

استنباط برای توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته براساس داده‌های سانسور هیبرید فزاینده تعمیم یافته و کاربرد آن در داده‌های پاشش پلاسمایی

پریا پرویز¹، هانیه پناهی^{2*}، سعید اسدی³

(1) دکتری آمار، گروه ریاضی و آمار، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

(2) استادیار گروه ریاضی و آمار، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران.

(3) دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: 1399/01/31 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/03/22

چکیده:

در بسیاری از تحقیقات کاربردی به دلایلی همچون محدودیت زمانی و مالی، پژوهشگر به تمامی داده‌ها دسترسی ندارد. بنابراین استنباط آماری براساس اطلاعات واحدهایی از نمونه که در دسترس می‌باشند، حائز اهمیت است. در این مقاله، روش‌های مختلف برآورد پارامترهای مجهول توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته تحت داده‌های سانسور شده‌ی هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم، مطالعه شده است. برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مجهول توزیع و وجود و یکتایی آن‌ها بررسی گردیده است. براساس دیدگاه بی‌زی، برآورد پارامترهای شکل و مقیاس توزیع با استفاده از تابع زیان مربع خطا محاسبه شده است. از آنجا که برآوردگر بی‌زی پارامترها فرم بسته‌ای ندارند، تقریب‌های لیندلی و نمونه‌گیری از نقاط مهم، برای محاسبه برآوردگرها استفاده شده است. مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه برآوردگرهای مختلف کلاسیک و بی‌زی، ارائه گردیده است. در پایان، دو مثال واقعی شامل داده‌های مربوط به برخورد مایل میکرو قطره در فرآیند پاشش پلاسمایی و زمان تعمیر مربوط به یک فرستنده ارتباطی، برای نشان دادن بهتر اهداف مقاله، ارائه گردیده است.

واژه‌ی کلیدی: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، پاشش پلاسمایی، تقریب لیندلی، سانسور هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم، نمونه‌گیری از نقاط مهم، یکتایی.

1- مقدمه

تمامی مطالعات کاربردی مانند تحلیل بقا، آزمایش‌های بالینی و کاربردهای صنعتی و مکانیکی بر اساس داده‌های مشاهده شده انجام می‌پذیرد. بنابراین کارآیی استنباط‌های مختلف به داده‌های مشاهده شده، متکی است. موقعیت‌های بسیاری وجود دارد که آزمایشگر ممکن است به تمامی داده‌ها دسترسی نداشته باشد و برخی از داده‌ها سانسور شده باشند. سانسور نوع اول که پژوهشگر آزمایش را تا زمان از پیش تعیین شده T ادامه می‌دهد و سانسور نوع دوم که آزمایش تا مشاهده m شکست خاتمه می‌یابد، دو تا از رایج‌ترین انواع سانسورها می‌باشند. ترکیبی از سانسورهای نوع اول و دوم، سانسور هیبرید نامیده می‌شود که برای اولین بار توسط اپستین [1] معرفی شد و کاربرد فراوانی در قابلیت اطمینان و مطالعات طول عمر دارد. در سانسور هیبرید نوع اول، آزمایش در زمان تصادفی $T^* = \min\{x_{m:m:n}, T\}$ خاتمه می‌یابد، که در آن $x_{m:m:n}$ زمان شکست m -امین واحد و مقادیر T و m ، ثابت‌های از قبل تعیین شده هستند. عیب سانسور هیبرید نوع اول این است که امکان دارد تا زمان از پیش تعیین شده T ، تعداد کمی شکست رخ دهد و این امر موجب کاهش کارایی برآوردگرها می‌شود. برای رفع این مشکل، چیلدز و همکاران سانسور هیبرید نوع دوم را معرفی کردند که در آن آزمایش در زمان $T^* = \max\{x_{m:m:n}, T\}$ خاتمه می‌یابد [2]. مزیت این طرح سانسور این است که مشاهده حداقل m شکست تا پایان آزمایش تضمین می‌شود. مطالعات بسیاری بر روی سانسور هیبرید در توزیع‌های مختلف و بررسی کاربردهای آن انجام شده است. از آن جمله می‌توان به بالا کریشنان و کندو [3]، گوپتا و سان [4]، سیاره و پناهی [5]، حبیبی و ایزانلو [6] اشاره کرد. مشکل اساسی طرح‌های سانسور نوع اول، دوم و هیبرید، این است که امکان سانسور داده‌ها از نقاطی غیر از انتهای آزمایش وجود ندارد. بنابراین سانسور فزاینده به عنوان یکی از پرکاربردترین

طرح‌های سانسور در دهه اخیر معرفی گردید. چیلدز و همکاران [7]، طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع اول را معرفی کردند که از ترکیب سانسور هیبرید و سانسور فزاینده نوع اول ساخته می‌شود. در این طرح همانند سانسور نوع اول، این امکان وجود دارد که تعداد شکست‌های مشاهده شده کم باشد. برای غلبه بر این مشکل، طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دوم معرفی گردید که به صورت زیر می‌باشد. فرض کنید n واحد در یک آزمایش طول عمر قرار گرفته باشد، و R_1, R_2, \dots, R_m و $R_1 + \dots + R_m + m = n$ قبل از شروع آزمایش تعیین شده باشند. در زمان اولین شکست $(X_{1:m:n})$ ، R_1 واحد به طور تصادفی از $n-1$ واحد باقی مانده کنار گذاشته می‌شود. در زمان دومین شکست $(X_{2:m:n})$ ، R_2 واحد به طور تصادفی از $n-1-R_1$ واحد باقیمانده آزمایش کنار گذاشته می‌شود و آزمایش ادامه پیدا می‌کند. اگر m -امین $(m \leq n)$ شکست قبل از زمان از پیش تعیین شده T مشاهده شود، آزمایش در زمان m -امین شکست $(X_{m:m:n})$ پایان می‌پذیرد و اگر قبل از زمان T شکست مشاهده نشود، فقط $0 < J < m$ شکست قبل از T اتفاق می‌افتد و به تعداد J از پایان آزمایش برداشته می‌شود. برای مطالعه بیشتر در مورد سانسور هیبرید فزاینده نوع اول و دوم می‌توان به چان و همکاران [8]، کندو و جوردر [9]، همتی و کرام [10] و پناهی [11] مراجعه کرد. یکی از مشکلات طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دوم طولانی بودن زمان آزمایش تا مشاهده m -امین شکست است. بنابراین لی و همکاران [12] طرح سانسور هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم را معرفی کردند. در این طرح سانسور، زمان پایان آزمایش که متغیری تصادفی است با $T^* = \max\{T_1, \min(x_{m:m:n}, T_2)\}$ نشان داده می‌شود. تعداد شکست m و زمان‌های T_1 و T_2 با شرط $T_2 > T_1 > 0$ از قبل مشخص می‌شوند. تعداد

استفاده کرد. بنابراین، ابوما و الشنیگیتی [18]، توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته را معرفی کردند که تابع نرخ خطر آن تک مدی است (ابتدا افزایشی و سپس کاهش می‌یابد). این توزیع در بررسی داده‌های طول عمر، سرعت باد در ایستگاه هواشناسی، مسابقات اسب دوانی و صف‌های سوپر مارکت و داده‌های مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. کریشنا و کومر [19]، برآوردهای توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته تحت سانسور فزاینده نوع دوم را به دست آوردند. همچنین برای اطلاع بیشتر از تحقیقات انجام شده در مورد این توزیع می‌توان به دی و دی [20]، ساموئل و همکاران [21] و حسن و همکاران [22] مراجعه کرد. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی، توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته برای $x > 0$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی، توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته برای $x > 0$ به ترتیب عبارت از:

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{-\alpha}; \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (1)$$

و

$$F(x; \alpha, \lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha; \alpha > 0, \lambda > 0, \quad (2)$$

که α پارامتر شکل و λ پارامتر مقیاس است. همچنین تابع نرخ خطر توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شود.

شکست‌هایی که قبل از T_1 و T_2 اتفاق می‌افتد به ترتیب با d_1 و d_2 نمایش داده می‌شوند. بر اساس این نوع سانسور، سه نوع مشاهده خواهیم داشت:

1- اگر $x_{m:m:n} < T_1$ آزمایش تا زمان T_1 با d_1 شکست پایان می‌پذیرد.

$$(x_{1:m:n} < x_{2:m:n} < \dots < x_{m+1:n} < \dots < x_{d_1:n}).$$

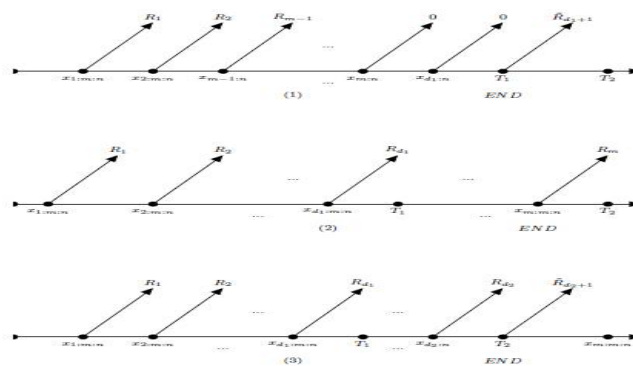
2- اگر $T_1 < x_{m:m:n} < T_2$ آزمایش تا مشاهده m -امین شکست پایان می‌پذیرد.

$$(x_{1:m:n} < \dots < x_{d_1:m:n} < \dots < x_{m:m:n}).$$

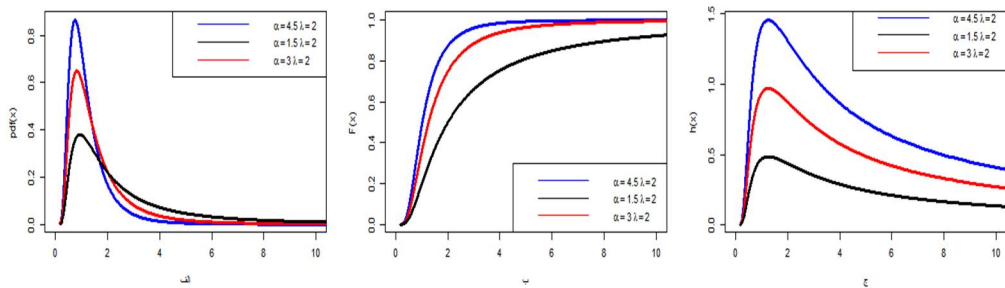
3- اگر $x_{m:m:n} > T_2$ آزمایش در زمان T_2 با d_2 شکست پایان می‌پذیرد.

$$(x_{1:m:n} < \dots < x_{d_1:m:n} < \dots < x_{d_2:m:n}).$$

نمایش گرافیکی این سه نوع مشاهده، به ترتیب در شکل (1) نشان داده شده است. برای مطالعه بیشتر در مورد این سانسور می‌توان به چاو و همکاران [13]، جرنی و کرامر [14]، کولی و کندو [15] و موهی و همکاران [16] مراجعه کرد. گوپتا و کندو [17]، توزیع نمایی تعمیم یافته را معرفی کردند و ویژگی‌های این توزیع را مورد مطالعه قرار دادند. با توجه به اینکه توابع خطر توزیع نمایی تعمیم یافته صعودی یا نزولی هستند، نمی‌توان از آن برای تحلیل داده‌هایی که تابع خطر تک مدی یا وان شکل دارند،



شکل (1): طرح سانسور هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم



شکل (2) نمودار تابع چگالی، تابع توزیع و تابع نرخ خطر با پارامترهای ثابت $\lambda=2$ و مقادیر مختلف پارامتر α

از جامعه است. روش ماکسیمم درستنمایی یکی از قدیمی‌ترین و پراهمیت‌ترین روش‌ها در برآورد پارامترها است. تابع درستنمایی زمان‌های شکست مشاهده شده در سانسور هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم برای سه دسته مشاهده اول و دوم و سوم به ترتیب عبارتند از:

$$L_1(\alpha, \lambda | x) = \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{k=j}^m (1 + R_k) \prod_{j=1}^{d_1} f(x_{j:m:n}) \times [1 - F(x_{j:m:n})]^{R_j} (1 - F(T_1))^{R_{d_1}} \quad (3)$$

$$L_2(\alpha, \lambda | x) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=j}^m (1 + R_k) \prod_{j=1}^m f(x_{j:m:n}) \times [1 - F(x_{j:m:n})]^{R_j} \quad (4)$$

$$L_3(\alpha, \lambda | x) = \sum_{j=1}^{d_2} \sum_{k=j}^m (1 + R_k) \prod_{j=1}^{d_2} f(x_{j:m:n}) \times [1 - F(x_{j:m:n})]^{R_j} \times (1 - F(T_2))^{R_{d_2+1}} \quad (5)$$

با ادغام توابع درستنمایی (3)-(5) و جایگذاری معادلات (1) و (2) در آن، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\alpha, \lambda | x) \propto (\alpha\lambda)^N \prod_{j=1}^N x_{j:m:n}^{-2} e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} D^{R_{j+1}} \times (1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}})^{\alpha R_j + \alpha - 1} \quad (6)$$

$$R_{d_2+1} = n - d_2 - \sum_{j=1}^{d_2} R_j, R_{d_1+1} = n - d_1 - \sum_{j=1}^{m-1} R_j$$

$$h(x; \alpha, \lambda) = \frac{f(x; \alpha, \lambda)}{S(x; \alpha, \lambda)} = \alpha \lambda x^{-\lambda} e^{-\frac{\lambda}{x}} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x}})^{-\alpha}$$

در شکل (2) نمودار تابع چگالی احتمال (الف)، نمودار تابع توزیع (ب) و نمودار نرخ خطر (ج)، توزیع نمای معکوس تعمیم یافته آورده شده است. این مقاله در ادامه به صورت زیر سازمان‌دهی می‌شود. در بخش 2 براساس روش درستنمایی ماکسیمم، پارامترهای مجهول توزیع برآورد شده و یکتایی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی به روش آزمون مشتق دوم و از طریق گرافیکی نشان داده شده است. با توجه به غیر خطی بودن معادلات درستنمایی از پکیج طراحی شده در نرم افزار R برای محاسبه برآوردها استفاده شده است. در بخش 3، برآورد بیزی پارامترهای مجهول با استفاده از روش نمونه‌گیری از نقاط مهم و تقریب لیندلی به‌دست آمده است. مطالعه شبیه‌سازی با استفاده از نرم افزار R برای مقایسه روش‌های مختلف برآوردیابی در بخش 4 آورده شده است و در بخش 5، بر اساس دو سری داده‌های واقعی، نتایج به‌دست آمده، تحلیل گردیده است. بخش 6 به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

2- برآوردگر ماکسیمم درستنمایی

یکی از اساسی‌ترین اهداف در علم آمار، استنباط در مورد جامعه تحت بررسی براساس نمونه‌ای منتخب

$$\mathfrak{J}_j = N \left(\sum_{j=1}^N (R_j + 1) \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}}) + M_1 \right)^{-1}.$$

$$(N, D) = \begin{cases} (d_1, (1 - e^{-\lambda/T_1})^\alpha), & (1) \\ (m, 1), & (2) \\ (d_2, (1 - e^{-\lambda/T_2})^\alpha). & (3) \end{cases}$$

2-1 وجود و یکتایی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی

در این بخش، وجود و یکتایی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته براساس داده‌های سانسور شده هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم، مطالعه شده و نتایج به روش گرافیکی نشان داده شده است ([23]). اگر پارامتر λ معلوم، ثابت و مثبت باشد، $\hat{\alpha}_{mle}$ وجود دارد و یکتا است. همچنین تابع لگاریتم درست‌نمایی، تابعی مقعر نسبت به λ است و مقدار مشتق دوم آن نسبت به پارامتر λ منفی است. به عبارتی،

$$l_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2} = \frac{-N}{\lambda^2} - M_3$$

$$\sum_{j=1}^N (\alpha R_j + \alpha - 1) \frac{x_{j:m:n}^{-2} e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}}}{(e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} - 1)^2} < 0,$$

که در حالت اول $M_3 = \alpha R_{d_1+1} T_1^{-2} e^{\frac{\lambda}{T_1}} (e^{\frac{\lambda}{T_1}} - 1)^{-2}$ در حالت دوم $M_3 = 0$ و در حالت سوم $M_3 = \alpha R_{d_2+1} T_2^{-2} e^{\frac{\lambda}{T_2}} (e^{\frac{\lambda}{T_2}} - 1)^{-2}$ همچنین می‌توان نوشت:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial \log L(\alpha, \lambda | x)}{\partial \lambda} = \infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\partial \log L(\alpha, \lambda | x)}{\partial \lambda} = -\sum_{j=1}^N \frac{1}{x_j}$$

بنابراین با فرض معلوم بودن پارامتر α ، $\hat{\lambda}_{mle}$ وجود دارد و یکتا است. شکل (3)، نمایش نقطه ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای α و λ به روش گرافیکی است.

برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی α و λ ، با مشتق - گیری از لگاریتم تابع درست‌نمایی نسبت به پارامترهای مجهول و مساوی صفر قرار دادن آنها به صورت زیر، محاسبه می‌شوند:

$$l_\alpha = \frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{N}{\alpha} + \sum_{j=1}^N (R_j + 1) \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}}) + M_1 = 0. \quad (7)$$

$$l_\lambda = \frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{N}{\lambda} - \sum_{j=1}^N x_{j:m:n}^{-1} + M_2 + \sum_{j=1}^N (\alpha R_j + \alpha - 1) \frac{x_{j:m:n}^{-1}}{e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} - 1} = 0. \quad (8)$$

در حالت اول: $M_1 = R_{d_1+1} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{T_1}})$ و حالت دوم: $M_2 = \alpha R_{d_1+1} T_1^{-1} (e^{\frac{\lambda}{T_1}} - 1)^{-1}$ و حالت سوم: $M_1 = M_2 = 0$

$$M_1 = R_{d_2+1} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{T_2}}),$$

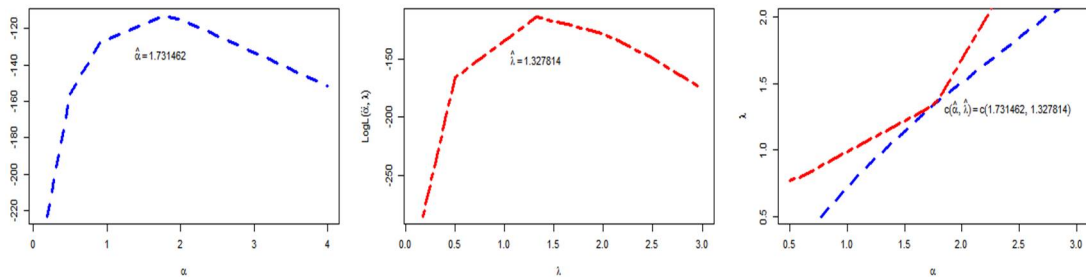
$$M_2 = \alpha R_{d_2+1} T_2^{-1} (e^{\frac{\lambda}{T_2}} - 1)^{-1}.$$

بامساوی صفر قرار دادن معادله (7)، $\hat{\alpha}_{mle}$ برابر است با:

$$\hat{\alpha}_{mle} = - \frac{N}{\sum_{j=1}^N (R_j + 1) \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}}) + M_1}$$

با جایگذاری مقدار $\hat{\alpha}_{mle}$ در معادله (8)، معادله غیرخطی (9) به دست می‌آید که فرم بسته‌ای ندارد و باید از روش‌های عددی برای حل آن استفاده کرد.

$$F(\lambda) = \frac{N}{\lambda} - \sum_{j=1}^N x_{j:m:n}^{-1} - \sum_{j=1}^N \frac{x_{j:m:n}^{-1}}{e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} - 1} + M_2 - \mathfrak{J}_j \sum_{j=1}^N \frac{(R_j + 1) x_{j:m:n}^{-1}}{e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} - 1} = 0. \quad (9)$$



شکل(3): نمایش نقطه ماکسیمم در ستنمایی پارامتر α و λ به روش گرافیکی

با ضرب رابطه (6) در (10) تابع چگالی پسین توأم عبارت از:

$$\pi(\alpha, \lambda | x) = C \alpha^{N+a_1-1} \lambda^{N+b_2-1} e^{-b_1 \alpha} e^{-b_2 \lambda} \prod_{j=1}^N x_{j:m:n}^{-2} e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}})^{\alpha R_j + \alpha - 1} D^{R_{j+1}}, \quad (11)$$

است که

$$C = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{N+a_1-1} \lambda^{N+b_2-1} e^{-b_1 \alpha} e^{-b_2 \lambda} \prod_{j=1}^N x_{j:m:n}^{-2} e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}})^{\alpha R_j + \alpha - 1} D^{R_{j+1}} d\alpha d\lambda \right)^{-1}$$

تعریف D برای سه دسته مشاهده در بخش 2 مقاله بیان شده است. برآورد بیز هر تابعی از α و λ به صورت $g(\alpha, \lambda)$ ، تحت تابع زیان توان دوم خطا عبارت است از:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{bayes} &= E[g(\alpha, \lambda)] = \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty g(\alpha, \lambda) \pi(\alpha, \lambda | x) d\alpha d\lambda}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\alpha, \lambda | x) d\alpha d\lambda} \\ &= C \int_0^\infty \int_0^\infty g(\alpha, \lambda) \alpha^{N+a_1-1} \lambda^{N+b_2-1} e^{-b_1 \alpha} e^{-b_2 \lambda} \\ &\quad \prod_{j=1}^N x_{j:m:n}^{-2} e^{\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}})^{\alpha R_j + \alpha - 1} D^{R_{j+1}} d\alpha d\lambda \quad (12) \end{aligned}$$

رابطه (12) فرم بسته‌ای ندارد، بنابراین از روش

برای نشان دادن وجود و یکتایی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی به روش گرافیکی، ابتدا یک نمونه به حجم $(n = 90)$ از توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته تولید می‌شود. براساس یک حالت خاص از سانسور به صورت $(m = 80, T_1 = 1.5, T_2 = 5, R_{80} = 10, R_j = 0, j \neq 80)$

نقاط ماکسیمم درستنمایی پارامترها به ترتیب روی منحنی $\log L(\alpha, \hat{\lambda} | x)$ و $\log L(\hat{\alpha}, \lambda | x)$ در شکل (3) نشان داده شده است. براساس شکل (3) مشاهده می‌شود که یک نقطه تقاطع $(1.731462, 1.327814)$ وجود دارد که نشان دهنده این است که برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی وجود دارند و یکتا هستند. همچنین واضح است که نقطه تقاطع، ماکسیمم کننده تابع لگاریتم درستنمایی پارامترهای α و λ هستند.

3- برآوردگر بیزی

در این بخش، برآوردهای بیز پارامترهای α و λ در توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته محاسبه گردیده است. فرض کنید α و λ مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های پیشین $Gamma(a_1, b_1)$ و $Gamma(a_2, b_2)$ باشند، که در آن b_1, a_2, a_1 و b_2 مقادیر مثبت و معلومی هستند. بنابراین چگالی پیشین توأم بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\pi(\alpha, \lambda) \propto \alpha^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha} \lambda^{a_2-1} e^{-b_2 \lambda}. \quad (10)$$

3-2- تقریب لیندلی

لیندلی [25]، در سال 1980 یک روش تقریبی برای حل انتگرال (12) ارائه داد. براساس تقریب لیندلی، برآورد بیز پارامترهای α و λ تحت تابع زیان مربع خطا عبارت از:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{bayes} \approx & g + .5[(g_{\alpha\alpha} + 2g_{\alpha\rho_\alpha})\sigma_{\alpha\alpha} + (g_{\omega\omega} + 2g_{\alpha\rho_\lambda})\sigma_{\omega\omega} \\ & + (g_{\lambda\alpha} + 2g_{\lambda\rho_\alpha})\sigma_{\lambda\alpha} + (g_{\lambda\lambda} + 2g_{\lambda\rho_\lambda})\sigma_{\lambda\lambda}] \\ & + (g_{\alpha\omega} + g_{\lambda\omega})(l_{\alpha\alpha\omega}\sigma_{\alpha\alpha} + l_{\omega\alpha\omega}\sigma_{\omega\omega} + l_{\lambda\alpha\omega}\sigma_{\lambda\alpha} + l_{\lambda\omega\omega}\sigma_{\lambda\lambda}) \\ & + (u_{\alpha\lambda} + g_{\lambda\lambda})(l_{\alpha\alpha\lambda}\sigma_{\alpha\alpha} + l_{\omega\alpha\lambda}\sigma_{\omega\omega} + l_{\lambda\alpha\lambda}\sigma_{\lambda\alpha} + l_{\lambda\omega\lambda}\sigma_{\lambda\lambda}), \end{aligned}$$

است که در آن

$$\rho(\alpha, \lambda) = \log[\pi(\alpha, \lambda)] = (a_1 - 1) \log \hat{\alpha}_{mle}$$

$$-b_1 \hat{\alpha}_{mle} + (a_2 - 1) \log \hat{\lambda}_{mle} - \hat{\lambda}_{mle} b_2,$$

$$\rho_\alpha = \frac{\partial \rho(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{a_1 - 1}{\hat{\alpha}_{mle}} - b_1,$$

$$\rho_\lambda = \frac{\partial \rho(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{a_2 - 1}{\hat{\lambda}_{mle}} - b_2,$$

$$g_{\lambda\alpha} = \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial \alpha}, \quad g_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}, \quad g_{\omega\omega} = \frac{\partial^2 g}{\partial \omega^2},$$

$$g_\alpha = \frac{\partial g}{\partial \alpha}, \quad g_\lambda = \frac{\partial g}{\partial \lambda}, \quad g_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2},$$

و $\sigma_{\lambda\lambda}, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\omega\omega}, \sigma_{\lambda\alpha}$ عناصر معکوس ماتریس اطلاع فیشر هستند. برای محاسبه برآورد $g = \alpha$ با استفاده از تقریب لیندلی داریم:

$$g_{\alpha\alpha} = g_\lambda = g_{\lambda\lambda} = g_{\omega\omega} = g_{\lambda\alpha} = 0, \quad g_\alpha = 1,$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{lim} = & \hat{\alpha}_{mle} + .5[2\rho_\alpha \sigma_{\alpha\alpha} + 2\rho_\lambda \sigma_{\omega\omega} + \sigma_{\alpha\alpha}^2 l_{\alpha\alpha\alpha} \\ & + 2\sigma_{\omega\omega} \sigma_{\lambda\alpha} l_{\omega\omega\lambda} + \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\lambda\lambda} l_{\lambda\lambda\alpha} + \sigma_{\omega\omega} \sigma_{\lambda\lambda} l_{\lambda\lambda\lambda}]. \end{aligned}$$

همچنین با فرض $g = \lambda$ ، برآورد پارامتر λ عبارت است از:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} = g_\lambda = g_{\lambda\lambda} = g_{\omega\omega} = g_{\lambda\alpha} = 0, \quad g_\lambda = 1, \\ \tilde{\lambda}_{lim} = & \hat{\lambda}_{mle} + .5[2\rho_\lambda \sigma_{\lambda\lambda} + 2\rho_\alpha \sigma_{\lambda\alpha} + \sigma_{\lambda\lambda}^2 l_{\lambda\lambda\lambda} \\ & + \sigma_{\lambda\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} l_{\alpha\alpha\lambda} + 3\sigma_{\omega\omega} \sigma_{\lambda\lambda} l_{\omega\omega\lambda}], \end{aligned}$$

نمونه‌گیری از نقاط مهم و تقریب لیندلی استفاده شده است.

3-1- روش نمونه‌گیری از نقاط مهم

برای بکارگیری روش نمونه‌گیری از نقاط مهم، توزیع پسین توأم (11) به صورت زیر بازنویسی گردیده است:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \lambda | x) = & \alpha^{N+a_1-1} e^{-\alpha(b_1 - \sum_{j=1}^N \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{jmn}}}))} \lambda^{N+a_2-1} \\ & \times e^{-\lambda(b_2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{x_{jmn}})} \prod_{j=1}^N x_{jmn}^{-2} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{jmn}}})^{\alpha R_j - 1} D \end{aligned}$$

$$= \text{Gamma}_{\alpha\lambda}(N + a_1, b_1 - \sum_{j=1}^N \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{jmn}}}) - D)$$

$$\times \text{Gamma}_\lambda(N + a_2, b_2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{x_{jmn}}) \times H(\alpha, \lambda),$$

$$H(\alpha, \lambda) = \frac{\prod_{j=1}^N x_{j:m:n}^{-2} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}})^{\alpha R_j - 1}}{(b_1 - \sum_{j=1}^N \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_{j:m:n}}}) - D)^{(N+a_1)}}$$

برای محاسبه برآوردگر بیز α و λ ، از الگوریتم محاسباتی زیر استفاده شده است ([24]):

گام اول: λ_1 از توزیع $\text{Gamma}_\lambda(N + a_2, b_2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{x_{jmn}})$ تولید می‌شود.

گام دوم: با داشتن λ_1 از مرحله اول، α_1 از توزیع $\text{Gamma}_{\alpha\lambda}(N + a_1, b_1 - \sum_{j=1}^N \log(1 - e^{-\frac{\lambda_1}{x_{jmn}}}) - D)$ تولید می‌شود.

گام سوم: مراحل یک و دو به تعداد k بار تکرار می‌شود و نمونه‌های زیر به دست می‌آیند.

$$(\alpha_1, \lambda_1), (\alpha_2, \lambda_2), \dots, (\alpha_k, \lambda_k)$$

گام چهارم: در مرحله آخر، برآورد بیز هر تابعی از α و λ مانند $g(\alpha, \lambda)$ تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\tilde{g}_{bayes}(\alpha, \lambda) = \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g(\alpha_i, \lambda_i) H(\alpha_i, \lambda_i)}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K H(\alpha_i, \lambda_i)}$$

خطی ندارند، از بسته نرم افزاری "BB" که برای حل مسائل غیر خطی و بهینه‌سازی ساخته شده است، استفاده شده است ([26]). ویژگی مهم پکیج "BB" این است که فضای ذخیره‌سازی کمی برای اجرا برنامه‌هایی با بعد بالا نیاز دارد و به همین دلیل زمان زیادی صرف نمی‌کند. در این بسته نرم‌افزاری توابع زیادی مانند "dfsane" و "spg" و "sane" تعریف شده است که هر کدام از این توابع برای حالت خاصی کاربرد دارند. در این بخش به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو با 1000 تکرار برآوردهای بیزی به روش تقریب لیندلی ($\tilde{\alpha}_{lin}, \tilde{\lambda}_{lin}$) و روش نمونه‌گیری از نقاط مهم ($\tilde{\alpha}_{mc}, \tilde{\lambda}_{mc}$) و برآورد کلاسیک به روش ماکسیمم درست‌نمایی ($\hat{\alpha}_{mle}, \hat{\lambda}_{mle}$) مقایسه شده است. با استفاده از مقادیر از قبل تعیین شده $n, m, T_1, T_2, R_1, \dots, R_m$ نمونه سانسور هیبرید فزاینده تعمیم یافته از توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته تولید شده و سه طرح سانسور زیر در نظر گرفته شده است:

طرح سانسور 1:

$$(R_m = n - m, R_j = 0, j \neq m)$$

طرح سانسور 2:

$$(R_m = n - m, R_j = 0, j \neq \frac{m}{2})$$

طرح سانسور 3:

$$(R_1 = R_m = \frac{n - m}{2}, R_j = 0, j \neq 1, m)$$

نتایج شبیه‌سازی در جداول 1 و 2 آورده شده است. مشاهده شده است که اگر حجم نمونه افزایش یابد، مقدار میانگین توان دوم خطا کاهش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده گردیده است که با افزایش حجم مشاهدات از $m = 66$ به $m = 72$ به ازای حجم نمونه ثابت ($n = 80$)، مقدار میانگین توان دوم خطای برآوردهای بیز و درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای α و λ کاهش پیدا کرده است. به طور

که در آن $\hat{\alpha}_{mle}$ و $\hat{\lambda}_{mle}$ برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی هستند و همچنین

$$l_{\alpha\lambda} = l_{\lambda\alpha} = \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \lambda} = \sum_{j=1}^N (R_j + 1) \left(\frac{x_{j:m:n}^{-1}}{e^{\hat{\lambda}_{mle}/x_{j:m:n}} - 1} \right) + M_4,$$

که در حالت اول، $M_4 = R_{d_{i+1}} T_1^{-1} (e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_1} - 1)^{-1}$ ، در حالت دوم $M_4 = 0$ و در حالت سوم

$$M_4 = R_{d_{2+1}} T_2^{-1} (e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_2} - 1)^{-1},$$

$$l_{\lambda\alpha\alpha} = l_{\alpha\lambda\alpha} = l_{\alpha\alpha\lambda} = 0, l_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{2N}{\hat{\alpha}_{mle}^3},$$

$$l_{\lambda\lambda\lambda} = \frac{2N}{\hat{\lambda}_{mle}^3} + \sum_{j=1}^N (\hat{\alpha}_{mle} R_j + \hat{\alpha}_{mle} - 1) \times \left(\frac{e^{\hat{\lambda}_{mle}/x_{j:m:n}} + e^{2(\hat{\lambda}_{mle}/x_{j:m:n})}}{x_{j:m:n}^3 (e^{\hat{\lambda}_{mle}/x_{j:m:n}} - 1)^3} \right) + M_5,$$

که در حالت اول $M_5 = \hat{\alpha}_{mle} R_{d_{i+1}} \left(\frac{e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_1} + e^{2(\hat{\lambda}_{mle}/T_1)}}{T_1^3 (e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_1} - 1)^3} \right)$

در حالت دوم $M_5 = 0$ و در حالت سوم

$$M_5 = \hat{\alpha}_{mle} R_{d_{2+1}} \left(\frac{e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_2} + e^{2(\hat{\lambda}_{mle}/T_2)}}{T_2^3 (e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_2} - 1)^3} \right)$$

$$l_{\lambda\lambda\alpha} = \frac{\partial^3 l}{\partial \lambda^2 \partial \alpha} = - \sum_{j=1}^N (R_j + 1) x_{j:m:n}^{-2} e^{\hat{\lambda}_{mle}/x_{j:m:n}} (e^{\hat{\lambda}_{mle}/x_{j:m:n}} - 1)^{-2} - M_6,$$

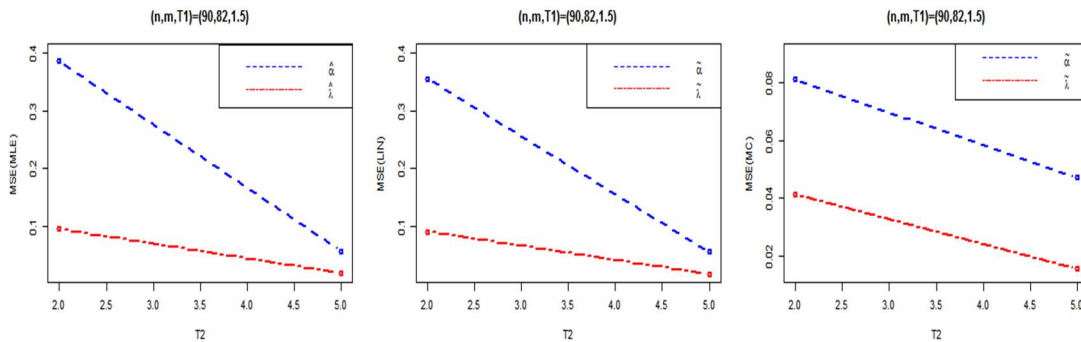
که M_6 ، به ترتیب در حالت دوم برابر صفر و در حالت‌های اول و سوم عبارت از: $M_6 = R_{d_{i+1}} T_i^{-2} e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_i} (e^{\hat{\lambda}_{mle}/T_i} - 1)^{-2}$; $i = 1, 2$ است.

4- مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج شبیه‌سازی برای مقایسه برآوردهای مختلف بر اساس معیار میانگین توان دوم خطا ارائه شده است. برای انجام شبیه‌سازی از نرم افزار R تحت ورژن 3-5-1 استفاده شده است. با توجه به اینکه برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی فرم

عمل می‌کنند و برآوردهای لیندلی نزدیک به برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی هستند. همچنین مشاهده شده است که برآوردهای بیز به روش نمونه‌گیری از نقاط مهم، بهترین برآوردها هستند. علاوه بر این اگر T_1, m, n ثابت باشد، و مقدار T_2 افزایش یابد، مقدار میانگین توان دوم خطا کاهش می‌یابد. این نتیجه با ثابت نگه داشتن $T_1 = 1.5$ و به ازای نمونه $(n = 90, m = 82)$ و افزایش زمان از $T_2 = 5$ تا $T_2 = 2$ در شکل (4) نشان داده شده است.

مشابه با افزایش حجم مشاهدات از $m = 74$ به $m = 82$ به ازای حجم نمونه ثابت $(n = 90)$ ، مقدار میانگین توان دوم خطا کاهش می‌یابد. بنابراین هرچه تعداد داده‌های سانسور شده کمتر باشد، نتایج آزمایش دقیق‌تر است. در محاسبه برآوردهای بیز از توزیع پیشین ناآگاهی بخش (فاقد اطلاع) استفاده شده است. مشاهده گردیده است که برآوردهای بیزی پارامترهای α و λ در مقایسه با برآوردهای کلاسیک برای تمام انتخاب‌های n, m, T_1, T_2 بهتر



شکل (4): نمودار میانگین مربع خطا برآوردهای پارامتر α و λ در مقابل افزایش زمان آزمایش T_2 (از راست به چپ به ترتیب برآوردهای نمونه‌گیری از نقاط مهم، لیندلی و درست‌نمایی ماکسیمم).

جدول 1: مقایسه برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و بیز پارامتر α در زمان ثابت $(T_1 = 1.5, T_2 = 5)$.

| | R | $\hat{\alpha}_{mle}$ | $\tilde{\alpha}_{lin}$ | $\tilde{\alpha}_{mc}$ |
|----------------------|---|----------------------|------------------------|-----------------------|
| $n = 20$ $m = 16$ | $(R_{16} = 4, R_j = 0, j \neq 16)$ | 2.5101(.4754) | 2.0145(.3506) | 2.0045(.3206) |
| | $(R_8 = 4, R_j = 0, j \neq 8)$ | 2.4543(.4431) | 2.0477(.3204) | 2.0177(.3104) |
| | $(R_1 = R_{16} = 2, R_j = 0, j \neq 1, 16)$ | 2.4231(.4547) | 2.0689(.3199) | 1.9989(.3099) |
| $n = 30$ $m = 24$ | $(R_{24} = 6, R_j = 0, j \neq 24)$ | 2.3101(.3954) | 1.9810(.2851) | 1.9760(.2180) |
| | $(R_{12} = 6, R_j = 0, j \neq 12)$ | 2.1543(.3831) | 1.9754(.2431) | 1.9654(.2030) |
| | $(R_1 = R_{24} = 3, R_j = 0, j \neq 1, 24)$ | 2.1423(.3769) | 1.1992(.2269) | 1.1908(.2017) |
| $n = 80$ $m = 66$ | $(R_{66} = 14, R_j = 0, j \neq 66)$ | 2.0012(.2754) | 2.0006(.2506) | 1.9569(.2087) |
| | $(R_{33} = 14, R_j = 0, j \neq 33)$ | 1.9543(.2064) | 1.9477(.2004) | 1.9394(.1930) |
| | $(R_1 = R_{66} = 7, R_j = 0, j \neq 1, 66)$ | 1.9717(.2225) | 1.9689(.2199) | 1.9469(.1917) |
| $n = 80$ $m = 72$ | $(R_{72} = 8, R_j = 0, j \neq 72)$ | 1.8077(.0947) | 1.8046(.0927) | 1.7729(.0926) |
| | $(R_{36} = 8, R_j = 0, j \neq 36)$ | 1.7978(.0887) | 1.7922(.0854) | 1.7522(.0820) |
| | $(R_1 = R_{72} = 4, R_j = 0, j \neq 1, 72)$ | 1.7974(.0885) | 1.7934(.0862) | 1.7434(.0749) |

| | | | | |
|----------------------|---|---------------|---------------|---------------|
| $n = 90$ $m = 74$ | $(R_{72} = 16, R_j = 0, j \neq 74)$ | 1.7406(.0578) | 1.7395(.0573) | 1.7192(.0542) |
| | $(R_{36} = 16, R_j = 0, j \neq 36)$ | 1.7243(.0503) | 1.7191(.0493) | 1.7211(.0491) |
| | $(R_1 = R_{72} = 8, R_j = 0, j \neq 1, 74)$ | 1.7242(.0502) | 1.7217(.0491) | 1.7013(.0481) |
| $n = 90$ $m = 82$ | $(R_{82} = 8, R_j = 0, j \neq 82)$ | 1.7400(.0576) | 1.7367(.0560) | 1.7028(.0471) |
| | $(R_{41} = 8, R_j = 0, j \neq 41)$ | 1.7292(.0425) | 1.7242(.0402) | 1.7123(.0312) |
| | $(R_1 = R_{82} = 4, R_j = 0, j \neq 1, 82)$ | 1.7314(.0435) | 1.7276(.0415) | 1.7243(.0331) |

جدول 2: مقایسه برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی و بیز پارامتر λ در زمان ثابت $(T_1 = 1.5, T_2 = 5)$.

| | R | $\hat{\lambda}_{mle}$ | $\tilde{\lambda}_{lm}$ | $\tilde{\lambda}_{mc}$ |
|----------------------|---|-----------------------|------------------------|------------------------|
| $n = 20$ $m = 16$ | $(R_{16} = 4, R_j = 0, j \neq 16)$ | 1.4521(.1449) | 1.4320(.1440) | 1.4141(.1329) |
| | $(R_8 = 4, R_j = 0, j \neq 8)$ | 1.4972(.1611) | 1.4278(.1398) | 1.4027(.1249) |
| | $(R_1 = R_{16} = 2, R_j = 0, j \neq 1, 16)$ | 1.4887(.1635) | 1.3898(.1478) | 1.3937(.1138) |
| $n = 30$ $m = 24$ | $(R_{24} = 6, R_j = 0, j \neq 24)$ | 1.4321(.1411) | 1.4221(.1349) | 1.4241(.1312) |
| | $(R_{12} = 6, R_j = 0, j \neq 12)$ | 1.4272(.1556) | 1.4172(.1231) | 1.4137(.1210) |
| | $(R_1 = R_{24} = 3, R_j = 0, j \neq 1, 24)$ | 1.4187(.1578) | 1.4087(.1235) | 1.3827(.1029) |
| $n = 80$ $m = 66$ | $(R_{66} = 14, R_j = 0, j \neq 66)$ | 1.4121(.0449) | 1.4030(.0422) | 1.4002(.0413) |
| | $(R_{33} = 14, R_j = 0, j \neq 33)$ | 1.4472(.0611) | 1.4370(.0561) | 1.3841(.0538) |
| | $(R_1 = R_{66} = 7, R_j = 0, j \neq 1, 66)$ | 1.4087(.0635) | 1.4027(.0615) | 1.4011(.0423) |
| $n = 80$ $m = 72$ | $(R_{72} = 8, R_j = 0, j \neq 72)$ | 1.3227(.0250) | 1.3146(.0231) | 1.3074(.0215) |
| | $(R_{36} = 8, R_j = 0, j \neq 36)$ | 1.3194(.0342) | 1.3109(.0323) | 1.3041(.0228) |
| | $(R_1 = R_{72} = 4, R_j = 0, j \neq 1, 72)$ | 1.3206(.0315) | 1.3128(.0305) | 1.3247(.0145) |
| $n = 90$ $m = 74$ | $(R_{74} = 16, R_j = 0, j \neq 74)$ | 1.3270(.0249) | 1.3193(.0222) | 1.3126(.0206) |
| | $(R_{37} = 16, R_j = 0, j \neq 37)$ | 1.3216(.0258) | 1.3133(.0247) | 1.3122(.0216) |
| | $(R_1 = R_{74} = 8, R_j = 0, j \neq 1, 74)$ | 1.3244(.0254) | 1.3174(.0237) | 1.3247(.0131) |
| $n = 90$ $m = 82$ | $(R_{82} = 8, R_j = 0, j \neq 82)$ | 1.3414(.0200) | 1.3343(.0180) | 1.3260(.0158) |
| | $(R_{41} = 8, R_j = 0, j \neq 41)$ | 1.3370(.0187) | 1.3296(.0168) | 1.3072(.0145) |
| | $(R_1 = R_{82} = 4, R_j = 0, j \neq 1, 82)$ | 1.3401(.0196) | 1.3333(.0177) | 1.3100(.0121) |

5- تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی

تحلیل مسائل آماری پیشرفته، نیازمند ترکیبی از روش‌های نظری و کاربردی است. در فصول قبلی به تکنیک‌های نظری پرداخته شده است و این بخش بر روی تحلیل داده‌های واقعی تمرکز دارد.

مثال 1: داده‌ها نشان دهنده زمان تعمیر برحسب ساعت برای یک فرستنده ارتباطی است [27]. ابتدا براساس روش‌های گرافیکی، مناسب بودن توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته بر این داده‌ها، بررسی شده است. در شکل (5) قسمت (الف)، نمودار تابع

توزیع تجربی و برازش داده شده، در قسمت (ب) نمودار احتمال - احتمال $(P-P)$ و در قسمت (ج) هیستوگرام و نمودار تابع چگالی این داده‌ها نشان داده شده است.

بررسی بیشتر، استفاده شده است. این معیارها و آزمون‌ها عبارت از آزمون کولموگورف-اسمیرنوف، معیار آکاییک، معیار بیزی و معیار منفی لگاریتم درست‌نمایی هستند. براساس برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، مقدار آماره آزمون کولموگورف-اسمیرنوف و P -مقدار مربوطه به ترتیب عبارت از

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{mle} &= 1.598798, \hat{\alpha}_{lin} = 1.593066, \\ \hat{\alpha}_{mc} &= 1.458132. \\ \hat{\lambda}_{mle} &= 1.44416, \hat{\lambda}_{lin} = 1.430623 \\ \hat{\lambda}_{mc} &= 1.313592. \\ \hat{\alpha}_{mle} &= 1.308330, \hat{\alpha}_{lin} = 1.301274, \\ \hat{\alpha}_{mc} &= 1.225792, \\ \hat{\lambda}_{mle} &= 1.288637, \hat{\lambda}_{lin} = 1.274572, \\ \hat{\lambda}_{mc} &= 1.197798. \\ \hat{\alpha}_{mle} &= 1.066495, \hat{\alpha}_{lin} = 1.148210, \\ \hat{\alpha}_{mc} &= 1.016959, \\ \hat{\lambda}_{mle} &= 1.059148, \hat{\lambda}_{lin} = 1.133417, \\ \hat{\lambda}_{mc} &= 1.082007.\end{aligned}$$

مثال 2: در این قسمت از داده‌های مربوط به پاشش پلاسمایی پودر *YSZ* استفاده شده است. در این فرآیند میکرو قطرات با زاویه 30 درجه به صورت میل، بر روی سطح جامد پاشیده شده که قطر متوسط پودر، 37 میکرون و توزیع اندازه آن بین 25 الی 125 میکرون می‌باشد. سطح جامد که پاشش بر روی آن انجام شده است، قطعه فولادی نرم به ابعاد $15 \times 10 \times 3$ میلیمتر مکعب و اندازه میانگین زبری 0/5 میکرون می‌باشد. همچنین این میکرو قطرات توسط دستگاه پاشش پلاسمایی *SG-100* در فشار اتمسفریک به سطح جامد با زاویه 30 درجه پاشیده شده است [29, 30]. ابتدا برای بررسی اعتبار مدل، مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف به همراه p - مقدار مربوطه براساس مقادیر ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مجهول، محاسبه شده که به ترتیب برابر 0/1113 و 0/7939 به دست آمده است. برای بررسی بیشتر، نمودار احتمال - احتمال برای توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته و توابع تجربی و توزیع برازش داده شده در شکل (6) آورده شده است. براساس p - مقدار محاسبه شده و شکل (6)، مشاهده می‌شود که توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته برازش خوبی بر داده‌ها دارد.

0/0933 و 0/818 است. همچنین برای محاسبه این معیارها در نرم افزار *R*، از بسته نرم افزاری "*fitdistrplus*" که دقت زیادی دارد، استفاده شده است [28]. در جدول (3) مشاهده می‌شود در مقایسه با توزیع‌های مناسب دیگر، کمترین مقدار معیار اکائیک (*AIC*)، بیز (*BIC*) و منفی لگاریتم درست‌نمایی (*NLC*) مربوط به توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته است و توزیع فریجت، بردوازدهم، نمایی تعمیم یافته، و رایلی نمایی به ترتیب در رتبه‌های دوم تا پنجم قرار دارند. برای مقایسه بهتر، توابع چگالی مذکور در زیر آورده شده‌اند.

• توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته:

$$f_1(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda x^{-2} e^{-\frac{\lambda}{x}} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x}})^{\alpha-1}$$

• توزیع نمایی تعمیم یافته:

$$f_2(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.$$

• توزیع بردوازدهم:

$$f_3(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda x^{\lambda-1} (1 + x^\lambda)^{-\alpha-1}$$

• توزیع فریجت:

$$f_4(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda x^{-\lambda-1} e^{-\alpha x^\lambda}.$$

• توزیع رایلی نمایی:

$$f_5(x; \alpha, \lambda) = 2\alpha \lambda x (1 - e^{-\lambda x^2})^{\alpha-1} e^{-\lambda x^2}.$$

با در نظر گرفتن $n = 46$ و سانسور 6 داده و با توجه به مقادیر مختلف زمان با سه دسته مشاهده روبرو خواهیم بود:

حالت اول:

$$T_1 = 10, T_2 = 20, d_1 = 43, d_2 = 44$$

حالت دوم:

$$T_1 = 4, T_2 = 10, d_1 = 32, d_2 = 43$$

حالت سوم:

$$T_1 = .2, T_2 = 5, d_1 = 0, d_2 = 36$$

مقادیر برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، لیندلی و نمونه‌گیری از نقاط مهم به ترتیب برای حالت‌های اول، دوم و سوم عبارتند از:

در برآوردهای بی‌زی به دلیل اینکه اطلاعاتی درباره توزیع پیشین پارامترها در دسترس نیست، از توزیع پیشین فاقد اطلاع $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ استفاده شده است. نتایج بیان‌کننده آن است که برآوردهای بی‌زی و ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مجهول توزیع نمایی معکوس تعمیم یافت، نزدیک به هم می‌باشند.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله استنباط کلاسیک و بی‌زی پارامترهای شکل و مقیاس توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته بر اساس نمونه‌های سانسور شده هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم بررسی شده است. این طرح سانسور مشکل طولانی شدن زمان آزمایش در طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دوم را بهبود بخشیده است. مشاهده گردیده است که برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی فرم بسته‌ای ندارند، بنابراین باید از روش‌های عددی استفاده کرد. با استفاده از روش نمونه‌گیری از نقاط مهم و تقریب لیندلی برآوردهای بی‌زی پارامترها به دست آمده است.

حال برای مقایسه روش‌های مختلف برآورد در داده‌های سانسور هیبرید فزاینده تعمیم یافته نوع دوم، سه حالت زیر در نظر گرفته شده است:

• حالت اول:

$$n = 34, m = 30, T_1 = 5.7, T_2 = 6.5$$

• حالت دوم:

$$n = 34, m = 30, T_1 = 4.5, T_2 = 6.5$$

• حالت سوم:

$$n = 34, m = 30, T_1 = 4.5, T_2 = 5.0.$$

• حالت اول:

$$\hat{\alpha}_{mle} = 10079.24, \tilde{\alpha}_{lin} = 10098.43,$$

$$\tilde{\alpha}_{mc} = 10125.94,$$

$$\hat{\lambda}_{mle} = 52.48713, \tilde{\lambda}_{lin} = 52.3218,$$

$$\tilde{\lambda}_{mc} = 51.7546.$$

• حالت دوم:

$$\hat{\alpha}_{mle} = 10088.97, \tilde{\alpha}_{lin} = 10122.17,$$

$$\tilde{\alpha}_{mc} = 10134.42,$$

$$\hat{\lambda}_{mle} = 52.0124, \tilde{\lambda}_{lin} = 51.4532,$$

$$\tilde{\lambda}_{mc} = 51.2457.$$

• حالت سوم:

$$\hat{\alpha}_{mle} = 101354.56, \tilde{\alpha}_{lin} = 101435.66,$$

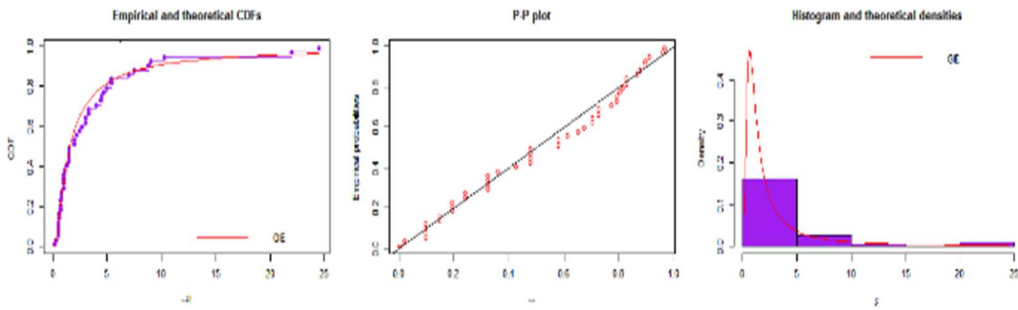
$$\tilde{\alpha}_{mc} = 10178.74,$$

$$\hat{\lambda}_{mle} = 49.7653, \tilde{\lambda}_{lin} = 49.4532,$$

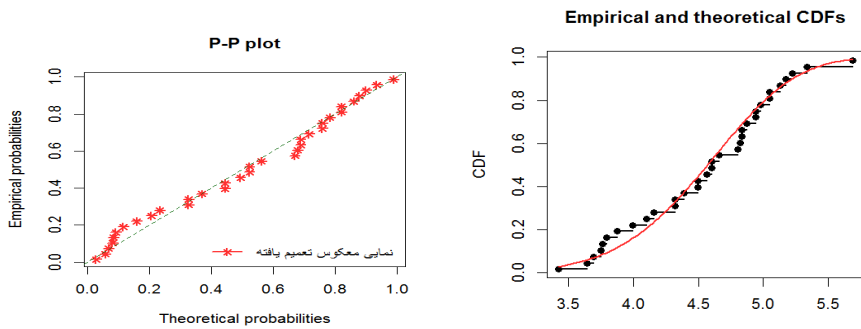
$$\tilde{\lambda}_{mc} = 48.3321.$$

جدول 3: برآورد پارامترهای α و λ و مقایسه معیارهای مختلف انتخاب مدل در داده‌های مثال 1.

| $f_1(x; \alpha, \lambda)$ | $f_2(x; \alpha, \lambda)$ | $f_3(x; \alpha, \lambda)$ | $f_4(x; \alpha, \lambda)$ | $f_5(x; \alpha, \lambda)$ | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------|
| $\hat{\alpha} = 1.09435$ | $\hat{\alpha} = 0.95758$ | $\hat{\alpha} = 0.50931$ | $\hat{\alpha} = 1.13265$ | $\hat{\alpha} = 0.29081$ | برآورد پارامتر |
| $\hat{\lambda} = 1.20501$ | $\hat{\lambda} = 0.26861$ | $\hat{\lambda} = 2.07185$ | $\hat{\lambda} = 1.01118$ | $\hat{\lambda} = 0.00982$ | برآورد پارامتر |
| 100.7594 | 105.0927 | 101.2845 | 100.8569 | 111.7725 | NLC |
| 205.5188 | 214.1853 | 206.5689 | 205.7137 | 227.5451 | AIC |
| 209.1761 | 217.8426 | 210.2262 | 209.3710 | 231.2024 | BIC |



شکل(5): نمودارهای برازش توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته برای داده‌های مثال 1



شکل(6): نمودار احتمال - احتمال برای توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته و توابع تجربی و توزیع برازش داده شده برای داده‌های مثال 2

- [8] Chan, P., Ng, H., Su, F. Exact likelihood inference for the two-parameter exponential distribution under type II progressively hybrid censoring, 78, 747–770(2015)
- [9] Kundu, D., Joarder, A. Analysis of type-II progressively hybrid censored data. Computational statistics & Data Analysis, 50, 2509-2528. (2006a)
- [10] Hemmati, F., Khorram, E. Statistical analysis of the log-normal distribution under type II progressive hybrid censoring schemes. Communications in Statistics Simulation and Computation, 42, 52-75.(2013)
- [11] Panahi, H. Estimation Methods for the Generalized Inverted Exponential Distribution Under Type II Progressively Hybrid Censoring with Application to Spreading of Micro-Drops Data. Communications in Mathematics and Statistics, 5, 159-174. (2017)
- [12] Lee, k., Sun, H., Cho, Y. Exact likelihood inference of the exponential parameter under generalized type II progressive hybrid censoring. Journal of the Korean statistical society. 45: 123-136.(2016)
- [13] Cho, Y., Sun, H. and Lee, K. Exact likelihood inference for an exponential parameter under generalized progressive hybrid censoring scheme. Statistical Methodology, 23, 18-34. (2015)
- [14] Gorny, J., Cramer, E. Exact likelihood inference for exponential distributions under generalized progressive hybrid censoring schemes. Statistical Methodology, 29, 70-94. (2016)
- [15] Koley, A., Kundu, D. On generalized progressive hybrid censoring in presence
- [1] Epstein, B. Truncated life-tests in the exponential case. The Annals of Mathematical Statistics 25.555-564(1954)
- [2] Childs, A. Chandrasekhar, B. Balakrishnan, N. and Kundu, D. Exact likelihood inference based on type -I and type-II hybrid censored samples from the exponential distribution, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 55, 319–330 (2003)
- [3] Balakrishnan, N. Kundu, D. Hybrid censoring: models, inferential results and applications. Computational Statistics & Data Analysis, vol. 57, no. 1, 166-209(2013)
- [4] Gupta, P.K. Singh, B. Parameter estimation of Lindley distribution with hybrid censored data. International Journal of Systems Assurance Engineering and Management, 4(4), 378-385(2012)
- [5] Sayyareh, A., Panahi, H. Model Selection Based on Tracking Interval Under Unified Hybrid Censored Samples. Journal of the Iranian Statistical Society, 17 (1), 1-31. Statistical Research of Iran, vol. 8, no. 2, 149-162 (2018)
- [6] Habibi, R.A., Izanlo, M. An EM algorithm for estimating the parameter of the generalized exponential distribution under unified hybrid censored data. Journal of Statistical Research of Iran, vol. 8, no. 2, 149-162. (2011)
- [7] Childs, A., Chandrasekar B., Balakrishnan, N. Exact likelihood inference for an exponential parameter under progressive hybrid censoring schemes. In: Vonta F, Nikulin M, Limmios N, Huber-Carol C (eds) Statistical models and methods for biomedical and technical systems. Birkh"auser, 323-334. (2008)

- Scheme. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 46, 3645-3666. (2015)
- [24] Kundu, D. and Pradhan, B. Bayesian inference and life testing plans for generalized exponential distribution. *Science in China Series A: Mathematics*, 52:1373-1388. (2009)
- [25] Lindley, D.V. Approximate Bayesian methods (with discussions), *Trabajos de Estadística* 31, 232-245. (1980)
- [26] Varadhan, R., and Gilbert, P.D. (2009), BB: An R Package for Solving a Large System of Nonlinear Equations and for Optimizing a High-Dimensional Nonlinear Objective Function, *J. Statistical Software*, 32:4, <http://www.jstatsoft.org/v32/i04/>.
- [27] Von Alven, W. H. (ed.). *Reliability Engineering by ARINC*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice. (1964)
- [28] Delignette-Muller ML and Dutang C. *fitdistrplus: An R Package for Fitting Distributions*. *Journal of Statistical Software*, 64(4), 1-34. (2015)
- [29] Kang, C.W., Ng, H.W. Splat morphology and spreading behavior due to oblique impact of droplets onto substrates in plasma spray coating process, *Surface and Coatings Technology*, 200, 5462-5477. 2006),
- [30] اسدی، س.، پسندیده فرد، م.، مقیمان، م.، (1386). مطالعه برخورد مایل قطره با سطح جامد در فرآیند لایه نشانی پاششی با استفاده از شبیه‌سازی عددی و مدل تحلیلی، *نشریه علمی و پژوهشی علوم و مهندسی سطح ایران*، دوره 3، شماره 4.
- of competing risks. *Metrika*, 80, 401-426. (2017)
- [16] Mohie El-Din, M.M., Nagy, M., Abu-Moussa, M.H. Estimation and prediction for Gompertz distribution under the generalized progressive hybrid censored data. *Annals of Data Science*, 1-33. (2019)
- [17] Gupta R.D., Kundu, D. Generalized exponential distributions, *Aust. N. Z. J. Statist.* 41(2), 173-188. (1999)
- [18] Abouammoh, A.M. and Alshingiti, M.A. Reliability estimation of generalized inverted exponential distribution. *Journal of statistical computation and simulation*, 79, 1301-1315. (2009)
- [19] Krishna, H. and Kumar, K. Reliability estimation in generalized inverted exponential distribution with progressively type II censored sample. *journal of statistical computation and simulation*, 83, 1007-1019. (2013)
- [20] Dey, S. and Dey, T. On progressively censored generalized inverted exponential distribution. *Journal of Applied statistics*, 41, 2557-2576. (2014)
- [21] Samuel, B.R., Balamurali, S. and Aslam, M., Designing of repetitive group sampling plan under truncated life test based on generalized inverted exponential distribution. *journal of statistics and Management systems*, 21, 955-970. (2018)
- [22] Hassan, A.S., Marwa, A., and Nagy, H.F. Estimation of $P(Y > X)$ using record values from the generalized inverted exponential distribution. *Pakistan journal of statistics and operation Research*, 14, 645-660. (2018)
- [23] Ateya, S.f. Estimation under Inverse Weibull Distribution based on Balakrishnan's Unified Hybrid Censored

