دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی رابطه بین فضاهای ضرب داخلی معمولی و فازی

نسیم غلامی[۱]، سعید عباس‌بندی[۲]*، نسرین کرمی کبیر[۱]

(۱) گروه ریاضی، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۰۸

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتباط بین فضاهای ضرب داخلی معمولی و فضاهای ضرب داخلی فازی می‌پردازیم و ضرب داخلی فازی را به‌صورت $\langle\, .\,, .\, \rangle(.)$ معرفی می‌کنیم. همچنین نرم را بر حسب پارامتر می‌نویسیم. سپس چند نمونه از فضاهای دلخواه را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این فضاها فضاهای ضرب داخلی فازی هستند. در ضمن همگرایی، کوشی، کامل و هیلبرت فازی فضای $W^m[0,1]$ را به کمک ضرب داخلی فازی بررسی می‌کنیم. علاوه بر این ارتباط بین فضای هیلبرت معمولی و فضای هیلبرت فازی را بیان می‌کنیم. سپس تعریف جدیدی از ویژگی هسته بازتولید فازی، که در آن ضرب داخلی فازی برحسب پارامتر λ می‌باشد، می‌آوریم. خواص هسته بازتولید فازی در این مقاله به‌طور کامل مورد بحث قرار گرفته است. با استفاده از تعریف جدیدی که از ویژگی هسته بازتولید فازی برحسب پارامتر λ ارائه می‌دهیم می‌توان از این ویژگی برای حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش هسته بازتولید فازی استفاده کرد.

واژه‌های کلیدی: هسته بازتولید فازی، همگرای فازی، فضای هیلبرت فازی، ضرب داخلی فازی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: abbasbandy@ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

نظریه نرم فازی روی فضای برداری ابتدا در سال ۱۹۸۴ توسط کاتساراس ارائه شد. افراد دیگری مانند فلبین، کالوا و چنگ نیز مفهوم نرم فازی را بیان کردند. سامانتا یک نوع نرم فازی ارائه داد که نرم مناسبی برای اثبات قضایای اساسی آنالیز تابعی مانند قضیه اصل کرانداری یکنواخت بود. امکان تعریف مفهومی از فضای هیلبرت فازی برای نخستین بار توسط دیمیف مطرح شد. نرم‌های تولید شده توسط چنین فضاهایی ممکن است کاربردهای بسیار مهمی در فیزیک ذرات کوانتومی داشته باشد. از آن جا که فضاهای ضرب داخلی فازی ارتباط نزدیکی با فضاهای هیلبرت فازی دارند، نخستین بار در سال ۱۹۹۱ الابید، الحامولی و بیسواس برای ارائه تعریف معناداری از ضرب داخلی وابسته به آن تلاش کردند. حسن خانی، نظری و ساحلی مفهوم ضرب داخلی فازی را معرفی کردند و نشان دادند که نرم حاصل در نامساوی کوشی – شوارتز صدق می‌کند. علاوه بر این هر فضای ضرب داخلی فازی می‌تواند در یک فضای ضرب داخلی فازی کامل محاط شود.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲ مطالب مقدماتی را درباره فضاهای $L^2[0,1]$ و $W^1[0,1]$ می‌آوریم. همچنین ضرب داخلی در این فضاها را بیان کرده و تعریف ضرب داخلی فازی را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳ دو فضای ضرب داخلی فازی را به صورت $\left(L^2[0,1], \langle .\,,.\rangle(.)\right)$ و $\left(W^1[0,1], \langle .\,,.\rangle(.)\right)$ معرفی می‌کنیم. در بخش ۴ مفهوم فضای هیلبرت فازی را بیان می‌کنیم. در بخش ۵ فضای هسته بازتولید فازی را تعریف و ویژگی‌های هسته بازتولید فازی را مطرح می‌کنیم. در پایان نتیجه‌گیری بیان شده است.

۲- مفاهیم مقدماتی

تعریف ۲-۱: ([1]) فرض کنیم $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ تعریف و $\{(a_k\,,\,b_k)\}_{k=1}^{n}$ مجموعه‌ای از بازه‌های باز مجزا باشند که $(a_k\,,\,b_k)\subset[a\,,\,b]$. اگر برای هر ε وجود داشته باشد δای که وابسته به n نباشد و همچنین به ازای $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ همواره داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<\varepsilon$ آنگاه تابع $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ مطلقاً پیوسته است.

تعریف ۲-۲: ([1]) فضای $L^2[0,1]$ را همراه با ضرب داخلی در این فضا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L^2[0\,,\,1]=\left\{f(x)\;\middle|\int_0^1 f^2(x)\,dx<\infty\right\}$$

که

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$ و $f,g\in L^2[0,1]$

تعریف ۲-۳: ([1]) فضای $W^m[0,1]$ را همراه با ضرب داخلی در این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^m[0,1]=$$
$$\left\{f(x)\;\middle|\,f^{(m-1)}\text{ is absolutely continiuous},\right.$$
$$\left.f^{(m)}(x)\in L^2[0,1]\right\},$$
$$\langle f\;,\;g\rangle_m=\sum_{i=0}^{m-1}f^{(i)}(.)\,g^{(i)}(.)+\int_0^1 f^{(m)}(x)\,g^{(m)}(x)dx$$

که

$$f,g\in W^m[0,1]$$ و $$\|f\|_m^2=\langle f,f\rangle_m.$$

تعریف ۲-۴: ([1]) فضای $W^1[0,1]$ را همراه با ضرب داخلی در این فضا، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^1[0,1]=$$
$$\left\{f(x)\;\middle|\,f\text{ is absolutely continiuous},\right.$$
$$\left.f'(x)\in L^2[0,1]\right\},$$
$$\langle f,g\rangle_1=f(.)g(.)+\int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx,$$

که

$$f,g\in W^1[0,1].$$

تعریف ۲-۵: ([6]) $\nu : X \to I$ یک فضای برداری فازی روی فضای برداری X نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x , y \in X$ و $a , b \in$ □ داشته باشیم:
$\nu(ax+by) \ge \min\{\nu(x),\nu(y)\}$.

از نامساوی بالا به سادگی نتیجه می‌گیریم که:

۱) $\nu(.) = \sup_{x\in X}\nu(x)$

۲) برای هر $x\in X$ و $0 \ne a \in$ □ داریم $\nu(ax)=\nu(x)$.

اگر $X=(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ باشد $[X]_\alpha$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[X]_\alpha = \prod_{i=1}^n [x_i]_\alpha = \left\{(u_1^\alpha , u_2^\alpha , \dots , u_n^\alpha) \;\middle|\; u_i^\alpha \in [x_i]_\alpha\right\}$$

که

$x_\alpha \in [X]_\alpha$.

تعریف ۲-۶: ([4]) ضرب داخلی فازی روی ν (که ν فضای برداری روی میدان حقیقی یا مختلط K است) یک نگاشت از $\nu\times\nu$ به میدان K با بردارهای فازی x_α و y_β است که با درایه‌های فازی می‌باشند و به‌صورت $\langle x_\alpha , x_\beta\rangle$ یا $\langle x , y\rangle(\lambda)$ نوشته می‌شود. در این جا $\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$ و $\alpha,\beta\in(0,1]$، به طوری که r اسکالر و برای همه بردارهای فازی x_α و y_β و z_γ متعلق به ν و $\lambda=\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$ داریم:

۱) $\langle x+z,y\rangle(\lambda)=\langle x,y\rangle(\lambda)+\langle z,y\rangle(\lambda)$ ،

۲) $\langle rx,y\rangle(\lambda)=r\langle x,y\rangle(\lambda)$ ،

۳) $\langle x,y\rangle(\lambda)=\overline{\langle x,y\rangle}(\lambda)$ ،

۴) $\langle x,y\rangle(\lambda)\ge 0$ و همچنین، $x=0$ اگر و تنها اگر $\langle x,x\rangle(\lambda)=0$ ،

۵) اگر $0<\beta\le\alpha<1$ آنگاه

$\langle x,x\rangle(\alpha)\le\langle x,x\rangle(\beta)$,

همچنین وجود دارد $0<\alpha_n<\alpha$ به طوری که
$\lim_{n\to\infty}\langle x,x\rangle(\alpha_n)=\langle x,x\rangle(\alpha)$.

گزاره ۲-۷: اگر $(\nu,\langle .,.\rangle)$ فضای ضرب داخلی معمولی باشد آنگاه $(\nu,\langle .,.\rangle(.))$ فضای ضرب داخلی فازی است که:

$$\langle x_\alpha, y_\beta\rangle = \langle x,y\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle x,y\rangle$$

برای هر $x_\alpha , y_\beta \in \nu$ و $\alpha,\beta\in(0,1]$، $\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$.

مثال ۲-۸: فضای اقلیدسی □^{n} با ضرب داخلی $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i y_i$ یک فضای ضرب داخلی است که $x=(x_1,\dots,x_n)$، $y=(y_1,\dots,y_n)$. بنابراین (□$^n,\langle .,.\rangle(.)$) با ضرب داخلی فازی تعریف شده توسط $\langle x,y\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle x,y\rangle$ یک فضای ضرب داخلی فازی است.

۳- فضاهای ضرب داخلی فازی

لم ۳-۱: اگر $f,g,h\in W^1[0,1]$ و r اسکالر باشد آنگاه $(W^1[0,1],\langle .,.\rangle(.))$ یک فضای ضرب داخلی فازی است که $\langle f,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle$؛ بنابراین داریم:

۱) $\langle f+h,g\rangle(\lambda)=\langle f,g\rangle(\lambda)+\langle h,g\rangle(\lambda)$ ،

۲) $\langle rf,g\rangle(\lambda)=r\langle f,g\rangle(\lambda)$ ،

۳) $\langle f,g\rangle(\lambda)=\langle g,f\rangle(\lambda)$ ،

۴) $\langle f,f\rangle(\lambda)\ge 0$ و همچنین $f=0$ اگر و تنها اگر $\langle f,f\rangle(\lambda)=0$،

۵) اگر $0<\beta\le\alpha<1$ آنگاه $\langle f,f\rangle(\alpha)\le\langle f,f\rangle(\beta)$
همچنین وجود دارد $0<\alpha_n<\alpha$ به طوری که
$\lim_{n\to\infty}\langle f,f\rangle(\alpha_n)=\langle f,f\rangle(\alpha)$.

اثبات: با استفاده از گزاره ۲-۷ و تعریف ۲-۶ داریم:

۱) $$\langle f+h,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f+h,g\rangle = \frac{1}{\lambda}\Big(\big(f(.)+h(.)\big)g(.) + \int_0^1 (f+h)'\, g'dx)\Big)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(f(.)g(.)+\int_0^1 f'g'dx\right)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\left(h(.)g(.)+\int_0^1 h'g'dx\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle+\frac{1}{\lambda}\langle h,g\rangle$$
$$=\langle f,g\rangle(\lambda)+\langle h,g\rangle(\lambda).$$

۲) $\langle rf,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle rf,g\rangle$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(rf(.)g(.)+\int_0^1 (rf)'g'dx\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(rf(.)g(.)+r\int_0^1 f'g'dx\right)$$
$$=r\frac{1}{\lambda}\left(f(.)g(.)+\int_0^1 f'g'dx\right)$$
$$=r\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle=r\langle f,g\rangle(\lambda).$$

۳) $\langle f,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(f(.)g(.)+\int_0^1 f'g'dx\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(g(.)f(.)+\int_0^1 g'f'dx\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\langle g,f\rangle=\langle g,f\rangle(\lambda).$$

۴) $\langle f,f\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,f\rangle$

چون $\langle f,f\rangle=\|f\|^2$ بنابراین $\langle f,f\rangle\ge 0$ و $\lambda>0$ است. درنتیجه $\frac{1}{\lambda}\langle f,f\rangle\ge 0$؛ بنابراین $\langle f,f\rangle(\lambda)\ge 0$.

اکنون نشان می‌دهیم $f=0$ اگر و تنها اگر $\langle f,f\rangle(\lambda)=0$. اگر $\langle f,f\rangle(\lambda)=0$ باشد، آنگاه $\frac{1}{\lambda}\langle f,f\rangle=0$. در نتیجه $\langle f,f\rangle=0$، پس $\|f\|^2=0$؛ بنابراین $f=0$.

برعکس، اگر $f=0$ باشد آنگاه $\langle f,f\rangle=0$. در نتیجه $\frac{1}{\lambda}\langle f,f\rangle=0$ است؛ بنابراین ما داریم $\langle f,f\rangle(\lambda)=0$.

۵) $0<\beta\le\alpha<1\Rightarrow\frac{1}{\alpha}\langle f,f\rangle\le\frac{1}{\beta}\langle f,f\rangle$
$$\Rightarrow\langle f,f\rangle(\alpha)\le\langle f,f\rangle(\beta).$$

وجود دارد $0<\alpha_n<\alpha$ به طوری که
$$\lim_{n\to\infty}\langle f,f\rangle(\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\langle f,f\rangle$$
$$=\frac{1}{\alpha}\langle f,f\rangle=\langle f,f\rangle(\alpha).$$

بنابراین $\left(W^1[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ یک فضای ضرب داخلی فازی است.

نتیجه ۳-۲: فضای $\left(W^1[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ یک فضای ضرب داخلی فازی است که
$$\langle f,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle.$$

لم ۳-۳: فرض کنیم $\left(W^1[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$فضای ضرب داخلی فازی باشد. اگر $f_\alpha\perp g_\beta$ باشد آنگاه
$$\|f+g\|^2(\lambda)=\|f\|^2(\lambda)+\|g\|^2(\lambda)$$
که $\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$ و $\alpha,\beta\in(0,1]$.

اثبات:
$$\|f+g\|^2(\lambda)=\langle f+g,f+g\rangle_1(\lambda)$$
$$=\langle f,f\rangle_1(\lambda)+\langle f,g\rangle_1(\lambda)$$
$$+\langle g,f\rangle_1(\lambda)+\langle g,g\rangle_1(\lambda)$$

در نتیجه
$$\|f+g\|^2(\lambda)=\|f\|^2(\lambda)+\|g\|^2(\lambda).$$

گزاره ۳-۴: اگر فضای ضرب داخلی، معمولی باشد آنگاه فضای ضرب داخلی، فازی است در حالی که

برای هر $f_\alpha \, , \, g_\beta \in W^m[0,1]$ و همچنین $\alpha,\beta\in(0,1]$ که $\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$ داشته باشیم

$$\langle f_\alpha, g_\beta\rangle = \langle f,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle.$$

اثبات: به‌سادگی با استفاده از تعریف ۲-۶ نتیجه حاصل می‌شود.

گزاره ۳-۵: اگر $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ یک فضای ضرب داخلی فازی باشد آنگاه $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle\right)$ یک فضای ضرب داخلی معمولی است که برای هر $\lambda\in(0,1]$ و همچنین برای هر $x,y\in W^m[0,1]$ داریم $\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle(\lambda)$.

اثبات: مشابه روند اثبات گزاره ۳-۴ است.

لم ۳-۶: اگر $f,g,h\in L^2[0,1]$ و r نیز یک اسکالر باشد آنگاه $\left(L^2[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ یک فضای ضرب داخلی فازی است که

$$\langle f,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle.$$

اثبات: با استفاده از گزاره ۲-۷ و تعریف ۲-۶ داریم:

۱) $$\begin{aligned}\langle f+h,g\rangle(\lambda)&=\frac{1}{\lambda}\langle f+h,g\rangle\\ &=\frac{1}{\lambda}\left(\int_0^1 (f+h)g\,dx\right)\\ &=\frac{1}{\lambda}\int_0^1 fg+\frac{1}{\lambda}\int_0^1 hg\\ &=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle+\frac{1}{\lambda}\langle h,g\rangle\\ &=\langle f,g\rangle(\lambda)+\langle h,g\rangle(\lambda).\end{aligned}$$

۲) $$\begin{aligned}\langle rf,g\rangle(\lambda)&=\frac{1}{\lambda}\langle rf,g\rangle\\ &=\frac{1}{\lambda}\int_0^1 rfg \;=r\frac{1}{\lambda}\int_0^1 fg\\ &=r\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle=r\langle f,g\rangle(\lambda).\end{aligned}$$

۳) $$\begin{aligned}\langle f,g\rangle(\lambda)&=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle\\ &=\frac{1}{\lambda}\int_0^1 fg \;=\frac{1}{\lambda}\int_0^1 gf\\ &=\frac{1}{\lambda}\langle g,f\rangle=\langle g,f\rangle(\lambda).\end{aligned}$$

اثبات بقیه موارد مانند اثبات لم ۳-۱ است.

نتیجه۳-۷: فضای $\left(L^2[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ یک فضای ضرب داخلی فازی است که

$$\langle f,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle.$$

۴- فضای هیلبرت فازی

تعریف ۴-۱: ([5]) فضای ضرب داخلی فازی $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ همگرای فازی است هرگاه تابع f_n در $W^m[0,1]$ موجود باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|(\lambda)=0.$$

تعریف ۴-۲: ([5]) فضای ضرب داخلی فازی $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ کوشی فازی است هرگاه توابع f_n و f_m در $W^m[0,1]$ موجود باشند به طوری که برای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد یک $M>0$ به طوری که برای هر $m\,,\,n>M$، داشته باشیم $\|f_m-f_n\|(\lambda)<\varepsilon$ به طوری که

$\|x\|^2(\alpha)=\langle x,x\rangle(\alpha)$ و

$$\lambda=\inf\{\alpha_i\in(0,1] \mid i\in\mathbb{N}\}.$$

تعریف۴-۳: ([5]) فضای $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ کامل فازی است هرگاه هر دنباله کوشی فازی در $W^m[0,1]$ همگرای فازی باشد.

تعریف۴-۴:([5]) فضای $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ هیلبرت فازی است هرگاه نسبت به نرم

$\|x\|^2(\alpha)=\langle x,x\rangle(\alpha)$ کامل فازی باشد که $x_\alpha \in W^m[0,1]$.

تعریف۴-۵: ([5]) اگر $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle\right)$ یک فضای هیلبرت معمولی باشد آنگاه فضای $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$هیلبرت فازی است در حالی که به ازای هر $x_\alpha, y_\beta \in W^m[0,1]$ و $\alpha,\beta \in W^m[0,1]$ که $\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$ داشته باشیم:

$$\left\langle x_\alpha, y_\beta\right\rangle=\langle x,y\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle x,y\rangle$$

اثبات: از آن جا که $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle\right)$ فضای ضرب داخلی معمولی است طبق گزاره ۲-۷ می‌توان نتیجه گرفت که $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ فضای ضرب داخلی فازی است. از طرفی $\left(W^m[0,1],\|.\|\right)$فضای نرم دار کامل است که $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$؛ بنابراین $\left(W^m[0,1],\|.\|(.)\right)$ فضای ضرب داخلی فازی است. پس برای هر $x_\alpha \in W^m[0,1]$، $\left(W^m[0,1],\|.\|(.)\right)$ فضای نرم دار کامل فازی است که $\|x\|(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\|x\|$. در نتیجه با استفاده از تعریف ۴-۴، فضای $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ هیلبرت فازی است.

قضیه ۴-۶: اگر $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ فضای هیلبرت فازی باشد آنگاه $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle\right)$فضای هیلبرت معمولی است که برای هر $\lambda\in[0,1]$، $\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle(\lambda)$.

اثبات: از آن جا که $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$فضای هیلبرت فازی است، فضای $\left(W^m[0,1],\|.\|(.)\right)$فضای نرم دار کامل فازی است در حالی که

$$\|x\|^2(\alpha)=\langle x,x\rangle(\alpha).$$

پس $\left(W^m[0,1],\|.\|\right)$ فضای نرم دار کامل است که برای هر $\alpha\in[0,1]$داریم $\|x\|=\|x\|(\alpha)$. در نتیجه $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle\right)$فضای هیلبرت معمولی است.

۵- فضای هسته بازتولید فازی

تعریف ۵-۱: برای هر $f_\alpha(x),R_\beta(x)\in W^m[0,1]$ که $\alpha,\beta\in(0,1]$ و $\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$، طبق گزاره ۲-۷ ویژگی هسته بازتولید فازی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\left\langle f_\alpha(x),R_\beta(x)\right\rangle=\left\langle f(x),R_y(x)\right\rangle(\lambda)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left\langle f(x),R_y(x)\right\rangle=\frac{1}{\lambda}f(y)$$

در نتیجه داریم:

$$\left\langle f(x),R_y(x)\right\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}f(y).$$

تعریف ۵-۲ (فضای هسته بازتولید فازی): فرض کنیم $\left(W^m[0,1],\langle .,.\rangle(.)\right)$ فضای هیلبرت فازی با ضرب داخلی فازی $\left\langle f(x),g(x)\right\rangle(.)$باشد که $f(x),g(x)\in W^m[0,1]$ است. اگر تابع فازی مانند $R_y(x)\in W^m[0,1]$ موجود باشد به طوری که هر $f(x)$در شرط $\left\langle f(x),R_y(x)\right\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}f(y)$ صدق کند آنگاه $R_y(x)$ هسته بازتولید فازی $W^m[0,1]$ نامیده می‌شود. علاوه بر این فضای هیلبرت فازی $W^m[0,1]$ فضای هسته بازتولید فازی نامیده می‌شود.

گزاره ۵-۳: اگر $W^m[0,1]$ فضای هیلبرت فازی باشد و $\left\{\overline{\psi_i}\right\}_{i=1}^n$ پایه‌های متعامد نرمال فازی باشند آنگاه $R_s(t)=\sum_{i=1}^n\overline{\psi_i}(t)\psi_i(s)$ یک فضای هسته بازتولید فازی است.

اثبات: چون $\{\overline{\psi_i}\}$ها پایه‌های متعامد نرمال فازی هستند می‌توان نتیجه گرفت که آن‌ها فضای هیلبرت فازی $W^m[0,1]$ را تولید می‌کنند؛ یعنی برای هر $f \in W^m[0,1]$ داریم

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\psi}_i(t).$$

حال برای آن که ثابت کنیم $R_s(t)$ یک فضای هسته بازتولید فازی است باید نشان دهیم رابطه

$$\langle f(t), R_s(t)\rangle(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f(s)$$

برقرار است.

$$\begin{aligned}\langle f(t), R_S(t)\rangle(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\langle f(t), R_S(t)\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\left\langle \sum a_i\overline{\psi_i}(t), \sum\overline{\psi_i}(t)\psi_i(s)\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\left\langle \sum a_i\overline{\psi_i}(t), \sum\overline{\psi_j}(t)\psi_j(s)\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum a_i\left\langle \overline{\psi_i}(t), \sum\overline{\psi_j}(t)\psi_j(s)\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum a_i\left\langle \overline{\sum\overline{\psi_j}(t)\psi_j(s), \overline{\psi_i}(t)}\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum a_i\left\langle \sum\psi_j(t)\overline{\psi_j}(s), \psi_i(t)\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum a_i\sum\overline{\psi_j}(s)\left\langle \psi_j(t), \psi_i(t)\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum a_i\sum\overline{\psi_j}(s)\left\langle \overline{\psi_i(t), \psi_j(t)}\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum a_i\sum\overline{\psi_j}(s)\left\langle \overline{\psi_i}(t), \overline{\psi_j}(t)\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum a_i\overline{\psi_i}(s) = \frac{1}{\lambda}f(s),\end{aligned}$$

بنابراین $R_s(t)$ فضای هسته بازتولید فازی است.

بررسی خواص هسته بازتولید فازی:

خواص هسته بازتولید فازی در حالی که ضرب داخلی فازی بر حسب پارامتر $\lambda > 0$ تعریف می‌شود، دقیقاً مانند حالتی است که ضرب داخلی، معمولی تعریف شود. حال در این جا به بررسی خواص هسته بازتولید فازی می‌پردازیم:

۱) $R_y(x) = \overline{R_x(y)}$،

۲) هسته $R_y(x)$ یکتاست،

۳) اگر $R_y(x)$ هسته باز تولید فازی باشد آنگاه $R_x(x) \ge 0$ و همچنین $R_x(x) = 0$ اگر و تنها اگر $H = \{0\}$،

۴) هسته بازتولید فازی $R_y(x)$ معین مثبت است که برای هر $x_r \in X$ داریم

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} R_{x_r}(x_s)\overline{\xi}_r\xi_s \ge 0$$

که $r, s = 1, 2, \ldots, n$ و ξ_rها اعداد مختلط هستند.

اثبات ۱ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}R_y(x) &= \langle R_y(.), R_x(.)\rangle(\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda}\langle R_y(.), R_x(.)\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\left\langle \overline{R_x(.), R_y(.)}\right\rangle = \frac{1}{\lambda}\overline{R_x(y)}\end{aligned}$$

در نتیجه $\frac{1}{\lambda}R_y(x) = \frac{1}{\lambda}\overline{R_x(y)}$ ؛ بنابراین $R_y(x) = \overline{R_x(y)}$.

اثبات ۲: فرض کنیم $Q_y(x)$ نیز هسته بازتولید فازی باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}Q_y(x) &= \langle Q_y(.), R_x(.)\rangle(\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda}\langle Q_y(.), R_x(.)\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\left\langle \overline{R_x(.), Q_y(.)}\right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda}\overline{R_x(y)} = \frac{1}{\lambda}R_y(x)\end{aligned}$$

در نتیجه $\frac{1}{\lambda}Q_y(x) = \frac{1}{\lambda}R_y(x)$؛ بنابراین $Q_y(x) = R_y(x)$.

اثبات ۳: $\frac{1}{\lambda}R_x(x)\ge 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}R_x(x)&=\langle R_x(.),R_x(.)\rangle(\lambda)\\&=\frac{1}{\lambda}\langle R_x(.),R_x(.)\rangle\\&=\frac{1}{\lambda}\|R_x(.)\|^2.\end{aligned}$$

از آن جا که طرف راست عبارت بالا نامنفی است داریم $\frac{1}{\lambda}R_x(x)\ge 0$؛ بنابراین $R_x(x)\ge 0$. اگر $x\,,y\in H$ باشد آنگاه $R_y(x)\in H$؛ بنابراین $R_x(x)\in H$. پس $\frac{1}{\lambda}R_x(x)\in H=\{0\}$، در نتیجه $R_x(x)=0$.

برعکس، اگر $R_x(x)=0$ آنگاه $\frac{1}{\lambda}R_x(x)=0$. در نتیجه $\frac{1}{\lambda}\|R_x(.)\|^2=0$ ؛ پس $\|R_X(.)\|^2=0$.

همچنین دو حالت زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

حالت اول. اگر برای هر $y\in H$ داشته باشیم $R_y(x)=0$ آنگاه $\langle x,R_y(x)\rangle=\frac{1}{\lambda}y$. در نتیجه $\frac{1}{\lambda}y=0$؛ بنابراین $y=0$.

حالت دوم. اگر برای هر $x\in H$ داشته باشیم $R_x(y)=0$ آنگاه $\langle y,R_x(y)\rangle=\frac{1}{\lambda}x$. در نتیجه $\frac{1}{\lambda}x=0$ ؛ بنابراین $x=0$.

بنابه دوحالت گفته شده دربالا خواهیم داشت $H=\{0\}$.

اثبات ۴: برای $\lambda>0$ داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\lambda}R_{x_r}(x_s)\overline{\xi_r}\xi_s\\
&=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\lambda}R_{x_r}(x_s)\overline{\xi_r}\\
&=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\overline{R_{x_s}(x_r)}\;\overline{\xi_r}\\
&=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{1}{\lambda}\overline{\sum_{r=1}^{n}R_{x_s}(x_r)\xi_r}\\
&=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{1}{\lambda}\left\langle\overline{\sum_{r=1}^{n}R_{x_r}(.)\xi_r,R_{x_s}(.)}\right\rangle\\
&=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{1}{\lambda}\left\langle\overline{\sum_{r=1}^{n}R_{x_r}(.)\xi_r},\overline{R_{x_s}(.)}\right\rangle\\
&=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{1}{\lambda}\left\langle\overline{\overline{R_{x_s}(.)},\overline{\sum_{r=1}^{n}R_{x_r}(.)\xi_r}}\right\rangle\\
&=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{1}{\lambda}\left\langle R_{x_s}(.),\sum_{r=1}^{n}R_{x_r}(.)\xi_r\right\rangle\\
&=\frac{1}{\lambda}\left\langle\sum_{s=1}^{n}R_{x_s}(.)\xi_s,\sum_{r=1}^{n}R_{x_r}(.)\xi_r\right\rangle\\
&=\frac{1}{\lambda}\left\langle\sum_{s=1}^{n}R_{x_s}(.)\xi_s,\sum_{s=1}^{n}R_{x_s}(.)\xi_s\right\rangle\\
&=\frac{1}{\lambda}\left\|\sum_{s=1}^{n}R_{x_s}(.)\xi_s\right\|^2\ge 0\end{aligned}$$

در نتیجه $\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\lambda}R_{x_r}(x_s)\overline{\xi_r}\xi_s\ge 0$ بنابراین $\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}R_{x_r}(x_s)\overline{\xi_r}\xi_s\ge 0$.

نتیجه‌گیری

با استفاده از تعریف جدیدی که از ویژگی هسته بازتولید فازی برحسب پارامتر λ ارائه دادیم می توانیم از این ویژگی برای حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش هسته بازتولید فازی استفاده کنیم. بنابراین برای حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش هسته بازتولید فازی اگر از ضرب داخلی فازی به صورت $\langle.,.\rangle(.)$ و تعریف جدید ویژگی هسته بازتولید فازی استفاده کنیم آنگاه جواب معادله یعنی $u(x)$ به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$u(x)=\frac{1}{\lambda}\sum\sum\beta_{ik}f(x_k)\overline{\psi_i}(x)$$

که این تغییر ناشی از تعریف ضرب داخلی فازی است که به صورت $\langle f,g\rangle(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\langle f,g\rangle$ تعریف می‌شود.

نکته قابل توجه این است که تحلیل کرانداری و همگرایی جواب معادله دیفرانسیل و خواص هسته بازتولید فازی، وقتی که ضرب داخلی، فازی باشد دقیقاً مانند حالتی است که ضرب داخلی، معمولی تعریف شود.

فهرست منابع

[1] M. Cui, Y. Lin, Nonlinear numerical analysis in the reproducing kernel space, Nova Science Pub. Inc., Hauppange, (2009).

[2] A. Dey, M. Pal, Properties of fuzzy inner product spaces, International Journal of Fuzzy Logic Systems, 4(2)(2014).

[3] N. Gholami, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy and N. Karamikabir, Fuzzy reproducing kernel space method for solving fuzzy boundary value problems, Mathematical Sciences, (2019) 13:97-103

[4] A. Hasankhani, A. Nazari and M. Saheli, Some properties of fuzzy Hilbert spaces and norm of operators, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 7(3)(2010),129-157.

[5] J. R. Kider, R. I. Sabre, Fuzzy Hilbert spaces, Eng. & Teeh. Journal. Vol. 28, No. 9, (2010).

[6] C. C. A. Labuschagne, A. L. Pinchuck, The set of Fuzzy points of a Fuzzy vector lattice is not a vector lattice, Fuzzy Sets and Systems, 157(2006), 2783-2785

[7] X. Y. Li, B. Y. Wu, Error estimation for the reproducing kernel method to solve linear boundary value problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 243(2013), 10-15

[8] Z. Solimani, B. Daraby, A note on Fuzzy inner product spaces, The extended abstracts of the *4th seminar on functional analysis and its applications, 2-3rd March 2016, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.*