دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی وپنجم، فروردین و اردیبهشت 1401
شماره شاپا: 2588X-588

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

عملگر ترکیبی وزن‌دار λC_{φ} ارگودیک میانگین در فضای بلوچ

فخرالدین فلاحت[1]، زهرا کمالی[2*]

[(1و2)] گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/09/09   تاریخ پذیرش مقاله: 1400/06/18

چکیده:

بررسی عملگرهای ترکیبی ارگودیک میانگین در فضاهای متنوع باناخ همواره مورد علاقه ریاضی‌دانان بوده است و بسیاری از مولفان در سال‌های اخیر، این مسئله را بطور دقیق در فضاهای مختلف، از جمله فضای توابع تحلیلی در دیسک واحد، فضای هاردی و فضای بلوچ، مورد بررسی و واکاوی قرار داده‌اند. در این مقاله برای یک خودنگاشت φ از دیسک واحد و $\lambda \in \mathbb{C}$، عملگر ترکیبی وزن‌دار، $(\lambda C_{\varphi})f = \lambda f o \varphi$ برای هر f در فضای بلوچ و فضای بلوچ کوچک در نظر می‌گیریم و به بررسی شرایطی می‌پردازیم که طی آن عملگر ترکیبی وزن‌دار λC_{φ}، روی فضاهای باناخ بلوچ و بلوچ کوچک، ارگودیک میانگین و به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین می‌باشد. در واقع نشان می‌دهیم اگر $|\lambda| > 1$، λC_{φ} نمی‌تواند کران‌دار توانی ارگودیک میانگین و به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین باشد و در مقابل اگر $|\lambda| < 1$، λC_{φ} همواره کران‌دار توانی ارگودیک میانگین و به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین می‌باشد و در حالت $|\lambda| = 1$، خواهیم دید که این موضوع ارتباط مستقیمی با نقطه دنجوی-ولف φ دارد.

واژه‌ی کلیدی: عملگر ترکیبی وزن‌دار، عملگر ارگودیک میانگین، نقطه دنجوی-ولف، فضای بلوچ.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:zkamali@shirazu.ac.ir

1. مقدمه

مطالعه در خصوص عملگرهای ارگودیک میانگین به سال 1931 بر می‌گردد، جایی که ون نیومن در [17] ثابت کرد برای عملگر یکانی پیوسته T روی فضای هیلبرت H عملگر تصویر P روی H وجود دارد، به طوری که $T_{[n]}$ (سزارو میانگین T) با توپولوژی قوی عملگرها[2] به P همگرا می‌باشد. 8 سال بعد یعنی در سال 1939، لورچ [14] نشان داد در فضاهای انعکاسی[3]، عملگرهای کران‌دار توانی، ارگودیک میانگین می‌باشند. سپس لین [13] اثبات کرد اگر T عملگری باشد که $\left\|\frac{T^n}{n}\right\| \to 0$، آن‌گاه T به طور یکنواخت ارگودیک میانگین است، اگر و تنها اگر، $Im(I-T)$ بسته باشد. لوتز [15] نتیجه اخیر را به فضاهای گروتندیک با خاصیت دانفورد-پتیس (به اختصار GDP) گسترش و نشان داد برای هر عملگر کران‌دار T روی یک فضای GDP که $\left\|\frac{T^n}{n}\right\| \to 0$، ارگودیک میانگین بودن یک عملگر معادل به طور یکنواخت ارگودیک میانگین بودن آن است.

لازم به ذکر است یک فضای به‌طور موضعی محدب و هاسدورف X یک فضای GDP می‌باشد، اگر هر دنباله در X' (دوگان X) که در توپولوژی ضعیف-ستاره، $\sigma(X',X)$، همگرا می‌باشد در توپولوژی ضعیف $\sigma(X',X'')$ نیز همگرا باشد. l^∞ (فضای دنباله‌های کران‌دار) و $H^\infty(D)$ (فضای توابع تحلیلی کران‌دار) مثال‌هایی از این نوع فضا می‌باشند. فضای مورد مطالعه در این مقاله، یعنی فضای بلوچ نیز در این دسته قرار می‌گیرد، در حالی که فضای بلوچ کوچک یک فضای GDP نمی‌باشد [11].

فونف، لین و وی داسچیک [10] عکس قضیه لورچ را برای فضاهای باناخ که دارای پایه شودر می‌باشند، اثبات کرده و نشان دادند اگر X یک فضای باناخ با پایه شودر باشد، به طوری که هر عملگر کران‌دار توانی، ارگودیک میانگین باشد، آنگاه X یک فضای انعکاسی است.

برای دریافت اطلاعات بیشتر در خصوص عملگرهای ارگودیک میانگین، می‌توان به [12]، [18] و [22] و مراجع معرفی شده در آنها مراجعه نمود.

در سال‌های اخیر، مطالعه خصوصیات دینامیک و ارگودیک عملگر ترکیبی و شاخه‌های آن مورد توجه ویژه ریاضی دانان قرار گرفته است. این رشته از مطالعات اولین بار توسط بونت و دومانسکی [6] با مطالعه عملگر ترکیبی روی فضای $H(\mathbb{D})$ آغاز گردید. پس از آن ولف [20] عملگر ترکیبی را روی فضاهای برگمن وزن‌دار از مرتبه نامتناهی $H_v^\infty(\mathbb{D})$ مورد مطالعه قرارداد. سپس بونت و ریکر [7] شرایط کران‌دار توانی و ارگودیک میانگین بودن عملگر ضربی[4] را روی فضاهای برگمن وزن‌دار $H_v^\infty(\mathbb{D})$ و $H_v^0(\mathbb{D})$ تعیین نمودند. اخیرا، بلتران و سایر مولفین [4] و [5] ویژگی ارگودیک عملگر ترکیبی را روی فضاهای $A(\mathbb{D})$ (جبر قرصی)[5] و $H^\infty(\mathbb{D})$ و عملگر ترکیبی وزن‌دار را روی فضای $H(\mathbb{D})$ مورد مطالعه قرارداده‌اند. ارنت و همکاران [2] نتایج بدست آمده در [4] را به همگرایی دنباله توان‌های عملگر ترکیبی در فضاهای مختلفی همچون $A(\mathbb{D})$، $H^\infty(\mathbb{D})$، جبر واینر[6] $W(\mathbb{D})$، فضاهای هاردی H^p و فضاهای هاردی وزن‌دار $H^p(\beta)$ گسترش دادند. در [11] ویژگی‌های ارگودیک عملگر ترکیبی در فضاهای باناخ مختلفی از جمله فضای بلوچ مورد مطالعه قرار گرفته است. جدول‌های مقابل این نتایج را نشان می‌دهند.

2- Strong Operator Topology

3- Reflexive Spaces

4- Multiplication Operator

5- Disk Algebra

6- Wiener Algebra

جدول شماره (1) مربوط به عملگر ترکیبی C_φ در فضای بلوچ

	φ دارای نقطه دنجوی ولف داخلی	φ دارای نقطه دنجوی ولف مرزی	φ خودریختی بیضوی معادل با دوران گویا	φ خودریختی بیضوی معادل با دوران غیرگویا
کران‌دار توانی	✓	✗	✓	✓
ارگودیک میانگین	به شرط شبه فشرده بودن C_φ	✗	✓	✗
به طور یکنواخت ارگودیک میانگین	به شرط شبه فشرده بودن C_φ	✗	✓	✗

جدول شماره (2) مربوط به عملگر ترکیبی C_φ در فضای بلوچ کوچک

	φ داری نقطه دنجوی ولف داخلی	φ داری نقطه دنجوی ولف مرزی	φ خودریختی بیضوی معادل با دوران گویا	φ خودریختی بیضوی معادل با دوران غیرگویا
کران‌دار توانی	✓	✗	✓	✓
ارگودیک میانگین	✓	✗	✓	✓
به طور یکنواخت ارگودیک میانگین	به شرط شبه فشرده بودن C_φ	✗	✓	✗

2- مفاهیم و تعاریف مقدماتی

تعریف 2-1. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ نرم‌دار، $L(X)$ فضای تمام عملگرهای خطی کران‌دار روی X و $T \in L(X)$ باشد. دنباله سزارو میانگین[7] عملگر T با نماد $T_{[n]}$ نمایش داده می‌شود و به صورت:

$$T_{[n]} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m,$$

تعریف می‌گردد.

تعریف 2-2. عملگر $T \in L(X)$ را کران‌دار توانی[8] نامیم، هرگاه:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty.$$

تعریف 2-3. عملگر $T \in L(X)$ را ارگودیک میانگین[9] نامیم، هرگاه عملگر $P \in L(X)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \| T_{[n]}x - Px \| = 0.$$

با یک محاسبه ساده می‌توان دید که برای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n}T^n = T_{[n]} - \frac{n-1}{n}T_{[n-1]}.$$

بنابراین اگر T ارگودیک میانگین باشد، برای هر $x \in X$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}T^n x = 0.$$

تعریف 2-4. عملگر $T \in L(X)$ را به طور یکنواخت ارگودیک میانگین[10] گوئیم، هرگاه $P \in L(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$\lim_{n\to\infty} \| T_{[n]} - P \| = 0.$$

فرض کنید $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ دیسک واحد در صفحه اعداد مختلط $\mathbb{C}$، $S(\mathbb{D})$ مجموعه تمام خودنگاشت‌های تحلیلی روی $\mathbb{D}$ و $H(\mathbb{D})$ فضای تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشد. برای تابع $\varphi \in S(\mathbb{D})$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ عملگر ترکیبی وزن دار λC_φ

7- Cesàro Mean

8- Power Bounded

9- Mean Ergodic

10- Uniformly Mean Ergodic

به صورت $\lambda C_\varphi f = \lambda(fo\varphi)$ برای هر $f \in H(\mathbb{D})$ تعریف می‌گردد.

تعریف 2-5. تابع تحلیلی $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ تابع بلوچ نامیده می‌شود هرگاه:

$$\beta_f := \sup_{z\in\mathbb{D}}(|1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

مجموعه تمام توابع بلوچ روی $\mathbb{D}$ را فضای بلوچ نامیده و آن را با $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد β_f یک نیم نرم[11] روی $\mathcal{B}$ است. باتوجه به اینکه مقدار β_f برای تمام توابع ثابت صفر است لذا β_f نمی‌تواند یک نرم باشد. برای تعریف یک نرم روی فضای بلوچ نگاشت $f \mapsto \|f\|$ را برای هر $f \in \mathcal{B}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\| = |f(0)| + \beta_f.$$

در این صورت $\|f\|$ یک نرم کامل روی $\mathcal{B}$ می‌باشد که آن را به یک فضای باناخ تبدیل می‌نماید.
فضای بلوچ کوچک، زیر فضای $\mathcal{B}_0$ از $\mathcal{B}$، شامل تمامی توابع f در $\mathcal{B}$ می‌باشد که در شرط

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|f'(z)| = 0,$$

صدق می‌کنند. در واقع فضای بلوچ کوچک زیر فضای بسته‌ای از فضای بلوچ است که مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها در آن چگال می‌باشد.
در نظریه هندسی توابع، فضای بلوچ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و یکی از دلایل این اهمیت، موبیوس-پایا بودن آن است، یعنی برای هر $f \in \mathcal{B}$ و هر خودریختی φ (تابع تحلیلی، یک به یک و پوشا از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$) داریم: $\beta_{fo\varphi} = \beta_f$.
جهت آشنایی هرچه بیشتر با فضاهای بلوچ می‌توان به مراجع [1] و [8] رجوع نمود.
مدیگان و مدیسون [16] شرایط کران‌داری و فشردگی عملگر ترکیبی روی فضاهای بلوچ و بلوچ کوچک را تبیین نمودند. برای خودنگاشت φ، C_φ همواره در $\mathcal{B}$ کران‌دار است و C_φ در $\mathcal{B}_0$ کران‌دار است، اگر و فقط اگر $\varphi \in \mathcal{B}_0$. ژیانگ [21] با به دست آوردن تقریبی برای نرم عملگر ترکیبی در فضای بلوچ نشان داد که:

$$\max\left\{1,\frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi(\circ)|}{1-|\varphi(\circ)|}\right\} \le \|C_\varphi\| \le \max\left\{1,\frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi(\circ)|}{1-|\varphi(\circ)|}+\tau_\varphi^\infty\right\} \qquad (1)$$

جایی که

$$\tau_\varphi^\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)|.$$

توجه کنید برای هر $\varphi \in S(\mathbb{D})$ منظور از φ_n، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\varphi_n = \underbrace{\varphi o\varphi o \dots o\varphi}_{n-\text{بار}}$، می‌باشد.
خودنگاشت‌های $\mathbb{D}$ به دو دسته بیضوی و غیر بیضوی تقسیم می‌شوند. برای غیر بیضوی‌هایی مانند φ، نقطه یکتای z_0 در $\overline{\mathbb{D}}$ وجود دارد به طوری که، $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ به طور یکنواخت به z_0 همگرا می‌باشد. z_0 نقطه دنجوی-ولف φ نامیده می‌شود. [9].
قضیه زیر رابطه بین طیف یک عملگر و به طور یکنواخت ارگودیک میانگین بودن آن را نشان می‌دهد. یادآوری می‌شود طیف یک عملگر، $\sigma(T)$، مجموعه $\alpha \in \mathbb{C}$ می‌باشد که $T-\alpha I$ وارون‌پذیر نباشد. همچنین طیف تقریبی، $\sigma_{ap}(T)$، مجموعه $\alpha \in \mathbb{C}$ می‌باشد که دنباله $\{x_n\}$ وجود داشته باشد، به طوری که $\|x_n\| = 1$ و

$$\lim_{n\to\infty}\|T(x_n)-\alpha x_n\| = 0$$

می‌دانیم، $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.
اثبات قضیه زیر را می‌توان در [13] دید.

قضیه 2-6. (دانفورد-لین) عملگر T روی فضای

11- Semi-Norm

باناخ X بطور یکنواخت ارگودیک میانگین است، اگر و تنها اگر، $(\|T^n\|/n)_n$ به صفر همگرا باشد و $1 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ یا $\lambda = 1$ قطبی از مرتبه یک برای تابع حلال[12] $\mathcal{R}_T: \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to L(X)$ با ضابطه $\mathcal{R}_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ باشد. بنابراین، اگر یک نقطه انباشتگی $\sigma(T)$ باشد، آنگاه T بطور یکنواخت ارگودیک میانگین نمی‌باشد.

3- نتایج اصلی

در این قسمت عملگر λC_φ در نظر گرفته و خواص ارگودیک آن را در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم و بخش را با شرط لازم جهت کران‌دار توانی، ارگودیک میانگین و به طور یکنواخت ارگودیک میانگین بودن عملگر λC_φ آغاز می‌نمائیم.

گزاره 3-1. اگر λC_φ در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$ کران‌دار توانی، ارگودیک میانگین و یا به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین باشد، آن‌گاه $|\lambda| \le 1$.

اثبات: فرض کنید λC_φ کران‌دار توانی باشد. بنابراین $M > 0$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و برای هر $f \in \mathcal{B}$،

$$\|\lambda^n C_{\varphi_n} f\| \le M\|f\|.$$

قراردهید $f \equiv 1$، داریم: $|\lambda^n| \le M$، و بنابراین باید $|\lambda| \le 1$ باشد.

اکنون فرض کنید λC_φ ارگودیک میانگین و یا به طور یکنواخت ارگودیک میانگین باشد.

برای هر $f \in \mathcal{B}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda^n C_{\varphi_n} f\|}{n} = 0.$$

با قرار دادن $f \equiv 1$ خواهیم داشت؛

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda|^n}{n} = 0,$$

و بنابراین حتما باید $|\lambda| \le 1$ باشد.

نکته 3-2. فرض کنید φ یک خودریختی بیضوی باشد که برای $0 \ne a \in \mathbb{D}$، $\varphi(a) = a$. نگاشت $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ یک خودریختی بیضوی است که $\varphi_a(0) = a$. اگر $\phi = \varphi_a o \varphi o \varphi_a$، آن‌گاه ϕ یک خودریختی بیضوی است و $\phi(0) = 0$، بنابراین برای یک $\alpha \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| = 1$، $\phi(z) = \alpha z$. چون، $C_\phi = C_{\varphi_a} C_\varphi C_{\varphi_a}$، خواص ارگودیک C_φ و C_ϕ مشترک می‌باشد. بنابراین از این به بعد در حالتی که φ یک خودریختی بیضوی است، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد، $\varphi(z) = \alpha z$، جایی که، $|\alpha| = 1$. همچنین لازم به ذکر است که در این حالت φ و ϕ را معادل گوییم. همچنین اگر برای یک $k \in \mathbb{N}$، $\alpha^k = 1$، ϕ را یک دوران گویا و در غیر این صورت، دوران غیرگویا نامند.

قضیه 3-3. اگر $|\lambda| < 1$، آن‌گاه در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$، $\lim_{n\to\infty} \|\lambda^n C_{\varphi_n}\| = 0$ و بنابراین λC_φ کران‌دار توانی است.

اثبات: بنابر لم شوارتز-پیک [9] داریم: $\tau_\varphi^\infty \le 1$.

طبق (1) در $\mathcal{B}$ داریم:

$$|\lambda|^n \max\left\{1, \frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi_n(0)|}{1-|\varphi_n(0)|}\right\} \le \|\lambda^n C_{\varphi_n}\| \le |\lambda|^n \max\left\{1, \frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi_n(0)|}{1-|\varphi_n(0)|} + 1\right\}. \qquad (2)$$

ابتدا فرض کنید که φ دارای نقطه دنجوی-ولف داخلی مانند $\alpha \in \mathbb{D}$ باشد، بنابراین:

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi_n(0)|}{1-|\varphi_n(0)|} \longrightarrow \frac{1}{2}\log\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}$$

و

$$\frac{|\lambda|^n}{2}\log\frac{1+|\varphi_n(0)|}{1-|\varphi_n(0)|} \longrightarrow 0$$

و به وضوح در این حالت، $\|\lambda^n C_{\varphi_n}\| \to 0$.

اکنون فرض کنید φ دارای نقطه دنجوی-ولف مرزی مانند $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ باشد، بنابراین:

12- Resolvent Function

$$\lim_{n\to\infty} \log\frac{1+|\varphi_n(0)|}{1-|\varphi_n(0)|} = \infty.$$

از طرفی می‌دانیم برای هر $a \in \mathbb{R}$ که $0 < a < 1$،
$$\lim_{x\to\infty} a^x \ln x = ٠ .$$

بنابراین اگر $|\lambda| < 1$،
$$\lim_{n\to\infty} |\lambda|^n \log\frac{1+|\varphi_n(0)|}{1-|\varphi_n(0)|} = 0,$$

و در این حالت نیز از رابطه (1) نتیجه می‌شود که
$$\lim_{n\to\infty}\|\lambda^n C_{\varphi_n}\| = 0.$$

اگر φ یک خودریختی بیضوی باشد طبق نکته 3-2 می‌توان فرض کرد $\varphi(0) = 0$، مجددا طبق (2) داریم:
$$\|\lambda^n C_{\varphi_n}\| \le |\lambda|^n.$$

بنابراین در این حالت نیز
$$\lim_{n\to\infty}\|\lambda^n C_{\varphi_n}\| = 0.$$
توجه کنید که چون
$$\{\lambda^n C_{\varphi_n} f: f \in \mathcal{B}_0, \|f\| = 1\} \subseteq \{\lambda^n C_{\varphi_n} f: f \in \mathcal{B}, \|f\| = 1\},$$

حد فوق در فضای بلوچ کوچک نیز صفر می‌باشد.

گزاره 3-4. اگر $|\lambda| = 1$، آن‌گاه λC_φ کران‌دار توانی است، اگر و تنها اگر C_φ کران‌دار توانی باشد، اگر و تنها اگر φ یک خودنگاشت بیضوی باشد. (نقطه ثابت درونی داشته باشد.)

اثبات: در [11] نشان داده شده است که C_φ کران‌دار توانی است اگر و تنها اگر φ یک خودنگاشت بیضوی باشد و چون در این حالت
$$\|\lambda^n C_{\varphi_n}\| = \|C_{\varphi_n}\|,$$

اثبات تمام است.

قضیه 3-5. اگر $|\lambda| < 1$، آن‌گاه λC_φ در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$ (به شرط $\varphi \in \mathcal{B}_0$) به طور یکنواخت ارگودیک میانگین و در نتیجه ارگودیک میانگین می‌باشد.

اثبات: در قضیه قبل نشان دادیم که اگر $|\lambda| < 1$، آن‌گاه
$$\lim_{n\to\infty}\|\lambda^n C_{\varphi_n}\| = 0,$$

و لذا $\|(\lambda C_\varphi)_{[n]}\| \to 0$.

گزاره 3-6. اگر φ، نقطه دنجوی-ولف مرزی مانند $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ داشته باشد و $|\lambda| = 1$، آن‌گاه λC_φ در $\mathcal{B}$ و همچنین در $\mathcal{B}_0$ ارگودیک میانگین نبوده و در نتیجه به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین نیز نمی‌باشد.

اثبات: قرار دهید $f(z) = \log\log\frac{1}{z_0 - z}$، آن‌گاه $f \in \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ (برای دیدن جزییات به [3] مراجعه کنید.) داریم:

$$\left|\left(\lambda C_\varphi\right)_{[n]} f(0)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^n \lambda^j \log\log\frac{1}{z_0 - \varphi_j(0)}\right|$$

از طرفی

$$\lim_{j\to\infty}\left|\lambda^j \log\log\frac{1}{z_0-\varphi_j(0)}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\log\log\frac{1}{z_0-\varphi_j(0)}\right| = \infty.$$

بنابراین دنباله $\left\{\left(\lambda C_\varphi\right)_{[n]} f\right\}$ نمی‌تواند کران‌دار و در نتیجه همگرا باشد و لذا λC_φ در $\mathcal{B}$ و همچنین در $\mathcal{B}_0$ ارگودیک میانگین نیست و در نتیجه به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین نیز نمی‌باشد.

اگر $\mathcal{K}(X)$ مجموعه تمام عملگرهای فشرده و کران‌دار در X باشد، نرم اساسی عملگر T به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\|T\|_e = inf\{\|T - K\|: K \in \mathcal{K}(X)\}.$$

همچنین شعاع طیفی اساسی آن، $r_e(T) = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|_e^{\frac{1}{n}}$ می‌باشد.

عملگر T شبه فشرده نامیده می‌شود، اگر، $r_e(T) < 1$.

یوسیدا و کاکوتانی در [23] ثابت کرده‌اند، هر عملگر کران‌دار توانی شبه فشرده، به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین می‌باشد.

گزاره 3-7. فرض کنید $|\lambda| = 1$ و φ دارای نقطه دنجوی-ولف داخلی مانند $z_0 \in \mathbb{D}$ باشد λC_{φ} در $\mathcal{B}$ (و در $\mathcal{B}_0$ به شرط $\varphi \in \mathcal{B}_0$) به طور یکنواخت ارگودیک میانگین است، اگر و تنها اگر، λC_{φ} شبه فشرده باشد.

اثبات. با توجه به شرایط قضیه λC_{φ} کران‌دار توانی است، بنابراین اگر شبه فشرده باشد به طور یکنواخت ارگودیک میانگین بودن آن از قضیه یوسیدا-کاکوتانی نتیجه می‌شود.

بر عکس، فرض کنید λC_{φ} به طور یکنواخت ارگودیک میانگین باشد. نشان می‌دهیم $r_e(\lambda C_{\varphi}) < 1$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید، $\varphi(0) = 0$. چون λC_{φ} کران‌دار توانی است $M > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$\left\|\lambda^n C_{\varphi_n}\right\|_e \leq \left\|\lambda^n C_{\varphi_n}\right\| \leq M.$$

بنابراین $r_e(\lambda C_{\varphi}) = \lim_{n\to\infty} \left\|\lambda^n C_{\varphi_n}\right\|_e^{\frac{1}{n}} \leq 1$. از آنجا که درهر دو فضای بلوچ و بلوچ کوچک، رابطه $\overline{B\left(0, r_e(C_{\varphi})\right)} \subseteq \sigma(C_{\varphi})$، برقرار است، (به [11] مراجعه کنید)، به راحتی دیده می‌شود که:

$$\overline{B\left(0, r_e(\lambda C_{\varphi})\right)} \subseteq \sigma(\lambda C_{\varphi})$$

و حال اگر $r_e(\lambda C_{\varphi}) = 1$، $\overline{B(0,1)} \subseteq \sigma(\lambda C_{\varphi})$ خواهد بود و طبق قضیه دانفورد-لین λC_{φ} نمی‌تواند به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین باشد، پس باید $r_e(\lambda C_{\varphi}) < 1$ و λC_{φ} شبه فشرده می‌باشد.

گزاره 3-8. اگر $|\lambda| = 1$ و φ دارای نقطه دنجوی-ولف داخلی باشد، آن‌گاه λC_{φ} در $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت ارگودیک میانگین است، اگر و فقط اگر، میانگین ارگودیک باشد، اگر و فقط اگر λC_{φ}، شبه فشرده باشد.

اثبات. چون فضای بلوچ یک فضای GDP می‌باشد و با توجه به قضیه قبل اثبات بدیهی است.

قضیه3-9. فرض کنید φ یک خودریختی بیضوی باشد که با یک دوران غیر گویا معادل است. همچنین فرض کنید $|\lambda| = 1$. آن‌گاه λC_{φ} روی $\mathcal{B}_0$ ارگودیک میانگین می‌باشد.

اثبات: با توجه به نکته 3-2 می‌توان فرض کرد $\varphi(z) = \alpha z$، که $|\alpha| = 1$. برای هر $m \in \mathbb{N}$، قرار دهید $f_m(z) = z^m$.

بنابراین برای $n \in \mathbb{N}$:

$$f_m o \varphi_n(z) = \alpha^{nm} z^m,$$

اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\lambda\alpha^k \neq 1$، داریم:

$$\left\|(\lambda C_{\varphi})_{[n]} f_m\right\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda^j \alpha^{jm} z^m\right\| = \frac{1}{n}\|z^m\|\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda^j \alpha^{jm}\right| \leq \frac{2}{n|1-\lambda\alpha^m|}\|z^m\| \to 0,$$

هنگامی که $n \to \infty$.

حال اگر، برای یک $k \in \mathbb{N}$، $\lambda\alpha^k = 1$ داریم:

$$\left\|\left(\lambda C_{\varphi}\right)_{[n]} f_m\right\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} \left(\lambda\alpha^k\right)^j \alpha^{jm-kj} z^m\right\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha^{j(m-k)} z^m\right\| \leq \frac{1}{n}\frac{2\|z^m\|}{|1-\alpha^{m-k}|} \to 0,$$

زمانی که $n \to \infty$.

بنابراین برای هر چندجمله‌ای $\mathcal{P}$ داریم:

$$\left\|(\lambda C_{\varphi})_{[n]}\mathcal{P}\right\| \to 0,$$

و از آنجا که چندجمله‌ای‌ها در $\mathcal{B}_0$ چگال هستند و در این حالت λC_φ طبق گزاره 3-4 کران‌دار توانی است، پس برای هر $f \in \mathcal{B}_0$،

$$\left\|(\lambda C_\varphi)_{[n]} f\right\| \to 0.$$

بنابراین λC_φ ارگودیک میانگین است.

گزاره 3-10. فرض کنید φ یک خودریختی بیضوی باشد که با یک دوران غیرگویا معادل است و $|\alpha| = 1$. در این صورت λC_φ در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$ به طور یکنواخت ارگودیک میانگین نمی‌باشد.

اثبات: بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد، $\varphi(z) = \alpha z$. با شرط $|\alpha| = 1$. با توجه به شرایط مساله چون برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\alpha^k \neq 1$، داریم:

$$\overline{\{\lambda\alpha^k : k \in \mathbb{N}\}} = \partial\mathbb{D}.$$

فرض کنید $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. بنابراین زیردنباله $\{n_k\}$ وجود دارد به‌طوری که $\lambda\alpha^{n_k} \to z_0$.
قرار دهید $g_{n_k} = \frac{z^{n_k}}{\|z^{n_k}\|}$. بوضوح $g_{n_k} \in \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ و

$$\left\|\lambda C_\varphi g_{n_k} - z_0 g_{n_k}\right\| = |\lambda\alpha^{n_k} - z_0| \to 0.$$

بنابراین $\partial\mathbb{D} \subseteq \sigma_{ap}(\lambda C_\varphi) \subseteq \sigma(\lambda C_\varphi)$ و طبق قضیه دانفورد-لین λC_φ در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$ به طور یکنواخت ارگودیک میانگین نمی‌باشد.

گزاره 3-11. فرض کنید φ یک خودریختی بیضوی باشد که با یک دوران گویا معادل است و $|\lambda| = 1$. در این صورت λC_φ در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$ به طور یکنواخت ارگودیک میانگین و در نتیجه ارگودیک میانگین می‌باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید برای یک $k_1 \in \mathbb{N}$، $\alpha^{k_1} = 1$ و برای یک $k_2 \in \mathbb{N}$، $\lambda^{k_2} = 1$. توجه کنید α همان است که در نکته 3-2 آمده است. کوچکترین مضرب مشترک k_1 و k_2 را k نامیده و $0 \leq r < k$ را ثابت در نظر بگیرید. بنابراین برای هر $n = lk + r$ که $l \geq 0$، داریم:

$$\left(\lambda C_\varphi\right)_{[n]} = \frac{l}{lk+r}\sum_{m=1}^{k} \lambda^m C_{\varphi_m} + \frac{1}{lk+r}\sum_{m=1}^{r} \lambda^m C_{\varphi_m}.$$

از طرفی، اگر $n \to \infty$ به راحتی دیده می‌شود که $\frac{l}{lk+r} \to \frac{1}{k}$ و $\frac{1}{lk+r} \to 0$ و در نهایت:

$$\left(\lambda C_\varphi\right)_{[n]} \to \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} \lambda^m C_{\varphi_m},$$

و λC_φ در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$ به‌طور یکنواخت ارگودیک میانگین می‌باشد.

اکنون فرض کنید برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\lambda^k \neq 1$. بنابراین در این حالت، برای عدد ثابت r که $0 \leq r < k_1$ و $l \geq 0$، و $n = lk_1 + r$، داریم:

$$\left(\lambda C_\varphi\right)_{[n]} = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{l-1} \lambda^{mk_1} \sum_{m=1}^{k_1} \lambda^m C_{\varphi_m} + \frac{1}{n}\lambda^{lk_1} \sum_{m=1}^{r} \lambda^m C_{\varphi_m}$$

و بنابراین، اگر $M = \sum_{m=1}^{k_1}\left\|C_{\varphi_m}\right\|$ آنگاه:

$$\left\|\left(\lambda C_\varphi\right)_{[n]}\right\| \leq \frac{2M}{n|1-\lambda^{k_1}|} + \frac{M}{n},$$

و $\left(\lambda C_\varphi\right)_{[n]} \to 0$ و λC_φ در $\mathcal{B}$ و در $\mathcal{B}_0$ به طور یکنواخت ارگودیک میانگین می‌باشد.

5- نتیجه‌گیری

نتایج به دست آمده در این مقاله در جدول‌های زیر خلاصه شده‌اند.

جدول شماره (3) مربوط به خواص ارگودیک λC_φ، در فضای بلوچ

	مقدار λ	دنجوی-ولف مرزی	دنجوی-ولف داخلی	خودریختی بیضوی معادل با دوران گویا	خودریختی بیضوی معادل با دوران غیر گویا
کران‌دار توانی	$\|\lambda\| > 1$	×	×	×	×
	$\|\lambda\| < 1$	✓	✓	✓	✓
	$\|\lambda\| = 1$	×	✓	✓	✓
ارگودیک میانگین	$\|\lambda\| > 1$	×	×	×	×
	$\|\lambda\| < 1$	✓	✓	✓	✓
	$\|\lambda\| = 1$	×	به شرط شبه فشرده بودن λC_φ	✓	×
به طور یکنواخت ارگودیک میانگین	$\|\lambda\| > 1$	×	×	×	×
	$\|\lambda\| < 1$	✓	✓	✓	✓
	$\|\lambda\| = 1$	×	به شرط شبه فشرده بودن λC_φ	✓	×

جدول شماره (4) مربوط به خواص ارگودیک λC_φ، در فضای بلوچ کوچک

	مقدار λ	دنجوی ولف مرزی	دنجوی-ولف داخلی	خودریختی بیضوی معادل با دوران گویا	خودریختی بیضوی معادل با دوران غیر گویا
کران‌دار توانی	$\|\lambda\| > 1$	×	×	×	×
	$\|\lambda\| < 1$	✓	✓	✓	✓
	$\|\lambda\| = 1$	×	✓	✓	✓
ارگودیک میانگین	$\|\lambda\| > 1$	×	×	×	×
	$\|\lambda\| < 1$	✓	✓	✓	✓
	$\|\lambda\| = 1$	×	؟	✓	؟
به طور یکنواخت ارگودیک میانگین	$\|\lambda\| > 1$	×	×	×	×
	$\|\lambda\| < 1$	✓	✓	✓	✓
	$\|\lambda\| = 1$	×	به شرط شبه فشرده بودن λC_φ	✓	×

فهرست منابع

[1] J. M. Anderson, Clunie and Ch. Pommerenke, On Bloch functions and normal functions, J. Reine Angew. Math., 279 (1974), 12-37.

[2] W. Arendt, I. Chalendar, M. Kumar, S. Srivastava, Asymptotic behavior of the powers of composition operators on Banach spaces of holomorphic functions, Indiana Univ. Math. J., 67 (4) (2018) 1571–1595.

[3] W. Arendt, I Chalendar and M Kumar, Powers of composition operators: asymptotic behaviour on Bergman, Dirichlet and Bloch spaces, J. Australian Math. So., 108(3) (2020) 289-320.

[4] M.J. Beltrán Meneu, M.C. Gómez-Collado, E. Jordá and D. Jornet, Mean ergodic composition operators on Banach spaces of holomorphic functions, J. Funct. Anal., 270 (12) (2016) 4369–4385.

[5] M.J. Beltrán Meneu, M.C. Gómez - Collado, E. Jordá, and D. Jornet, Mean ergodicity of weighted composition operators on spaces of holomorphic functions, J. Math. Anal. Appl., 444 (2) (2016) 1640–1651.

[6] J. Bonet and P. Dománski, A note on mean ergodic composition operators on spaces of holomorphic functions, Math., RACSAM 105 (2) (2011) 389-396.

[7] J. Bonet and W. Ricker, Mean ergodicity of multiplication operators in weighted spaces of holomorphic functions, Arch. Math., 92 (2009) 428–437

[8] J. Cima, The basic properties of Bloch functions, Int. J. Math. Math. Sci., 3 (1979) 369-413.

[9] C. Cowen and B. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[10] V. P. Fonf, M. Lin and P. Wojtaszczyk, Ergodic characterizations of reflexivity in Banach spaces, J. Funct. Anal., 187 (2001) 146-162.

[11] E. Jordá and A. Rodríguez-Arenas, Ergodic properties on Banach spaces of analytic functions, J. Math. Ana. App., 486(1) (2020) 1-22.

[12] U. Krengel, Ergodic Theorems, De Gruyter, Berlin, 1985.

[13] M. Lin, On the uniform ergodic theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 43(2) (1974) 337–340.

[14] E.R. Lorch, Means of iterated transformations in reflexive vector spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 45 (12) (1939) 945-947.

[15] H.P. Lotz, Uniform convergence of operators on L^∞ and similar spaces, Math. Z., 190 (1985) 207–220.

[16] K. Madigan and A. Matheson, Compact composition operators on the Bloch space, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (7) (1995) 2679—2687.
[17] V. Neumann J, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, Proc. Natl. Acad. Sci., USA, 18(1) (1932) 70-82.

[18] K. Petersen, Ergodic theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[19] J.H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer, Berlin, 1993.

[20] E. Wolf, Power bounded composition operators, Comput. Methods Funct. Theory, 12 (1) (2012) 105–117.

[21] C. Xiong, Norm of composition operators on the Bloch space, Bull. Austral. Math. Soc., 70 (2004), 293-299.

[22] K. Yosida, Mean ergodic theorem in Banach spaces, Proc. Imp. Acad., 14 (8) (1938) 292–294.

[23] K. Yosida and S. Kakutani, Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem, Ann. Math., 42 (1) (1941).