Z(R)$ .

**برهان:** ابتدا فرض کنید راس  $\lambda$  با همه رئوس دیگر گراف  $G_A(R)$  مجاور است. نشان داده می‌شود  $Z(\text{ann}_R(x)) = Z(R)$ .

فرض کنید  $y \in Z(R) \setminus Z(\text{ann}_R(x))$ . چون  $x \in Z(\text{ann}_R(x))$ ، لذا  $x \neq y$ . بنابراین  $\lambda$  با  $y$  مجاور است. از این مجاورت نتیجه می‌شود  $\text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(y) \neq (0)$  که یک تناقض است. بنابراین  $Z(\text{ann}_R(x)) = Z(R)$ .

برعکس، فرض کنید  $Z(\text{ann}_R(x)) = Z(R)$ . اگر  $y \in Z(R)$  وجود داشته باشد به طوری که  $\text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(y) = (0)$ ، آن‌گاه  $y \in Z(R) \setminus Z(\text{ann}_R(x))$ ، که تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد  $\lambda$  با تمام رئوس دیگر مجاور است.  $\square$

**نتیجه ۱، ۲:** فرض کنید  $R$  حلقه ای باشد که حوزه صحیح نیست. در این صورت  $G_A(R)$  یک گراف کامل است اگر و تنها اگر برای هر  $x \in Z(R)^*$ ،  $Z(\text{ann}_R(x)) = Z(R)$ . حلقه جابجایی  $R$  و  $R$ -مدول  $M$  را در نظر

بگیرید. ایده‌آل سازی  $M$ ، حلقه  $R(+M)$  است که برای هر  $r, s \in R$  و  $m, n \in M$ ، جمع به صورت

$$(r, m) + (s, n) = (r + s, m + n) \quad \text{و ضرب به صورت} \quad (r, m)(s, n) = (rs, rn + sm) \quad \text{تعریف می‌شود.}$$

حال مثال زیر که مرتبط با نتیجه ۱، ۲ است بیان می‌شود:

مثال ۱، ۲: (۱) فرض کنید  $M = Q/Z_{(2)}$  و  $R = \mathbb{Z}(+)M$ . لذا  $Z(R) = (2)(+)M$  و  $Nil(R) = (0)(+)M$ ، بنابراین  $Z(R) \neq Nil(R)$ . به سادگی می توان دید برای هر  $x \in Z(R)^*$ ،  $Z(ann_R(x)) = Z(R)$ .

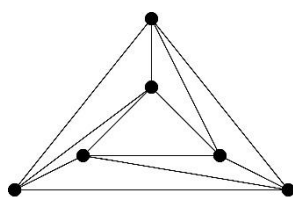
(۲) فرض کنید  $R = \mathbb{Z}_2[X, Y]/(XY, X^2)$  و  $x = X + (XY, X^2)$  و  $y = Y + (XY, X^2)$ . آن گاه  $Nil(R) = \{0, x\}$  و  $Z(R) = (x, y)R$  به سادگی می توان دید برای هر  $x \in Z(R)^*$ ،  $Z(ann_R(x)) = Z(R)$ .

(۳) فرض کنید  $Z(R) = Nil(R)$ . برای هر  $x \in Z(R)$ ، طبق قسمت ۱ لم ۱، ۲،  $ann_R(x)$  ایده آل اساسی  $R$  است و برای هر  $x \in Z(R)^*$ ،  $Z(ann_R(x)) = Z(R)$ .

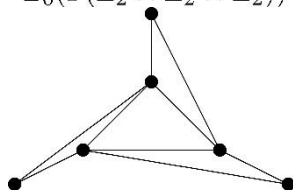
### ۳- شرایط تساوی گراف های $G_A(R)$ و $Z_0(\Gamma(R))$

در قسمت قبل نشان داده شد  $Z_0(\Gamma(R))$  و  $G_A(R)$  روی مقسوم علیه های صفر ناصفر به هم نزدیک هستند. پس مشخص کردن حلقه هایی که  $Z_0(\Gamma(R))$  روی مقسوم علیه های صفر ناصفر با  $G_A(R)$  مساویند جالب است. لذا در این بخش چنین حلقه هایی مورد مطالعه قرار می گیرد.

مثال ۱، ۳: (۱) فرض کنید  $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . در این صورت  $Z_0(\Gamma(R)) \neq G_A(R)$ . (در شکل (۱) نمایش داده شده است).



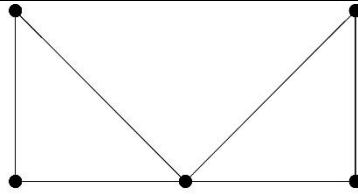
$Z_0(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2))$



$G_A(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

شکل ۱: نمایش مثال (۱)

(۲) فرض کنید  $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ . در این صورت  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$ . در شکل (۲) نمایش داده شده است.



$$Z_0(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)) = G_A(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$$

شکل ۲: نمایش مثال (۲)

در قضیه زیر برای هر حلقه آرتینی  $R$  نشان داده می‌شود،  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$  اگر و تنها اگر  $|Max(R)| \leq 2$ .

**قضیه ۱،۳:** فرض کنید  $R$  حلقه آرتینی باشد. در این صورت  $|Max(R)| \leq 2$  اگر و تنها اگر  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$

**برهان:** فرض کنید  $|Max(R)| \leq 2$ . نشان داده می‌شود  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$ . در این صورت اگر  $|Max(R)| = 1$ ، آن گاه طبق قسمت ۲،  $G_A(R)$  گراف کامل است و چون  $G_A(R)$  زیرگرافی از  $Z_0(\Gamma(R))$  است، هر دو گراف کامل اند. بنابراین  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$ . حال فرض کنید  $|Max(R)| = 2$  و  $Max(R) = \{m_1, m_2\}$  چون  $m_1 \cap m_2 = Nil(R)$ ، طبق قسمت ۲، هر  $x \in m_1^* \cap m_2^*$  با تمام رؤس دیگر گراف های  $G_A(R)$  و  $Z_0(\Gamma(R))$  مجاور است.

حال فرض کنید  $x, y \in m_1 \setminus m_2$ . چون  $Rx \subseteq m_1$  و  $ann_R(m_1) \subseteq ann_R(x)$  به طور مشابه  $ann_R(m_1) \subseteq ann_R(y)$ . بنابراین  $ann_R(m_1) \subseteq ann_R(x) \cap ann_R(y)$ . این نتیجه می‌دهد:  $ann_R(x) \cap ann_R(y) \neq (0)$  و لذا  $x$  و  $y$  در  $G_A(R)$  و  $Z_0(\Gamma(R))$  مجاورند. بنابراین  $G_A(R)[m_1 \setminus m_2]$  و  $Z_0(\Gamma(R))[m_1 \setminus m_2]$  گراف های کامل هستند. به طور مشابه  $G_A(R)[m_2 \setminus m_1]$  و  $Z_0(\Gamma(R))[m_2 \setminus m_1]$  نیز گراف های کامل هستند. از طرف دیگر اگر  $x \in m_1 \setminus m_2$  و  $y \in m_2 \setminus m_1$ ، آن گاه  $x + y \in U(R)$ . بنابراین  $x$  و  $y$  در هیچکدام از گراف های  $G_A(R)$  و  $Z_0(\Gamma(R))$  مجاور نیستند. از آنجا که:  $Z(R) = \{m_1 \cap m_2\} \cup \{m_1 \setminus m_2\} \cup \{m_2 \setminus m_1\}$  پس رابطه (۲) را خواهیم داشت:

$$G_A(R) = Z_0(\Gamma(R)) = K_{|m_1^* \cap m_2^*|} \vee (K_{|m_1 \setminus m_2|} + K_{|m_2 \setminus m_1|}) \quad (۲)$$

برعکس، اگر  $|Max(R)| \geq 3$  نشان داده می‌شود  $G_A(R) \neq Z_0(\Gamma(R))$ . به برهان خلف فرض کنید  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$ . چون  $R$  آرتینی است و  $|Max(R)| \geq 3$ ، لذا  $R \cong R_1 \times R_2 \times R_3$ . اگر  $char(R_1) \neq 2$ ، آنگاه  $(1, 0, 1)$  و  $(-1, 1, 0)$  در  $Z_0(\Gamma(R))$  مجاورند، ولی در  $G_A(R)$  مجاور نیستند، که تناقض است. بنابراین  $char(R_1) = 2$ . به طور مشابه  $char(R_2) = char(R_3) = 2$ . به وضوح  $(1, 0, 1)$  و



$(1,1,0)$  در  $Z_0(\Gamma(R))$  مجاورند ولی در  $G_A(R)$  مجاور نیستند، که تناقض است. بنابراین  $\square. G_A(R) \neq Z_0(\Gamma(R))$

برای بیان قضیه بعد تعاریفی از [7] باید در نظر گرفته شود. فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول باشد.  $x \in R$  عنصر  $M$ -منظم است، اگر برای  $z \in M$ ،  $xz = 0$  نتیجه دهد  $z = 0$ . به عبارت دیگر  $\lambda$ ، مقسوم علیه صفر  $M$  نباشد. همچنین  $\lambda$  زیر نیز مورد نیاز است:

**لم ۳،۱:** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد و  $x, y \in Z(R)^*$ . در این صورت  $\lambda$  یک عنصر  $\text{ann}_R(y)$ -منظم از  $R$  است اگر و تنها اگر  $y$  یک عنصر  $\text{ann}_R(x)$ -منظم از  $R$  باشد.

**برهان:** فرض کنید،  $\lambda$  یک عنصر  $\text{ann}_R(y)$ -منظم از حلقه  $R$  باشد. لذا برای هر  $0 \neq a \in \text{ann}_R(y)$ ،  $xa \neq 0$ . حال اگر  $y$  عنصر  $\text{ann}_R(x)$ -منظم نباشد، آنگاه برای  $0 \neq b \in \text{ann}_R(x)$ ،  $by = 0$ . بنابراین  $b \in \text{ann}_R(y)$  به طوری که  $bx = 0$ ، که تناقض است. پس  $y$  یک عنصر  $\text{ann}_R(x)$ -منظم می باشد. برعکس به طور مشابه به دست می آید.  $\square$

**قضیه ۳،۲:** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

$$(1) \quad G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$$

(۲) به ازای  $x, y \in Z(R)^*$ ، اگر  $\lambda$  یک عنصر  $\text{ann}_R(y)$ -منظم باشد، آن گاه  $x + y$  یک عنصر  $R$ -منظم است. **برهان:** (۱)  $\Leftarrow$  (۲): چون  $\lambda$  عنصر  $\text{ann}_R(y)$ -منظم است، لذا برای هر  $0 \neq a \in \text{ann}_R(y)$ ،  $xa \neq 0$ . این نتیجه می دهد:  $\text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(y) = (0)$ . از آنجا که  $G_A(R) = Z_0(\Gamma(R))$ ، لذا  $x + y \notin Z(R)$ . بنابراین  $x + y$  یک عنصر  $R$ -منظم است.

(۲)  $\Leftarrow$  (۱): اگر  $x - y$  یالی از  $Z_0(\Gamma(R))$  باشد، و  $\text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(y) = (0)$ . در این صورت به سادگی می توان بررسی کرد،  $\lambda$  یک عنصر  $\text{ann}_R(y)$ -منظم است. لذا  $x + y$  یک عنصر  $R$ -منظم است. لذا  $x - y$  یالی از گراف  $Z_0(\Gamma(R))$  نیست، که یک تناقض است.  $\square$

#### ۴- کردال بودن گراف $G_A(R)$

در این بخش همه حلقه های  $R$  که به ازای آن ها گراف  $G_A(R)$  کردال است، بررسی می شود.

**لم ۴،۱:** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

$$(1) \quad \omega(G_A(R)) < \infty.$$

$$(2) \quad \chi(G_A(R)) < \infty.$$

(۳)  $R$  یک حلقه متناهی است.

**برهان:**  $(3) \Leftarrow (2), (1)$  ساده هستند. اگر  $(3) \Leftarrow (1)$  ثابت شود، آن‌گاه  $(2) \Leftarrow (3)$  به سادگی به دست می‌آید. بنابراین  $(3) \Leftarrow (1)$  تنها حالتی است که به اثبات نیاز دارد.

$(3) \Leftarrow (1)$ : فرض کنید  $\omega(G_A(R)) < \infty$ . نشان داده می‌شود  $R$  متناهی است. اگر  $Nil(R) = Z(R)$ ، آن‌گاه از قسمت ۲، ۱، نتیجه می‌شود گراف  $G_A(R)$  یک گراف کامل است. در نتیجه  $|Z(R)| < \infty$  و لذا  $R$  متناهی است. حال فرض کنید:  $Nil(R) \neq Z(R)$  و  $x \in Z(R) \setminus Nil(R)$ .

بنابراین مجموعه‌ی  $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  یک خوشه از گراف  $G_A(R)$  می‌باشد. چون  $\omega(G_A(R)) < \infty$ ، پس دو عدد صحیح و متمایز  $n, m$  وجود دارند به طوری که  $x^n = x^m$ . در نتیجه  $R$  یک حلقه تجزیه پذیر بوده، لذا حلقه‌های  $R_1$  و  $R_2$  وجود دارند به طوری که  $R \cong R_1 \times R_2$ . حال اگر  $x, y \in R_1^*$ ، آن‌گاه به سادگی می‌توان دید  $(x, 0)$  با  $(y, 0)$  مجاور است. از این مطلب نتیجه می‌شود مجموعه  $\{(x, 0) \mid x \in R_1^*\}$  یک مجموعه متناهی است، بر این اساس  $R_1$  یک حلقه متناهی می‌باشد. به طور مشابه می‌توان نشان داد  $R_2$  نیز متناهی است. بنابراین  $R$  یک حلقه متناهی است.  $\square$

**نتیجه ۱،۴:** فرض کنید  $R$  یک حلقه و  $\omega(G_A(R)) < \infty$ . در این صورت عدد صحیح و مثبت  $n$  وجود دارد که  $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$  و برای هر  $1 \leq i \leq n$  حلقه موضعی آرتینی می‌باشد. **برهان:** طبق لم ۱،۴ نتیجه می‌شود  $R$  یک حلقه آرتینی است. لذا طبق قضیه ۷،۸ مرجع [6]، عدد صحیح و مثبت  $n$  وجود دارد به طوری که  $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$  که برای هر  $1 \leq i \leq n$  یک حلقه موضعی آرتینی می‌باشد.

**لم ۲،۴:** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد و  $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$  که در آن  $n$  یک عدد صحیح و مثبت بوده و برای هر  $1 \leq i \leq n$  یک حلقه موضعی و آرتینی باشد. در این صورت:

(۱) اگر  $G_A(R)$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نباشد، آن‌گاه  $n \leq 4$ .

(۲) اگر  $G_A(R)$  شامل هیچ دور القایی به طول حداقل ۴ نباشد، آن‌گاه  $n \leq 3$ .

(۳) اگر  $x = (x_1, \dots, x_n)$  و  $y = (y_1, \dots, y_n)$  که برای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $x_i, y_i \in R_i$  و  $n \geq 2$  در این صورت  $1 \leq i \leq n$  وجود دارد، به طوری که  $ann_R(x_i) \cap ann_R(y_i) \neq (0)$  اگر و تنها اگر  $x - y$  یالی از گراف  $G_A(R)$  باشد. در حالت خاص اگر  $x_i - y_i$  یک یال از گراف  $G_A(R_i)$  باشد یا  $x_i = y_i \in Nil(R_i)$ ، آن‌گاه  $x - y$  یالی از گراف  $G_A(R)$  می‌باشد.

(۴) فرض کنید  $x, y, z$  عناصری از  $Z(R)^*$  باشند. همچنین فرض کنید  $ann_R(x) = ann_R(y)$ .  $x - z$  یالی از گراف  $G_A(R)$  است اگر و تنها اگر  $y - z$  یالی از گراف  $G_A(R)$  باشد.  $(\overline{G_A(R)})$  باشد.

(۵) فرض کنید  $a_1 - \dots - a_n - a_1$  یک دور فرد القایی به طول حداقل ۵ از گراف  $G_A(R)$  باشد. در این صورت برای هر  $1 \leq i, j \leq n$ ،  $i \neq j$ ،  $ann_R(a_i) \neq ann_R(a_j)$ .

**برهان:** (۱) فرض کنید  $n \geq 5$ . در این صورت به سادگی می‌توان بررسی کرد:

$$(0,1,1,0,1,1,\dots,1)-(0,1,0,1,1,1,\dots,1)-(1,0,0,1,1,1,\dots,1)-(1,0,1,1,0,1,\dots,1)- \\ (1,1,1,0,0,1,\dots,1)-(0,1,1,0,1,1,\dots,1)$$

یک دور به طول ۵ می باشد، که یک تناقض است. بنابراین  $n \leq 4$ .

(۲) فرض کنید  $n \geq 4$ . در این صورت به سادگی می توان نشان داد:

$$(0,1,1,0,1,\dots,1)-(0,1,0,1,1,\dots,1)- \\ (1,0,0,1,1,\dots,1)-(1,0,1,0,1,\dots,1)- \\ (0,1,1,0,1,\dots,1)$$

یک دور به طول ۴ می باشد، که یک تناقض است. بنابراین  $n \leq 3$ .

(۳) فرض کنید  $0 \neq a_i \in \text{ann}_R(x_i) \cap \text{ann}_R(y_i) \neq (0)$ .

در این صورت

$(0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0) \in \text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(y)$  لذا  $x - y$  یالی از گراف  $G_A(R)$  می باشد. عکس این مطلب واضح است. چون اگر برای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $\text{ann}_R(x_i) \cap \text{ann}_R(y_i) = (0)$ ، آن گاه  $\text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(y) = (0)$  حالت خاص حکم نیز به سادگی به دست می آید.

(۴) چون  $x - z$  یالی از  $G_A(R)$  است، لذا  $\text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(z) \neq (0)$   $\text{ann}_R(x) \cap \text{ann}_R(y) = (0)$  این مطلب همراه با  $\text{ann}_R(x) = \text{ann}_R(y)$  نتیجه می دهد،  $\text{ann}_R(y) \cap \text{ann}_R(z) \neq (0)$ ، لذا  $y - z$  یالی از گراف  $G_A(R)$  می باشد. برعکس به طور مشابه اثبات می شود.

(۵) اگر  $1 \leq i, j \leq n$ ،  $i \neq j$  وجود داشته باشد به طوری که  $\text{ann}_R(a_i) = \text{ann}_R(a_j)$ ، آن گاه با استفاده از قسمت ۴ تناقض به وجود می آید. □

حال قضیه مهم زیر بیان می شود:

**قضیه ۱،۴:** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد و  $\omega(G_A(R)) < \infty$ . در این صورت  $G_A(R)$  یک گراف کردال است اگر و تنها اگر  $|Max(R)| \leq 3$ .

**برهان:** چون  $\omega(G_A(R)) < \infty$ ، طرف اول طبق نتیجه ۱،۴ و قسمت ۲ لم ۲،۴ به دست می آید. برای اثبات عکس، چون  $\omega(G_A(R)) < \infty$ ، طبق نتیجه ۱،۴،  $R$  یک حلقه آرتمینی است. بنابراین اگر  $|Max(R)| \leq 2$ ، آن گاه طبق برهان قضیه ۱،۳، برای اعداد صحیح مثبت  $n, m, l$ ،  $G_A(R) = K_n \vee (K_m + K_l)$  واضح است در این مورد  $G_A(R)$  کردال است. بنابراین تنها کافی است حالت  $|Max(R)| = 3$  بررسی شود. در این حالت می توان  $R$  را به صورت  $R \cong R_1 \times R_2 \times R_3$  تجزیه کرد که در آن  $R_i$  ها حلقه های موضعی و آرتمینی می باشند. حال برای ادامه اثبات، مجموعه های (۲) در نظر گرفته شود:

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in Z(R_i)\} \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ A_2 = \{(x, y, z) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3)\}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \{(x, y, z) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3)\} \\
 A_4 &= \{(x, y, z) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3)\} \\
 B_1 &= \{(x, y, z) \mid x \in U(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3)\} \\
 B_2 &= \{(x, y, z) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3)\} \\
 B_3 &= \{(x, y, z) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in U(R_3)\}
 \end{aligned} \tag{۲}$$

و  $A \cap B = \emptyset$  واضح است. در این صورت می‌شود. در نظر گرفته می‌شود.  $B = \bigcup_{i=1}^3 B_i$  و  $A = \bigcup_{i=1}^4 A_i$   $V(G_A(R)) = A \cup B$  حال با این افراز برای رئوس گراف  $G_A(R)$  ادعا می‌شود این گراف شامل هیچ دور القایی به طول حداقل ۴ نمی‌باشد. به برهان خلف فرض کنید  $a_1 - \dots - a_n - a_1$  یک دور القایی به طول حداقل ۴ در این گراف باشد. نشان داده می‌شود  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap B_i = \emptyset$ . اگر چنین نباشد  $1 \leq i \leq n$  وجود دارد، به طوری که  $a_i \in \{a_1, \dots, a_n\} \cap B_1$ . لذا بدون کاستن از کلیت فرض می‌شود  $a_1 \in B_1$ . با توجه به ساختار عناصر  $B_1$  می‌توان نوشت  $a_1 = (u, v, a)$  که در آن  $u \in U(R_1)$ ،  $v \in U(R_2)$  و  $a \in Z(R_3)$ . این مطلب همراه با اینکه  $a_1$  با  $a_n$  و  $a_2$  مجاورند نتیجه می‌دهد، مولفه سوم  $a_2$  و  $a_n$  باید متعلق به  $Z(R_3)$  باشد. این شرایط برای  $a_2$  و  $a_n$  همراه با قسمت ۳ لم ۲،۴ می‌رساند  $a_2$  و  $a_n$  باهم مجاورند، که تناقض است. لذا  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap B_i = \emptyset$ ، به طور مشابه می‌توان نشان داد برای  $i = 2, 3$ ، بنابراین  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ ، که با کامل بودن گراف  $G_A(R)[A]$  در تناقض است. لذا  $G_A(R)$  شامل هیچ دور القایی به طول حداقل ۴ نیست، پس  $G_A(R)$  یک گراف کردال است.  $\square$

##### ۵- تام بودن گراف $G_A(R)$

در این بخش حلقه‌های  $R$  که به ازای آن‌ها گراف  $G_A(R)$  تام است بررسی می‌شود. ابتدا قضایای مهم زیر یادآوری می‌شود:

**قضیه ۱،۵:** گراف  $G$  تام است اگر و تنها اگر  $G$  و  $\bar{G}$  شامل دور فرد القایی با طول حداقل ۵ نباشند (قضیه گراف تام قوی [11]).

**قضیه ۲،۵:** هر گراف کردال تام است [12].

**نتیجه ۱،۵:** فرض کنید  $G$  یک گراف و  $\{V_1, V_2\}$  یک افراز از  $V(G)$  باشد. در این صورت اگر برای هر  $i = 1, 2$   $G[V_i]$  یک گراف کامل باشد، آن گاه  $G$  یک گراف تام است.

**برهان:** طبق قضیه ۱،۵ نشان داده می‌شود گراف‌های  $G$  و  $\bar{G}$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نمی‌باشند. به برهان خلف فرض کنید  $a_1 - \dots - a_n - a_1$  یک دور فرد القایی به طول حداقل ۵ در گراف  $G$  باشد. چون  $G[V_1]$  و  $G[V_2]$  کاملند، لذا  $|\{a_1, \dots, a_n\} \cap V_1| \geq 3$  یا  $|\{a_1, \dots, a_n\} \cap V_2| \geq 3$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $G$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نمی‌باشد. از طرف دیگر چون  $\bar{G}$  یک گراف دو بخشی است، نمی‌تواند شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ باشد. بنابراین طبق قضیه ۱،۵،  $G$  گراف کامل است.

**قضیه ۳,۵:** فرض کنید  $R$  یک حلقه و  $\omega(G_A(R)) < \infty$ . در این صورت  $G_A(R)$  یک گراف تام است اگر و تنها اگر  $|Max(R)| \leq 4$ .

**برهان:** چون  $\omega(G_A(R)) < \infty$ ، طرف اول حکم از نتیجه ۱,۴ و قسمت ۱ لم ۲,۴ به دست می آید. برای اثبات عکس، چون  $\omega(G_A(R)) < \infty$ ، طبق نتیجه ۱,۴،  $R$  یک حلقه آرتینی است. بنابراین اگر  $|Max(R)| \leq 3$ ، آن گاه از قضیه ۱,۴ نتیجه می شود  $G_A(R)$  یک گراف کردال است، لذا طبق قضیه ۲,۵ گراف  $G_A(R)$  گراف تام می باشد. بنابراین تنها حالت  $|Max(R)| = 4$  بررسی می شود. در این حالت می توان حلقه  $R$  را به صورت  $R \cong R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4$  نوشت، که  $R_i$  ها حلقه های موضعی و آرتینی می باشند. طبق قضیه ۱,۵ کافیت نشان داده شود  $G_A(R)$  و  $\overline{G_A(R)}$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نمی باشند. بنابراین لازم است ادعاهای زیر اثبات شوند:

**ادعای ۱:**  $G_A(R)$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نمی باشد. برای اثبات این ادعا افزاز زیر از رؤس گراف  $G_A(R)$  در نظر گرفته می شود. (مجموعه های (۳))

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ A_2 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ A_3 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ A_4 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ A_5 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ A_6 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ A_7 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ B_1 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ B_2 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ B_3 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ B_4 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in U(R_4)\} \\ C_1 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in U(R_3), w \in U(R_4)\} \\ C_2 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in U(R_4)\} \\ C_3 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ C_4 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in U(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \end{aligned}$$

(۳)

حال با قرار دادن  $A = |_{i=1}^7 A_i$ ،  $B = |_{i=1}^4 B_i$  و  $C = |_{i=1}^4 C_i$ ، به سادگی می توان بررسی کرد

لذا  $\{A, B, C\}$  یک افراز از مجموعه  $V(G_A(R)) = A \cup B \cup C$  و  $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$  می باشد. نشان داده می شود  $G_A(R)$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نمی باشد. به برهان خلف فرض کنید  $a_1 - \dots - a_n - a_1$  یک دور فرد القایی به طول حداقل ۵ در گراف  $G_A(R)$  باشد. نشان داده می شود  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C_1 = \emptyset$ . فرض کنید  $1 \leq i \leq n$  وجود دارد به طوری که  $a_i \in \{a_1, \dots, a_n\} \cap C_1$ . در این صورت با توجه به ساختار عناصر مجموعه‌ی  $C_1$  می توان فرض کرد  $a_i = (a, y, z, w)$

که  $z \in U(R_3), w \in U(R_4), a \in Nil(R_1), y \in U(R_2)$  واضح است اولین مولفه های  $a_{i+1}$  و  $a_{i-1}$  باید متعلق به  $Nil(R_1)$  باشند. لذا از قسمت ۳ لم ۲،۴ نتیجه می شود  $a_{i-1}$  با رأس  $a_{i+1}$  مجاور می باشد، که تناقض است. بنابراین  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C_1 = \emptyset$ .

به طور مشابه می توان نشان داد  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C_2 = \{a_1, \dots, a_n\} \cap C_3 = \{a_1, \dots, a_n\} \cap C_4 = \emptyset$  لذا  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C = \emptyset$ . این مطلب نتیجه می دهد  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A \cup B$ . از طرف دیگر طبق قسمت ۳ لم ۲،۴ به سادگی می توان نشان داد دو زیر گراف  $G_A(R)[A]$  و  $G_A(R)[B]$  گراف های کامل می باشند. لذا طبق نتیجه ۱،۵ یک تناقض به وجود می آید. بنابراین گراف  $G_A(R)$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نیست.

**ادعای ۲:**  $\overline{G_A(R)}$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نیست. برای اثبات این ادعا افراز زیر برای رئوس گراف  $\overline{G_A(R)}$  در نظر گرفته می شود. (مجموعه های (۴))

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in U(R_3), w \in U(R_4)\} \\ A_2 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in U(R_4)\} \\ A_3 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ A_4 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in U(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ B_1 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in U(R_4)\} \\ B_2 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ B_3 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ B_4 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ B_5 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ B_6 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ C_1 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in U(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ C_2 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in U(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \\ C_3 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in U(R_3), w \in Z(R_4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in U(R_4)\} \\ D &= \{(x, y, z, w) \mid x \in Z(R_1), y \in Z(R_2), z \in Z(R_3), w \in Z(R_4)\} \end{aligned} \quad (۴)$$

با قرار دادن  $A = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ ,  $B = \bigcup_{i=1}^6 B_i$  و  $C = \bigcup_{i=1}^4 C_i$  واضح است  $\{A, B, C, D\}$  یک افراز  $V(\overline{G_A(R)})$

می باشد. نشان داده می شود  $\overline{G_A(R)}$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نیست. به برهان خلف فرض کنید  $a_1 - \dots - a_n - a_1$  یک دور فرد القایی به طول حداقل ۵ در گراف  $\overline{G_A(R)}$  باشد. چون هر رأس از  $D$  یک رأس تنها از گراف  $\overline{G_A(R)}$  است، می توان نتیجه گرفت  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap D = \emptyset$ . در ادامه نشان داده می شود  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C_1 = \emptyset$ . برای این کار فرض کنید  $1 \leq i \leq n$  وجود دارد، که  $a_i \in \{a_1, \dots, a_n\} \cap C_1$ . بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد  $a_1 \in C_1$ . از طرف دیگر می توان بررسی کرد هر رأس از  $C_1$  فقط بارتوس موجود در  $A_1$  مجاور می باشد. لذا نتیجه می شود  $a_2, a_n \in A_1$ . اما با این مطلب که یک رأس در گراف  $\overline{G_A(R)}$  با رأس  $a_2$  مجاور است اگر و تنها اگر با  $a_n$  مجاور باشد، در تناقض است. بنابراین  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C_1 = \emptyset$ .

به طور مشابه می توان نشان داد  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C_2 = \{a_1, \dots, a_n\} \cap C_3 = \{a_1, \dots, a_n\} \cap C_4 = \emptyset$  لذا  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C = \emptyset$ . سرانجام نشان داده می شود  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap B_1 = \emptyset$ .

به برهان خلف و بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد  $a_1 \in B_1$ . می توان به سادگی بررسی کرد  $a_1$  فقط با عناصر مجموعه  $B_2 \cup A_3 \cup A_4$  مجاور است. لذا  $\{a_2, a_n\} \subseteq B_2 \cup A_3 \cup A_4$ . اگر  $a_2 \in B_2$ ، آن گاه  $a_3$  با  $a_n$  مجاور است (زیرا اگر  $a$  یک رأس مجاور با  $a_2$  باشد و  $b$  با  $a_1$  مجاور باشد، آن گاه می توان نتیجه گرفت که  $a$  و  $b$  با هم مجاورند)، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می شود  $a_2 \notin B_2$ . به طور مشابه می توان نشان داد  $a_n \notin B_2$ . لذا  $\{a_2, a_n\} \subseteq A_3 \cup A_4$ . حال چون  $\overline{G_A(R)}[A_3 \cup A_4]$  یک زیر گراف دو بخشی کامل است، نتیجه می شود  $\{a_2, a_n\} \subseteq A_3$  یا  $\{a_2, a_n\} \subseteq A_4$ . بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد  $\{a_2, a_n\} \subseteq A_3$ ، که نتیجه می دهد  $a_3$  با هر دو رأس  $a_2$  و  $a_n$  مجاور است (چون یک رأس با رأس  $a_2$  مجاور است اگر و تنها اگر با رأس  $a_n$  مجاور باشد)، که یک تناقض است. این تناقض نشان می دهد  $\{a_1, \dots, a_n\} \cap B_1 = \emptyset$ . به طور مشابه می توان نشان داد برای هر  $2 \leq i \leq 6$   $\{a_1, \dots, a_n\} \cap B_i = \emptyset$ . لذا این مطلب نتیجه می دهد  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ . اما به سادگی می توان بررسی کرد، زیر گراف  $\overline{G_A(R)}[A]$  یک گراف چهار بخشی کامل با بخش های  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) می باشد، که یک تناقض است. این تناقض می رساند  $\overline{G_A(R)}$  شامل هیچ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نمی باشد. لذا با توجه به اثبات ادعاهای ۱ و ۲ و با استفاده از قضیه ۱،۵ نتیجه می شود گراف  $\overline{G_A(R)}$  یک گراف تام است.  $\square$

مثال زیر نشان می دهد حلقه  $R$  وجود دارد، به طوری که گراف های  $\overline{G_A(R)}$  و  $G_A(R)$  تام ضعیفند، ولی  $G_A(R)$  گراف تام نیست. قضیه زیر مورد نیاز است:

**قضیه ۴،۵:** فرض کنید  $R$  یک حلقه آرئینی باشد. در این صورت  $\overline{G_A(R)}$  یک گراف تام ضعیف است و

$$\omega(\overline{G_A(R)}) = \chi(\overline{G_A(R)}) = |Max(R)|$$

**برهان:** چون  $R$  حلقه آرتینی است، می توان نوشت  $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$  ( $n = |Max(R)|$ ). حال با در نظر گرفتن  $A_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in Nil(R_1)\}$  و برای  $2 \leq i \leq n$

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in Nil(R_i), x_j \in U(R_j), j < i\}$$

به وضوح  $\{A_1, \dots, A_n\}$  افزای از  $V(\overline{G_A(R)})$  می باشد. طبق قسمت ۳ لم ۲،۴ نتیجه می شود برای هر

$$\omega(\overline{G_A(R)}) \leq \chi(\overline{G_A(R)}) \leq n \text{ لذا } 1 \leq i \leq n \text{ گراف های } \overline{G_A(R)}[A_i] \text{ پوچ می باشند.}$$

از طرف دیگر با توجه به اینکه رئوس موجود در مجموعه  $\{(0, 1, \dots, 1), (1, 0, 1, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 1, 0)\}$  با هم مجاور بوده، لذا  $\omega(\overline{G_A(R)}) \geq n$ . بنابراین  $\omega(\overline{G_A(R)}) = \chi(\overline{G_A(R)}) = n$  و برهان کامل می شود.  $\square$

**مثال ۵،۱:** فرض کنید برای عدد صحیح و مثبت  $2 \leq i < \infty$ ،  $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$  که در آن  $n$  تعداد حاصلضرب حلقه ها را نشان می دهد. در این صورت:

$$(۱) \quad G_A(R) \text{ یک گراف تام ضعیف است و } \omega(G_A(R)) = \chi(G_A(R)) = 2^{n-1} - 1$$

$$(۲) \quad \overline{G_A(R)} \text{ گراف تام ضعیف است و } \omega(\overline{G_A(R)}) = \chi(\overline{G_A(R)}) = n$$

$$(۳) \quad G_A(R) \text{ گراف تام است اگر و تنها اگر } n \leq 4$$

$$(۴) \quad \overline{G_A(R)} \text{ گراف تام است اگر و تنها اگر } n \leq 4$$

**برهان:** (۱) فرض کنید  $A = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{Z}_2, 1 \leq i \leq n-1\} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  و  $B = V(G_A(R)) \setminus A$

به وضوح  $\{A, B\}$  یک افزای از رئوس  $V(G_A(R))$  می باشد و  $|A| = 2^{n-1} - 1$ . از طرف دیگر برای هر رأس از  $A$  مانند  $x$ ، فقط یک رأس از  $B$  وجود دارد به طوری که  $x + y = 1$  (با توجه به اینکه  $|B| = 2^{n-1} - 1$ ). این نتیجه می دهد  $x$  و  $y$  با هم مجاور نیستند. این مطلب همراه با اینکه زیرگراف  $G_A(R)[A]$  یک گراف کامل است، نتیجه می دهد رنگ کافی در زیرگراف  $G_A(R)[A]$  برای رنگ آمیزی گراف  $G_A(R)$  وجود دارد.

$$\text{بنابراین } \omega(G_A(R)) = \chi(G_A(R)) = 2^{n-1} - 1$$

(۲) از قضیه ۴،۵ به دست می آید.

(۳) از قضیه ۴،۱ به دست می آید.

(۴) چون  $G_A(R) = \overline{\overline{G_A(R)}}$ ، طبق قضیه ۱،۵ به سادگی (۳) - (۴) به دست می آید و لذا  $\overline{G_A(R)}$  گراف تام است اگر و تنها اگر  $n \leq 4$ .  $\square$



## فهرست منابع

- [1] D. F. Anderson and P. S. Livingston, "The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring," *Journal of Algebra*, vol. 217, no. 2, pp. 434–447, 1999.
- [2] D. F. Anderson, "On the diameter and girth of a zero-divisor graph, II," *Houston journal of mathematics*, vol. 34, no. 2, pp. 361–372, 2008.
- [3] A. Badawi, "On the Annihilator Graph of a Commutative Ring," *Communications in Algebra*, vol. 42, no. 1, pp. 108–121, Jan. 2014.
- [4] A. Badawi, "On the Dot Product Graph of a Commutative Ring," *Communications in Algebra*, vol. 43, no. 1, pp. 43–50, Jan. 2015.
- [5] R. Nikandish, M. J. Nikmehr, and M. Bakhtiyari, "Coloring of the annihilator graph of a commutative ring," *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 15, no. 07, p. 1650124, Aug. 2015.
- [6] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*. (Addison-Wesley Publishing Company, 2018).
- [7] H. J. H. Winfried Bruns, *Cohen-Macaulay Rings*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [8] Douglas West, *Introduction to Graph Theory*, 3rd ed. Prentice Hall: Upper Saddle River, 2007.
- [9] D. F. ANDERSON and A. BADAWI, "ON THE TOTAL GRAPH OF A COMMUTATIVE RING WITHOUT THE ZERO ELEMENT," *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 11, no. 04, p. 1250074, May 2012.
- [10] J. Huckaba, *Commutative Rings with Zero Divisors*. Taylor & Francis, 1988.
- [11] R. Diestel, *Graph Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [12] G. A. Dirac, "On rigid circuit graphs," *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 25, no. 1, pp. 71–76, 1961.