دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 588-2588X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

معرفی مشتق کوانتومی کسری فازی و خواص آن

ناصر میکائیل‌وند[1]، زهرا نوعی‌اقدم[2]*

(1) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اردبیل، اردبیل، ایران
(2) دانشکده علوم پایه،گروه ریاضی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/06/26 تاریخ پذیرش مقاله: 1399/09/25

چکیده:
مطالعه‌ی حساب کوانتومی یا کیو حساب از اوایل قرن بیستم توسط جکسون آغاز شد؛ اماامروزه مطالعاتی زیادی در مورد محاسبات کوانتومی صورت گرفته؛ که باعث توجه بیشتر علاقمندان در این زمینه شده است. حساب کوانتومی یکی از علوم‌های کاربردی و بین رشته‌ای است که به دلیل داشتن ویژگی‌های خاص از جمله، تعریف مشتق بدون وجود حد، باعث مزیتش نسبت به حساب معمولی شده است و کار با حساب کوانتومی از نظر عددی سریعتر و راحت‌تر از حساب استاندارد است. از آنجا که اکثر مسائل موجود در طبیعت منجر به مواجهه با معادلات فازی شامل مشتقاتی از مرتبه کسری می‌شوند؛ در این پژوهش بعد از معرفی مشتق کوانتومی (به اختصار q -مشتق) فازی بر مبنای تفاضل هاکوهارای تعمیم‌یافته، مشتق کوانتومی کاپوتوی کسری فازی و انتگرال کوانتومی (به اختصار q -انتگرال) ریمن-لیوول کسری فازی معرفی می‌کنیم. سپس به بررسی قضایای اساسی و بیان تعاریف مهم در رابطه با q -مشتق کاپوتوی کسری فازی و q -انتگرال ریمن-لیوول کسری فازی می‌پردازیم. که این نتایج در بسیاری از برنامه‌های کاربردی مانند فیزیک، نظریه کوانتومی، نظریه اعداد، مکانیک آماری و غیره رخ می‌دهد.

واژه‌ی کلیدی: تفاضل هاکوهارای تعمیم‌یافته؛ q -مشتق فازی؛ q -مشتق کاپوتوی کسری فازی؛ q -انتگرال ریمن-لیوول کسری فازی.

*.عهده‌دار مکاتبات: Email: Zahra.noie@yahoo.com

1. مقدمه

در فیزیک به کمترین مقدار ممکن از یک کمیت، مقدار پایه یا یک کوانتم از آن کمیت می‌گویند. در اواخر قرن بیستم حساب کوانتومی با استفاده از تعریف دیفرانسیل کوانتومی (به اختصار q-دیفرانسیل) توسط جکسون به عنوان ارتباطی بین علم ریاضی و فیزیک مطرح شد [1]. در حساب معمولی یا کلاسیک تعریف مشتق وابسته به وجود حد است در صورتی که در حساب کوانتومی q-مشتق بدون نیاز به حد تعریف می‌شود. که این مزیت حساب کوانتومی به حساب معمولی است؛ مخصوصاً در مسائلی که حد تعریف نشده باشد. حساب کوانتومی کاربردهای فراوانی از جمله در زمینه ریاضی: نظریه اعداد، ترکیبیات، توابع پایه‌ای ابر هندسی، توابع متعامد و دیگر زمینه‌ها: تئوری کوانتومی، مکانیک، نظریه نسبیت، فیزیک ذرات، شیمی الکترو تحلیلی، مغز و اعصاب، نظریه‌ی کنترل، آمار و... دارد. با توجه به اهمیت استفاده از کوانتوم در مسائل مختلف و سرعت بالای کار با حساب کوانتومی به جای حساب معمولی، گسترش حساب کوانتومی از جمله موضوعات مطرح در جوامع علمی به حساب می‌آید. یکی دیگر از علوم کاربردی که در قرن بیستم متولد شد و روز به روز در حال گسترش است؛ علم فازی است [2-5]. به این ترتیب بخش اول این پژوهش شامل برخی مقدمات و خلاصه‌ای از جزئیات فازی و حساب کوانتومی است؛ که در بخش‌های دیگر استفاده خواهد شد. امروزه علم فازی در علوم مختلف به خصوص ریاضیات، کاربرد فراوانی پیدا کرده است؛ براین‌اساس در سال‌های اخیر محققان سعی کرده‌اند بین علوم مختلف و حساب فازی ارتباط برقرار کنند. مهمترین این ارتباطات، ارتباط بین حساب فازی و کوانتوم است. بیشتر مسائل موجود در طبیعت منجر به حل معادلاتی از مرتبه کسری می‌شوند و این اهمیت بررسی محاسبات کسری از جمله محاسبات کسری فازی را دو چندان می‌کند. با توجه به توضیحی که در مورد حساب کوانتومی و مزایای آن دادیم، در این پژوهش بر آن شدیم؛ بعد از معرفی q-مشتق فازی، حساب کوانتوم کسری فازی را با استفاده از تعریف q-مشتق کسری کاپوتوی فازی و q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی در بخش3 معرفی می‌کنیم. در ادامه قضایا و تعاریف مهم و پایه‌ای حساب کوانتوم کسری فازی را در بخش 4 بررسی می‌کنیم. نهایتاً در فصل‌آخر نتیجه‌گیری حاصل از این پژوهش را بیان شده است.

2. مفاهیم پایه‌ای

در این فصل ابتدا به جزئیات فازی مورد نیاز در این مقاله اشاره می‌شود که برای مطالعه بیشتر می‌توان به منابع [6-12] مراجعه کرد.

یک عدد فازی دلخواه u در فرم پارامتری، یک زوج مرتب از توابع $(\underline{u}(r),\overline{u}(r))$ برای $0\le r\le 1$است که در روابط زیر صدق می‌کند؛

(i) $\underline{u}(r)$ در بازه $[0,1]$تابعی از چپ پیوسته، یکنوا افزایشی و کراندار است؛

(ii) $\overline{u}(r)$ در بازه $[0,1]$تابعی از چپ پیوسته، یکنوا کاهشی و کراندار است؛

(iii) $\underline{u}(r)\le\overline{u}(r),\ 0\le r\le 1$

مجموعه‌ی تمامی اعداد فازی را با $\mathbb{R}_f$ نمایش می‌دهند. با این تفاسیر عدد غیرفازی k را به صورت $\overline{u}(r)=\underline{u}(r)=k,\ 0\le r\le 1$ نمایش می‌دهند و عدد منفرد می‌نامند. برای اعداد فازی دلخواه $u,v\in\mathbb{R}_f$ و عدد ثابت $k\in\mathbb{R}$ جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر داریم

$$(u\oplus v)(r)=u(r)+v(r),$$

$$[k\odot u]_r=\begin{cases}[k\underline{u}(r),k\bar{u}(r)], & k\ge 0,\\ [k\bar{u}(r),k\underline{u}(r)], & k<0.\end{cases}$$

در این مقاله منظور از تابع مقدار فازی تابعی است

$f: A \to \mathbb{R}_f,\ A \in \mathbb{R}$ که در آن $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و $[f(x)]_r = [\underline{f}(x,r), \overline{f}(x,r)]$، r-برش یا فرم پارامتری تابع مقدار فازی f نامیده می‌شود. متر هاسدورف بین دو عدد فازی به فرم زیر تعریف می‌شود

$$d_{\mathrm{H}}: \mathbb{R}_f \times \mathbb{R}_f \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ d_{\mathrm{H}}(u,v) = \sup_{0\le r\le 1} \max\{|\underline{u}(r)-\underline{v}(r)|, |\overline{u}(r)-\overline{v}(r)|\},$$

که برای $\forall u,v,w,z \in \mathbb{R}_f$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ خواص زیر صادق است: [11]

$$\text{(I)}\ d_{\mathrm{H}}(u\oplus w, v\oplus w) = d_{\mathrm{H}}(u,v)$$

$$\text{(II)}\ d_{\mathrm{H}}(u\oplus v, w\oplus z) \le d_{\mathrm{H}}(u,w) + d_{\mathrm{H}}(v,z)$$

$$\text{(III)}\ d_{\mathrm{H}}(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|\, d_{\mathrm{H}}(u,v)$$

حال فرض کنید $u,v \in \mathbb{R}_f$ تعریف تفاضل هاکوهارا و تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا به صورت زیر است: اگر $w \in \mathbb{R}_f$ وجود داشته باشد به‌طوری که $u = v \oplus w$ آنگاه w گفته می‌شود تفاضل هاکوهارا (به اختصار H -تفاضل) از u و v که به فرم $u \ominus v$ نمایش داده می‌شود و برای $w \in \mathbb{R}_f$ وجودی، تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا (به اختصار gH - تفاضل) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u \Theta_{gH} v = w \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ u = v \oplus w, \\ or \\ (ii)\ v = u \oplus (-1)w. \end{cases}$$

بدیهی است؛ زمانی (i) و (ii) هر دو برقرارند که w عددی غیرفازی باشد. تابع مقدار فازی f روی بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر است اگر f با متر d_{H} پیوسته و یا تعریف انتگرال موجود باشد. علاوه بر این داریم

$$\left[\int_a^b f(s)ds\right]_r = \left[\int_a^b \underline{f}(s;r)ds, \int_a^b \overline{f}(s;r)ds\right].$$

در انتهای این فصل به طور خلاصه تعاریف اساسی در حساب کوانتومی را بیان می‌کنیم که برای جزئیات بیشتر در این زمینه به مقالات معرفی شده در بخش منابع و همچنین منابع موجود در آن مقاله‌ها مراجعه کنید[13-18].

عبارت زیر را زمانی که t به سمت t_0 میل می‌کند؛ در نظر بگیرید.

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

وقتی که حد وجود داشته باشد؛ تعریف مشتق $\frac{df}{dt}$ (مشتق معمولی) از تابع $f(t)$ در نقطه ی $t = t_0$ بدست می آید. اگر در نظر بگیریم $t = qt_0$ یا $t = t_0 + h$ که در آن ها q عدد ثابت مخالف 1 و h عدد ثابت مخالف 0 است و حد عبارت را در نظر نگیریم؛ با حساب کوانتومی سروکار خواهیم داشت. برای بیان دقیق تر در این موضوع به تعاریف زیر نیاز داریم:

فرض کنید $\mathbb{T}_q$ اسکالر زمانی باشد. در این صورت برای $0 < q < 1$ تعریف می‌کنیم

$$T_q = \{t: t = \mu q^n, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\},$$

که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح است. همچنین اگر α عدد حقیقی نامنفی باشد؛ داریم

$$T_q^{\alpha} = \{q^{\alpha+n} : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\},$$

بدیهی است که $T_q^0 = \mathrm{T}_q$. q -آنالوگ از یک عدد مثبت a به صورت زیر است.

$$(a)_q = \frac{1-q^a}{1-q}.$$

تابع q -کسری برای $n \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$(t-s)_q^n = \prod_{i=0}^{n-1}(t - q^i s),$$

و برای موردی که n عدد صحیح غیر مثبت است؛ داریم:

$$(t-s)_q^n = t^n \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1-\frac{s}{t}q^i}{1-\frac{s}{t}q^{i+n}}.$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که این تابع در روابط زیر صادق است:

(I). $(t-s)_q^{\beta+\gamma} = (t-s)_q^{\beta}(t-q^{\beta}s)_q^{\gamma}$

(II). $(at-as)_q^{\beta} = a^{\beta}(t-s)_q^{\beta}$

(III). $(t-s)_q^{\beta} \neq (-1)(s-t)_q^{\beta}$

تابع q-گاما که با $\Gamma_q(.)$ نشان داده می‌شود؛ به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{(1-q)_q^{\alpha-1}}{(1-q)^{\alpha-1}},\ \alpha \in \mathbb{R}/\{0\}\cup\mathbb{Z}_-,\ 0<q<1,$$

که در رابطه بازگشتی زیر صادق است

$$\Gamma_q(\alpha+1) = \frac{1-q^{\alpha}}{1-q}\Gamma_q(\alpha),\quad \Gamma_q(1)=1,\quad \alpha>0.$$

تابع دلخواه $f: T_q \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید؛ q-دیفرانسیل این تابع $d_q f(t) = f(t) - f(qt).$ است. بنابراین q-مشتق از تابع f به صورت زیر تعریف می شود

$$D_q f(t) = \frac{d_q f(t)}{d_q t} = \frac{f(t)-f(qt)}{(1-q)t},\ t \in \mathrm{T}_q - \{0\}.$$

بدیهی است اگر $t=0$ آنگاه داریم $D_q f(0) = f'(0)$ که در آن f' مشتق معمولی از تابع f است. علاوه بر این ما تعریف می‌کنیم

$$D_q^0 f = f,\ D_q^n f = D_q(D_q^{n-1} f),\ (n=1,2,3,...).$$

اگر تابع f در نقطه t دیفرانسیل‌پذیر باشد؛ به راحتی می‌توان مشاهده کرد $lim_{q\to 1} D_q f(t) = f'(t)$.

(q-انتگرال) $F(t)$ یا ${}_qI_a$ از تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_0^t f(s)d_q s = (1-q)t\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(tq^i),\quad 0<q<1.$$

این سری انتگرال جکسون از تابع f نامیده می‌شود که توسط جکسون در سال 1910 معرفی شده است. از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت

$$\int_a^b f(s)d_q s = b(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(bq^i) - a(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(aq^i).$$

تابع f گفته می‌شود q-انتگرال‌پذیر است اگر جمع سری سمت راست مطلقاً همگرا باشد. همچنین خواص زیر را برای عملگرهای تعریف شده داریم

$${}_qI_a^0 f(t) = f(t),$$
$${}_qI_a^n f(t) = {}_qI_a({}_qI_a^{n-1} f(t)),\ (n=1,2,3,...).$$
$$D_q \cdot {}_qI_a f(t) = f(t),$$
$${}_qI_a . D_q f(t) = f(t) - f(a).$$

فرمول q-انتگرال‌گیری جز به جز به صورت زیر است

$$\int_a^b u(s)D_q v(s)d_q s = [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b v(qs)D_q u(s)d_q s.$$

همچنین برای تابع پیوسته f روی $[0,s] \subset \mathbb{T}_q$ داریم

$$\lim_{q\to 1}\int_0^s f(t)d_q t = \int_0^s f(t)dt.$$

با توجه به رابطه بالا می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که اگر f تابعی پیوسته باشد؛ q-انتگرال‌پذیر نیز می‌باشد چون در این صورت انتگرال سمت راست که انتگرال ریمن است موجود خواهد بود.

حال با فرض اینکه f تابعی تعریف شده روی $(0,b)$ که در آن $b>0$ و $a \in (0,b)$ نقطه ی ثابت

دلخواه باشد؛ تعاریف زیر را داریم:

تعریف 1: فرض کنید $\alpha>0$ و $f(t)$ تابعی q-انتگرال‌پذیر باشد؛ در این صورت q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل از مرتبه‌ی α به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}^{RL}_{q}I^{\alpha}_{a} f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_a^t (t-qs)_q^{\alpha-1} f(s)\, d_q s.$$

تعریف 2. فرض کنید $\alpha>0$ و $\alpha\notin\mathbb{N}$ آنگاه q-مشتق کسری کاپوتو از تابع f ، توسط

$${}^{C}_{q}D^{\alpha}_{*}f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(m-\alpha)}\int_a^t (t-qs)_q^{m-\alpha-1}(D_q^m f)(s)\, d_q s,$$

تعریف می‌شود که در آن $\forall m, D_q^m f(t)$ توابعی پیوسته و q-انتگرال‌پذیر هستند.
با شرط $0<\alpha\le 1$ داریم

$${}^{C}_{q}D^{\alpha}_{*}f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\int_a^t (t-qs)_q^{-\alpha}(D_q f)(s)\, d_q s.$$

قضیه 1. فرض کنید $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ و $f(t)$ تابعی q-انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه انتگرال‌گیری q-کسری دارای خاصیت نیم گروهی زیر است:

$${}^{RL}_{q}I^{\alpha}_{[a,t]}({}^{RL}_{q}I^{\beta}_{a}f)(t) = ({}^{RL}_{q}I^{\alpha+\beta}_{a}f)(t).$$

قضیه 2. فرض کنید $\alpha>0$ و f در یک دامنه‌ی مناسب تعریف شده است، آنگاه

$${}^{RL}_{q}I^{\alpha}_{[a,t]}({}^{C}_{q}D^{\alpha}_{*}f)(t) = f(t) - \sum_{k=o}^{m-1}\frac{(t-a)_q^k}{\Gamma_q(k+1)}D_q^k f(a),$$

که در آن $m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}$ و برای حالت خاص $0<\alpha<1$ داریم

$${}^{RL}_{q}I^{\alpha}_{[a,t]}({}^{C}_{q}D^{\alpha}_{*}f)(t) = f(t)-f(a).$$

3. معرفی q-مشتق کسری فازی و q-انتگرال کسری فازی

در این بخش فرض می‌کنیم f تابعی مقدار فازی است. ($f:\mathbb{T}_q\to\mathbb{R}_f$) ابتدا q-مشتق فازی را با استفاده از gH-تفاضل معرفی و در ادامه برخی از تعاریف مورد نیاز مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در انتها q-مشتق کسری کاپوتوی فازی و q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی را معرفی خواهیم کرد.

تعریف 3. برای تابع دلخواه $f:T_q\to\mathbb{R}_f$، q-دیفرانسیل توسط gH-تفاضل به صورت زیر است

$${}^{gH}d_q f(t) = f(t)\ominus_{gH} f(qt),$$

بنابراین ${}^{F}_{q}[gH]$- مشتق از تابع f به این صورت تعریف می‌شود

$${}^{F}_{q}Df(t) = \frac{{}^{gH}d_q f(t)}{d_q t} = \frac{f(t)\Theta_{gH} f(qt)}{(1-q)t},\ t\in \mathrm{T}_q-\{0\},$$

که در آن

$$\mathrm{T}_q = \{t : t=\mu q^n, \mu\in\Box, n\in\Box\}\cup\{0\}.$$

همچنین داریم

$$[f(t)\Theta_{gH}f(qt)]_r = [\min\{\underline{f}(t;r)-\underline{f}(qt;r), \overline{f}(t;r)-\overline{f}(qt;r)\}, \max\{\underline{f}(t;r)-\underline{f}(qt;r), \overline{f}(t;r)-\overline{f}(qt;r)\}],$$

که $f(t)$ و $f(qt)$ توابع مقدار فازی هستند. اگر gH-تفاضل وجود داشته باشد آنگاه

$$f(t)\Theta f(qt) = f(qt)\Theta_{gH}f(t)$$

است و شرایط برای وجود

$$gHd_qf(t) = f(t)\Theta_{gH}f(qt)\in\mathbb{R}_f$$

به صورت زیر است

$$case(i)\begin{cases} {}^{gH}d_q \underline{f}(t;r) = \underline{f}(t;r) - \underline{f}(qt;r), & \text{صعودی} \\ {}^{gH}d_q \overline{f}(t;r) = \overline{f}(t;r) - \overline{f}(qt;r), & \\ {}^{gH}d_q \underline{f}(t;r) \le {}^{gH} d_q \overline{f}(t;r), & \text{نزولی} \end{cases}$$

$$case(ii)\begin{cases} {}^{gH}d_q \underline{f}(t;r) = \overline{f}(t;r) - \overline{f}(qt;r), & \text{صعودی} \\ {}^{gH}d_q \overline{f}(t;r) = \underline{f}(t;r) - \underline{f}(qt;r), & \\ {}^{gH}d_q \underline{f}(t;r) \le {}^{gH} d_q \overline{f}(t;r). & \text{نزولی} \end{cases}$$

تعریف 4. فرض کنید $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ و تفاضل $f(t)\Theta_{gH} f(qt)$ وجود داشته باشد؛ در اینصورت گوییم تابع f تابعی ${}_q^F[(i)-gH]$ - دیفرانسیل‌پذیر است اگر

$$[{}_q^F Df(t)]_r = [D_q \underline{f}(t;r), D_q \overline{f}(t;r)],$$

و ${}_q^F[(ii)-gH]$ - دیفرانسیل‌پذیر است اگر

$$[{}_q^F Df(t)]_r = [D_q \overline{f}(t;r), D_q \underline{f}(t;r)],$$

که در آن

$$D_q \underline{f}(t;r) = \frac{\underline{f}(t;r) - \underline{f}(qt;r)}{(1-q)t},$$

$$D_q \overline{f}(t;r) = \frac{\overline{f}(t;r) - \overline{f}(qt;r)}{(1-q)t}.$$

تعریف 5. فرض کنید $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ باشد. گوییم تابع f تابعی ${}_q^F[gH]$-دیفرانسیل‌پذیر از مرتبه‌ی n - ام در نقطه‌ی t_0 است؛ هر وقت این تابع ${}_q^F[gH]$- دیفرانسیل پذیر از مرتبه‌ی $m(m=1,2,\dots,n-1)$ در t_0 باشد. علاوه بر این اگر نوع gH-دیفرانسیل پذیری تغییر نکند (روی T_q هیچ نقطه‌ی گره‌ای وجود نداشته باشد) در این صورت وجود دارد ${}_q^F D^n f(t_0) \in \mathbb{R}_f$ به‌طوری که

$${}_q^F D^n f(t_0) = \frac{{}_q^F D^{n-1} f(t_0) \Theta_{gH} {}_q^F D^{n-1} f(qt_0)}{(1-q)t_0}.$$

قضیه 4. فرض کنید $f(t): T_q \to \mathbb{R}_f$ و $[f(t)]_r = [\underline{f}(t;r), \overline{f}(t;r)]$ باشد. گوییم f تابعی ${}_q^F[gH]$-دیفرانسیل‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $r \in [0,1]$ توابعی $\underline{f}(t;r)$ و $\overline{f}(t;r)$، q-دیفرانسیل‌پذیر نسبت به t باشند و

$$[{}_q^F Df(t)]_r = [\min\{D_q \underline{f}(t;r), D_q \overline{f}(t;r)\}, \max\{D_q \underline{f}(t;r), D_q \overline{f}(t;r)\}]$$

تعریف 6. فرض کنید f تابعی مقدار فازی باشد؛ با توجه به تعریف 3 از ${}_q^F[gH]$-مشتق و تعریف عملگر $\hat{M}_q$ به صورت $\hat{M}_q(F(t)) = F(tq)$؛ داریم

$$\frac{1}{(1-q)t}(1\ominus_{gH} \hat{M}_q)F(t) = \frac{F(t)\ominus_{gH} F(qt)}{(1-q)t} = f(t).$$

حال می‌توانیم فرمول q-انتگرال فازی (انتگرال جکسون فازی) را به صورت زیر بنویسیم

$$F(t) = \frac{1}{1\ominus_{gH} \hat{M}_q}((1-q)tf(t)),$$

بنابراین با فرض $a=0$، q-انتگرال فازی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} [F(t)]_r &= [\int_0^t f(s) d_q s]_r \\ &= [\int_0^t \underline{f}(s;r) d_q s, \int_0^t \overline{f}(s;r) d_q s] \\ &= [(1-q)t\sum_{i=0}^{\infty} q^i \underline{f}(q^i t;r), \\ &\quad (1-q)t\sum_{i=0}^{\infty} q^i \overline{f}(q^i t;r)] \\ &= (1-q)t\sum_{i=0}^{\infty} q^i [f(q^i t)]_r, \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$F(t) = (1-q)t \odot \sum_{i=0}^{\infty} q^i \odot f(q^i t).$$

لم 1. فرض کنید $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ تابعی پیوسته باشد

آنگاه $\int_{t_0}^{s} f(t)d_q t$ به ازای $s,t_0 \in T_q$ موجود و پیوسته است و در حقیقت گوییم تابع f تابعی q-انتگرال پذیر است.

تعریف 7. فرض کنید $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ یک تابع q-انتگرال‌پذیر و برای $0 \le r \le 1, t \in T_q - \{0\}$ داشته باشیم $[f(t)]_r = [\underline{f}(t;r), \overline{f}(t;r)]$، آنگاه q-انتگرال کسری ریمن-لیوول فازی از مرتبه $\alpha \neq 0,-1,-2,...$ برای $f(s)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$ {}_{q}^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^t (t-qs)_q^{\alpha-1} f(s) d_q s. $$

تعریف 8. فرض کنید $\forall m, {}_q^F D^m f$ پیوسته و در نتیجه روی T_q، q-انتگرال‌پذیرند، آنگاه مرتبه α-ام q-مشتق کسری کاپوتوی فازی از تابع مقدار فازی f (به طور خلاصه ${}_q^{FC}[gH]$-مشتق) به صورت زیر معرفی می‌شود

$$ ({}_q^{FC}D_*^{\alpha} f)(t) = {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{m-\alpha} ({}_q^F D^m f)(t) $$
$$ = \frac{1}{\Gamma_q(m-\alpha)} \int_a^t (t-qs)_q^{m-\alpha-1} ({}_q^F D^m f)(s) d_q s, $$

که در آن $m \in \mathbb{N}, m-1 < \alpha \le m, t > a$. در این پژوهش، فقط ${}_q^{FC}[gH]$-مشتق از مرتبه $0 < \alpha \le 1$را برای تابع مقدار فازی f در نظر می‌گیریم؛ دراین صورت ${}_q^{FC}[gH]$ -مشتق به صورت زیر خواهد بود

$$ {}_q^{FC}D_*^{\alpha} f(t) = {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{1-\alpha} ({}_q^F Df)(t) $$
$$ = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \int_a^t (t-qs)_q^{-\alpha} ({}_q^F Df)(s) d_q s, \quad t > a. $$

4. خواص مربوط به ${}_q^{FC}[gH]$-دیفرانسیل‌پذیری

در این بخش بعضی تعاریف را در ارتباط با q-مشتق کسری کاپوتوی فازی و q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی بیان و قضایای اصلی مربوط به آنها را مطرح و اثبات می‌کنیم.

تعریف 9. فرض کنید تابع $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ در نقطه‌ی $t_0 \in T_q - \{0\}$، ${}_q^{FC}[gH]$-مشتق‌پذیر باشد؛ گوییم f در نقطه‌ی $t_0 \in T_q - \{0\}$، ${}_q^{FC}[(i)-gH]$-مشتق‌پذیر است اگر

$$ (i) \quad [{}_q^{FC}D_*^{\alpha} f(t_0)]_r $$
$$ = ({}_q^C D_*^{\alpha} \underline{f}(t_0;r), {}_q^C D_*^{\alpha} \overline{f}(t_0;r)), 0 \le r \le 1, $$

و ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$ -مشتق‌پذیر است اگر

$$ (ii) \quad [{}_q^{FC}D_*^{\alpha} f(t_0)]_r $$
$$ = ({}_q^C D_*^{\alpha} \overline{f}(t_0;r), {}_q^C D_*^{\alpha} \underline{f}(t_0;r)), 0 \le r \le 1, $$

که در آنها داریم

$$ {}_q^C D_*^{\alpha} \underline{f}(t_0;r) $$
$$ = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \int_a^{t_0} (t_0-qs)_q^{-\alpha} (D_q \underline{f})(s;r) d_q s, $$
$$ {}_q^C D_*^{\alpha} \overline{f}(t_0;r) $$
$$ = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \int_a^{t_0} (t_0-qs)_q^{-\alpha} (D_q \overline{f})(s;r) d_q s. $$

حال با استفاده از تعریف 6 و فرض $a=0$، فرمول کلی برای ${}_q^{FC}[gH]$-مشتق را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$ {}_q^{FC}D_*^{\alpha} f(t) = \frac{(1-q)t}{\Gamma_q(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} q^j (t-q^{j+1}t)_q^{-\alpha} \odot_q^F Df(q^j t) $$
$$ = \frac{(1-q)t}{\Gamma_q(1-\alpha)} \odot \sum_{j=0}^{\infty} q^j (t-q^{j+1}t)_q^{-\alpha} \odot \left(\frac{f(q^j t) \Theta_{gH} f(q^{j+1}t)}{(1-q)q^j t}\right) $$
$$ = \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)} \odot \sum_{j=0}^{\infty} (t-q^{j+1}t)_q^{-\alpha} \odot (f(q^j t) \Theta_{gH} f(q^{j+1}t)). $$

بنابراین برای ${}_q^{FC}[gH]$-مشتق داریم

$$\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}(t-q^{j+1}t)_q^{-\alpha}[\underline{f}(q^jt;r)-\underline{f}(q^{j+1}t;r),$$
$$\overline{f}(q^jt;r)-\overline{f}(q^{j+1}t;r)];$$

اگر f تابعی ${}_q^{FC}[(i)-gH]$-مشتق‌پذیر باشد.

$$\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}(t-q^{j+1}t)_q^{-\alpha}[\overline{f}(q^jt;r)-\overline{f}(q^{j+1}t;r),$$
$$\underline{f}(q^jt;r)-\underline{f}(q^{j+1}t;r)];$$

اگر f تابعی ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-مشتق‌پذیر باشد.

قضیه 5. فرض کنید ${}_q^F Df$ تابعی پیوسته و q-انتگرال‌پذیر باشد و برای $0\le r\le 1, t\in \mathrm{T}_q-\{0\}$ داشته باشیم $[f(t)]_r=[\underline{f}(t;r),\overline{f}(t;r)]$. در این صورت $\underline{f}(t;r)$ و $\overline{f}(t;r)$ توابعی q-مشتق‌پذیر کاپوتو هستند اگروتنهااگر f تابعی ${}_q^{FC}[gH]$-مشتق‌پذیر باشد. علاوه براین داریم:

$$[{}_q^{FC}D_*^{\alpha}f(t)]_r=[\min\{{}_q^{C}D_*^{\alpha}\underline{f}(t;r),{}_q^{C}D_*^{\alpha}\overline{f}(t;r)\},$$
$$\max\{{}_q^{C}D_*^{\alpha}\underline{f}(t;r),{}_q^{C}D_*^{\alpha}\overline{f}(t;r)\}],$$

که در آن ${}_q^{C}D_*^{\alpha}\underline{f}(t;r)$ و ${}_q^{C}D_*^{\alpha}\overline{f}(t;r)$ در تعریف 2معرفی شده‌اند.

اثبات. مطابق تعریف 2و با توجه به فرضیات قضیه $\underline{f}(t;r)$ و $\overline{f}(t;r)$ توابعی q -مشتق‌پذیر هستند. همچنین با استفاده از قضیه 4نتیجه می‌گیریم f تابعی ${}_q^{F}[gH]$ -مشتق‌پذیر است. بنابراین از تعریف 8 نتیجه می‌گیریم که f تابعی ${}_q^{FC}[gH]$ -مشتق پذیر است. علاوه براین با جاگذاری تعریف تابع ${}_q^F Df$ در تعریف q-مشتق کاپوتو داریم

$$[{}_q^{FC}D_*^{\alpha}f(t)]_r$$
$$=\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\int_a^t(t-qs)_q^{-\alpha}[\min\{D_q\underline{f}(s;r),D_q\overline{f}(s;r)\},$$
$$\max\{D_q\underline{f}(s;r),D_q\overline{f}(s;r)\}]d_qs,$$

از طرفی می‌دانیم $a<s<t<q\le 1$ و $\Gamma_q(1-\alpha)>0$ بنابراین

$$[{}_q^{FC}D_*^{\alpha}f(t)]_r=[\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}$$
$$\min\{\int_a^t(t-qs)_q^{-\alpha}D_q\underline{f}(s;r)d_qs,$$
$$\int_a^t(t-qs)_q^{-\alpha}D_q\overline{f}(s;r)d_qs\},$$
$$\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\max\{\int_a^t(t-qs)_q^{-\alpha}D_q\underline{f}(s;r)d_qs,$$
$$\int_a^t(t-qs)_q^{-\alpha}D_q\overline{f}(s;r)d_qs\}],$$

نهایتا داریم

$$[{}_q^{FC}D_*^{\alpha}f(t)]_r=[\min\{{}_q^{C}D_*^{\alpha}\underline{f}(t;r),{}_q^{C}D_*^{\alpha}\overline{f}(t;r)\},$$
$$\max\{{}_q^{C}D_*^{\alpha}\underline{f}(t;r),{}_q^{C}D_*^{\alpha}\overline{f}(t;r)\}].$$

بلعکس. بدیهی است که اگر f تابعی ${}_q^{FC}[gH]$ -مشتق‌پذیر باشد، با استفاده از تعریف 8 توابع $\underline{f}(t;r)$ و $\overline{f}(t;r)$ هر دو q -مشتق پذیر کاپوتو هستند.

قضیه 6. اگر $f:T_q\to\mathbb{R}_f$ و $f(t;r)=(\underline{f}(t;r),\overline{f}(t;r))$ به ازای $0\le r\le 1, t\in\mathrm{T}_q-\{0\}$ تابعی q-انتگرال پذیر باشد و $\alpha,\beta>0$ آنگاه داریم

$${}_q^F I_a^{\alpha}({}_q^F I_a^{\beta}f)(t;r)=({}_q^F I_a^{\alpha+\beta}f)(t;r).$$

اثبات. فرض کنید f تابعی ${}_q^{FC}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، با استفاده از قضیه1داریم

$${}_q^{F.RL}I_a^{\alpha}({}_q^{F.RL}I_a^{\beta}f)(t;r)$$
$$=({}_qI_a^{\alpha}({}_qI_a^{\beta}\underline{f})(t;r),{}_qI_a^{\alpha}({}_qI_a^{\beta}\overline{f})(t;r))$$
$$=({}_qI_a^{\alpha+\beta}\underline{f}(t;r),{}_qI_a^{\alpha+\beta}\overline{f}(t;r))$$
$$=({}_q^{F.RL}I_a^{\alpha+\beta}f)(t;r).$$

اثبات زمانی که f تابعی ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، مشابه است.

قضیه 7. فرض کنید $f:T_q\to\mathbb{R}_f$ تابعی مقدار فازی روی T_q باشد.

(I) تابع f در نقطه‌ی $t_0 \in \mathrm{T}_q - \{0\}$ تابعی ${}_q^F[(i)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر است اگروتنهااگر در همان نقطه ${}_q^{FC}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل‌پذیر باشد.

(II) تابع f در نقطه‌ی $t_0 \in \mathrm{T}_q - \{0\}$ تابعی ${}_q^F[(ii)-gH]$-دیفرانسیل پذیر است اگروتنهااگر در همان نقطه ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر باشد.

اثبات. برای بخش (I) قضیه فرض کنید f در نقطه‌ی t_0 تابعی ${}_q^F[(i)-gH]$-دیفرانسیل پذیر است، طبق تعاریف 4 و 2 داریم

$$[{}_q^{FC}D_*^\alpha f(t_0)]_r = [{}_q^{F.RL}I_a^{1-\alpha}({}_q^F Df)(t_0)]_r$$
$$= \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\int_a^{t_0}(t_0-qs)_q^{-\alpha}[D_q \underline{f}(s;r), D_q \overline{f}(s;r)]d_q s,$$

از طرف دیگر عبارت‌های $\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}$ و $(t_0-qs)_q^{-\alpha}$ همواره ($qs \le s \Rightarrow qs < t_0$ و $a < s < t_0 \le q \le 1$) مثبت هستند، بنابراین

$$= \left[\frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\int_a^{t_0}(t_0-qs)_q^{-\alpha} D_q \underline{f}(s;r)d_q s, \right.$$
$$\left. \frac{1}{\Gamma_q(1-\alpha)}\int_a^{t_0}(t_0-qs)_q^{-\alpha} D_q \overline{f}(s;r)d_q s \right]$$

در نتیجه

$$[{}_q^{FC}D_*^\alpha f(t_0)]_r$$
$$= [{}_q^{C}D_*^\alpha \underline{f}(t_0;r), {}_q^{C}D_*^\alpha \overline{f}(t_0;r)], \quad 0 \le r \le 1.$$

بلعکس. با استفاده از تعریف 8 سر راست است. با روند مشابه‌ای می‌توان ثابت کرد که بخش (II) قضیه نیز برقرار است.

تعریف10. فرض کنید $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ تابعی مقدار فازی روی T_q باشد. نقطه‌ی $t_0 \in \mathrm{T}_q - \{0\}$ را یک نقطه‌ی گره‌ای برای ${}_q^{FC}[gH]$-دیفرانسیل پذیری f گویند، اگر در هر همسایگی V از t_0 نقاط $t_1 < t_0 < t_2$ چنان وجود داشته باشد به‌طوری که

نوع (I): تابع f در نقطه‌ی t_1 تابعی ${}_q^{FC}[(i)-gH]$-دیفرانسیل پذیر است درحالی که در همان نقطه ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل پذیر نیست و در نقطه‌ی t_2 تابعی ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$- دیفرانسیل پذیر است درحالی که در همان نقطه ${}_q^{FC}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل‌پذیر نیست یا

نوع (II): تابع f در نقطه‌ی t_1 تابعی ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر است درحالی که در همان نقطه ${}_q^{FC}[(i)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر نیست و در نقطه‌ی t_2 تابعی ${}_q^{FC}[(i)-gH]$- دیفرانسیل‌پذیر است درحالی که در همان نقطه ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر نیست.

قضیه 8. فرض کنید $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ تابع مقدار فازی روی T_q است؛

(I) اگر $t_0 \in \mathrm{T}_q - \{0\}$ یک نقطه ی گره‌ای برای-q دیفرانسیل‌پذیری تابع f از نوع (I) باشد آنگاه t_0 یک نقطه‌ی گره‌ای برای کاپوتو q-دیفرانسیل‌پذیری تابع f از نوع (I) است.

(II) اگر $t_0 \in \mathrm{T}_q - \{0\}$ یک نقطه‌ی گره‌ای برای-q دیفرانسیل‌پذیری تابع f از نوع (II) باشد آنگاه t_0 یک نقطه‌ی گره‌ای برای کاپوتو q-دیفرانسیل پذیری تابع f از نوع (II) است.

اثبات. با استفاده از قضیه 7 و تعریف 10 اثبات بدیهی است.

لم 2. فرض کنید $f: T_q \to \mathbb{R}_f$ تابعی پیوسته باشد آنگاه ${}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^\alpha f(t)$ به ازای $0 < \alpha \le 1$ و $t \in \mathrm{T}_q$ موجود است و در حقیقت گوییم تابع f تابعی q-انتگرال‌پذیر کسری ریمن-لیوویل فازی است.

اثبات. با توجه به لم 1 و q- انتگرال‌پذیری تابع پیوسته در حالت فازی و اینکه می‌دانیم تابع f و

$(t-qs)_q^{\alpha-1}>0$ هر دو پیوسته‌اند، بنابراین حاصل ضربشان نیز تابعی پیوسته خواهد بود؛ بدیهی است که q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی موجود است.

لم3. فرض کنید $f:T_q\to\mathbb{R}_f$ تابعی پیوسته باشد آنگاه ${}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}f(t)$ تابعی پیوسته به ازای $0<\alpha\le 1$ و $t\in \mathrm{T}_q$ است.

اثبات. با توجه به توضیحاتی که در مورد پیوسته بودن توابع موجود در تعریف مربوط به ${}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}f(t)$ در لم 2 دادیم؛ بدیهی است که ${}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}f(t)$ تابعی پیوسته خواهد بود.

لم4. فرض کنید f تابعی مقدارفازی و پیوسته باشد آنگاه q-انتگرال‌های کسری ریمن-لیوویل فازی زیر

$$ {}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-1}]}^{\alpha}f(t_{r-1}), $$
$$ {}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-2}]}^{\alpha}({}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-1}]}^{\alpha}f)(t_{r-1})),\ldots, $$
$$ {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{F.RL}I_{[a,t_1]}^{\alpha}\ldots({}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-2}]}^{\alpha} ({}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-1}]}^{\alpha}f)(t_{r-1}))\ldots), $$

برای $0<\alpha\le 1$ همگی به‌ترتیب در $t_{r-1},t_{r-2},\cdots,t$ تابعی پیوسته هستند که $t_{r-1},t_{r-2},\cdots,t\ge a$ و همگی عضو T_q.

اثبات. به استقراء روی تعداد انتگرال‌های کسری ریمن-لیوویل فازی اثبات می‌کنیم.

فرض استقراء: فرض کنید برای تابع مقدار پیوسته و فازی f، توابع q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی

$$ {}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-1}]}^{\alpha}f(t_{r-1}) $$

و

$$ {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{F.RL}I_{[a,t_1]}^{\alpha}\ldots({}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-2}]}^{\alpha} ({}_q^{F.RL}I_{[a,t_{r-1}]}^{\alpha}f)(t_{r-1}))\ldots) $$

((r)-بار) توابعی پیوسته هستند؛ ثابت می‌کنیم اگر-$(r+1)$بار از تابع فازی f انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی بگیریم تابع حاصل پیوسته خواهد بود. با استفاده از فرض استقراء تابع q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی بعد از (r)-بار انتگرال‌گیری کسری، تابعی پیوسته است در نتیجه اگر از این تابع پیوسته q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی بگیریم که $(r+1)$-بار خواهد شد و با توجه به لم3تابع حاصل پیوسته است. در واقع هر بار که از تابع پیوسته‌ی f، q-انتگرال کسری ریمن-لیوویل فازی بگیریم حاصل تابعی پیوسته است و حکم ثابت می‌گردد.

لم 5. فرض کنید $f:T_q\to\mathbb{R}_f$ تابعی مقدارفازی باشد و ${}_q^{F}Df$ پیوسته باشد؛ در اینصورت برای $t_0\in\mathrm{T}_q$ و $0<\alpha\le 1$ داریم

$$ {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{gH}D_*^{\alpha}f)(t)=f(t)\Theta_{gH}f(a). $$

اثبات. با استفاده از قضیه 6و تعریف 8 و همچنین مفاهیم بخش قبل، می‌توان نتیجه گرفت

$$ {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f)(t) $$
$$ ={}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{1-\alpha}({}_q^{F}Df)(t)) $$
$$ =\int_{a\,q}^{t\,F}Df(s)d_qs. $$

حال فرض می‌کنیم که f تابعی ${}_q^{FC}[(i)-gH]$ - دیفرانسیل پذیر باشد $(0\le r\le 1)$ با استفاده از قضیه 7 داریم

$$ [{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f)(t)]_r $$
$$ =[\int_a^t D_q\underline{f}(s;r)d_qs,\int_a^t D_q\overline{f}(s;r)d_qs] $$
$$ =[\underline{f}(t;r)-\underline{f}(a;r),\overline{f}(t;r)-\overline{f}(t_0;r)] $$
$$ =[f(t)\Theta f(a)]_r. $$

و برای- ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$ دیفرانسیل‌پذیری، داریم

$$[{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f)(t)]_r$$
$$=[\int_a^t D_q\overline{f}(s;r)d_qs, \int_a^t D_q\underline{f}(s;r)d_qs]$$
$$=[\overline{f}(t;r)-\overline{f}(a;r), \underline{f}(t;r)-\underline{f}(a;r)]$$
$$=[(-1)\square\ (f(a)\Theta f(t;r))]_r,$$

که در واقع لم اثبات شد.

قضیه 9. فرض کنید $f:T_q\to\mathbb{R}_f$ تابعی ${}_q^{F}[gH]$-دیفرانسیل‌پذیر است بطوری که نوع دیفرانسیل پذیری آن در T_q تغییر نمی‌کند آنگاه به ازای $s\in T_q$ داریم

(I) اگر $f(t)$ تابعی ${}_q^{FC}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه $({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{i\cdot gH})$، q-انتگرال‌پذیر کسری ریمن-لیوویل فازی روی T_q است و

$$f(t)=f(a)\oplus {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{i\cdot gH})(t).$$

(II) اگر $f(t)$ تابعی ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه $({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{ii\cdot gH})(t)$، q-انتگرال‌پذیر کسری ریمن-لیوویل فازی روی T_q است و

$$f(a)= f(t)\oplus(-1)_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{ii\cdot gH})(t).$$

اثبات. بنا به لم 5 بدیهی است.

لم 6. فرض کنید $f:T_q\to\mathbb{R}_f$ تابعی ${}_q^{FC}[gH]$-دیفرانسیل پذیر باشد و $FCD_*^{\alpha}f_{gH}(t)\in C([a,b],\mathbb{R}_f)$ آنگاه برای $0<\alpha\le1,\ 0\le r\le1$ داریم

$${}_q^{F.RL}I_{[t,a]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{i.gH})(t) = (-1)\Theta_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{ii.gH})(t).$$

اثبات. با فرض پیوسته بودن ${}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{i.gH}(t)$ نتیجه می‌گیریم که q-انتگرال پذیر کسری ریمن-لیوویل فازی روی T_q است بنابراین

$$[{}_q^{F.RL}I_{[t,a]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{\alpha}f_{i.gH})(t)]_r$$
$$=\left[{}_q^{F.RL}I_{[t,a]}^{\alpha}({}_qD_*^{\alpha}\underline{f})(t;r), {}_q^{F.RL}I_{[t,a]}^{\alpha}({}_qD_*^{\alpha}\overline{f})(t_0;r)\right],$$

حال بنا به لم 5 عبارت بالا برابر است با

$$=\left[\underline{f}(a;r)-\underline{f}(t;r), \overline{f}(a;r)-\overline{f}(t;r)\right] \quad (2)$$
$$=[f(a)\Theta f(t)]_r,$$

از طرفی چون ${}_q^{F}Df_{ii\cdot gH}(t)$، q-انتگرال پذیر است؛ داریم

$$[{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{F}Df_{ii\cdot gH})(t)]_r$$
$$=\left[{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_qD_*^{\alpha}\overline{f})(t;r), {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_qD_*^{\alpha}\underline{f})(t;r)\right]$$
$$=\left[\overline{f}(t;r)-\overline{f}(a;r), \underline{f}(t;r)-\underline{f}(a;r)\right] \quad (3)$$
$$=\left[(-1)\square\ (f(t_0)\Theta f(t))\right]_r,$$

با توجه به (2) و (3) لم ثابت می‌شود.

قضیه 10. فرض کنید ${}^{FC}D_*^{\alpha}f:\mathbb{T}_q\to\mathbb{R}_f$ و برای $j=1,\cdots,n$ داشته باشیم ${}_q^{FC}D_*^{j\alpha}f\in C(T_q,\mathbb{R}_f)$ با $t\in T_q$

(I) اگر برای $j=1,\cdots,n$ توابع ${}_q^{FC}D_*^{j\alpha}f$ همگی ${}_q^{FC}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل‌پذیر باشند و نوع دیفرانسیل‌پذیری آنها روی T_q تغییر نکند آنگاه

$${}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{i\cdot gH}(t)={}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{i\cdot gH}(a) \oplus {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{i\cdot gH})(t).$$

(II) اگر برای $j=1,\cdots,n$، ${}_q^{FC}D_*^{j\alpha}f$ها همگی ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل‌پذیر باشند و نوع دیفرانسیل‌پذیری آنها روی T_q تغییر نکند آنگاه

$${}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{ii\cdot gH}(t)={}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{ii\cdot gH}(a) \oplus {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{ii\cdot gH})(t).$$

(III) فرض کنید برای $k\in\mathbb{N}$، $j=2k-1$، ${}_q^{FC}D_*^{j\alpha}f$ها همگی ${}_q^{F}[(i)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر باشند و $f(t)$ و $k\in\mathbb{N}$، $j=2k$، ${}_q^{FC}D_*^{j\alpha}f$ها ${}_q^{F}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر باشند بنابراین اگر j زوج باشد

$$ {}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{i\cdot gH}(t)={}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{i\cdot gH}(a)\Theta(-1){}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{ii\cdot gH})(t). $$

(IV) فرض کنید برای $j=2k-1$، $k\in\mathbb{N}$ و ${}_q^{FC}D_*^{j\alpha}f$ها همگی توابعی ${}_q^{F}[((ii)-gH)]$-دیفرانسیل‌پذیر هستند و $f(t)$، ${}_q^{FC}D_*^{j\alpha}f$ها برای $j=2k$، $k\in\mathbb{N}$ ${}_q^{F}[(i)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه‌اگر j زوج باشد

$$ {}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{ii\cdot gH}(t)={}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{ii\cdot gH}(a)\Theta(-1){}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{i\cdot gH})(t). $$

اثبات. با فرض اینکه برای $j=1,\dots,n$ داریم ${}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f\in C(T_q,\mathbb{R}_f)$ نتیجه می‌گیریم ${}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f$ها توابعی q-انتگرال‌پذیر هستند؛ در اینجا فقط قسمت (I)و (III) قضیه را ثابت می‌کنیم و دیگر قسمت‌ها مشابه این دو، اثبات خواهند شد.
(II) با توجه به فرض قسمت (II)، ${}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{gH}$، ها برای $j=1,\cdots,n$ همگی ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیر هستند. بنابراین داریم

$$ \begin{aligned} &[{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{ii\cdot gH})(t)]_r\\ &=\Big[{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_qD_*^{(j)\alpha}\overline{f})(t;r),\ {}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_qD_*^{(j)\alpha}\underline{f})(t;r)\Big]\\ &=\Big[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(s;r)-{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(t_0;r),\\ &\quad {}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(s;r)-{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(t_0;r)\Big]\\ &=\Big[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(s;r),{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(s;r)\Big]\\ &-\Big[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(t_0;r),{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(t_0;r)\Big], \end{aligned} $$

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$ {}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{ii\cdot gH}(s)={}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{ii\cdot gH}(t_0)\oplus{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{ii\cdot gH})(t). $$

(III) مطابق فرض ${}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{gH}$ها برای $k\in\mathbb{N}$، $j=2k-1$، ${}_q^{FC}[(i)-gH]$- دیفرانسیل‌پذیر هستند و برای $k\in\mathbb{N}$، $j=2k$، ${}_q^{FC}[(ii)-gH]$-دیفرانسیل‌پذیرند؛ در اینجا فرض می کنیم که j زوج است

$$ \begin{aligned} &[{}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{i\cdot gH}(s)]_r\\ &\Theta(-1)[{}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{C}D_*^{(j)\alpha}f_{ii\cdot gH})(t)]_r\\ &=\Big[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(s;r),{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(s;r)\Big]\\ &+(-1)[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(s;r)\\ &-{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(t_0;r),{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(s;r)\\ &-{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(t_0;r)]\\ &=\Big[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(s;r),{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(s;r)\Big]\\ &+[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(t_0;r)-{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(s;r)\\ &,{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(t_0;r)-{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(s;r)]\\ &=\Big[{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\underline{f}(t_0;r),{}_q^{C}D_*^{(j-1)\alpha}\overline{f}(t_0;r)\Big] \end{aligned} $$

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$ {}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{i\cdot gH}(s)={}_q^{FC}D_*^{(j-1)\alpha}f_{i\cdot gH}(t_0)\Theta(-1){}_q^{F.RL}I_{[a,t]}^{\alpha}({}_q^{FC}D_*^{(j)\alpha}f_{ii\cdot gH})(t), $$

که در واقع قضیه ثابت شد.

5. نتیجه‌گیری

واحد اطلاعات در کامپیوترهای کلاسیک بیت است که با 0 و1نمایش داده می‌شود. هر بیت به لحاظ فیزیکی به کمک یک سیستم ماکروسکوپی مانند مغناطیدگی دیسک سخت یا باردارشدن خازن مشخص می‌شود. اما در یک کامپیوترکوانتمی اطلاعات با واحد کیوبیت ذخیره‌سازی می‌شوند و

مقادیر صفر، یک و یا حتی یک برهم‌نهی کوانتمی از این دو را در بر می‌گیرد. بنابراین دودویی نیست پس دیگر از چارچوب «منطق‌بولی»تبعیت نمی‌کند و به جای آن از چارچوب«منطق کوانتومی» پیروی می‌کند. در صورت ساخت کامپیوترهای کوانتمی بزرگ، این کامپیوترها قادر خواهند بود مسائلی را که کامپیوترهای کنونی برای حل آن‌ها نیاز به زمان و حافظه‌ی زیادی دارند با صرف زمان و هزینه‌ی کم‌تر (به طور نمایی سریع‌تر) حل کنند. به دلیل اهمیت حساب کوانتومی در این پژوهش به معرفی حساب کسری کوانتوم فازی و تعاریف و قضایای مهم مربوط به آن پرداخته ایم. در کارهای بعدی به معرفی تیلور کوانتومی فازی و کاربردهای آن در حل معادلات دیفرانسیل کوانتومی فازی خواهیم پرداخت.

فهرست منابع

[1] Jackson, F. H. (1908). On q-functions and certain difference operator, Trans Roy Soc Edin, 46, 253-281.

2- احمدی، الهام؛ احمدی، نازنین (1399) روشی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه nام با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب، پژوهش‌های نوین در ریاضی.

3- الهویرنلو، توفیق؛احمدی، الهام؛ احمدی، نازنین (1396) جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول تحت مشتق تعمیم یافته، پژوهش‌های نوین در ریاضی.

4- پرندین، نورالدین (1398) حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه n با استفاده از روش آدامز-بشفورث، پژوهش های نوین در ریاضی.

5- وثوقی، حسین؛ عباسبندی، سعید (1396) درونیابی توابع مشتق پذیر تعمیم یافته هاکوهارا از مرتبه دوم، پژوهش‌های نوین در ریاضی.

[6] Bede, B. and Stefanini, L. (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, Fuzzy Set and Systems, 230, 119-141.

[7] Ma, M., Friedman, M. and Kandel, A. (1999). A new fuzzy arithmetic, Fuzzy set Syst, 108, 83-90.

[8] Mikaeilvand, N., Noeiaghdam, Z. (2012). The general solution of $m \times n$ Fuzzy Linear Systems, Middle-East Journal of Scientific Research, 11 (1), 128-133.

[9] Mikaeilvand, N., Noeiaghdam, Z. (2015). The general solutions of fuzzy linear matrix equations, Journal of Mathematical Extension, 9, 1-13.

[10] Noeiaghdam, Z. and Mikaeilvand, N. (2012). Least Squares Solutions of Inconsistent Fuzzy Linear Matrix Equations, International Journal of Industrial Mathematics, 365-374.

[11] Stefanini, L. and Bede, B. (2009). Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Analysis, 71, 1311-1328.

[12] Puri,M.L. and Ralescu, D.A. (1986). Fuzzy random variables, Math Anal Appl, 114, 409-422.

[13] Ahmad, B., Nieto, J. J., Alsaedi, A. and Al-Hutami, H. (2014). Existence of solutions for nonlinear fractional q-difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions, Journal of the Franklin Institute, 351 (5), 2890-2909.

[14] Ahmad, B. and Nieto, J. J. (2013). Basic Theory of Nonlinear Third-Order q-Difference Equations and Inclusions, Math. Model. Anal, 18, 122-135.

[15] Abdeljawad, T. and Baleanu, D. (2011). Caputo q-fractional initial value problems and a q-analogue mittag-leffler function, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16 (12), 4682-4688.

[16] Kac, V. and Cheung, P. (2001). Quantum Calculus-Universitext, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

[17] Li, X., Han, Z., Sun, Sh. and Sun, L. (2016). Eigenvalue problems of fractional q-difference equations withgeneralized p-Laplacian, Applied Mathematics Letters, 57, 46-53.

[18] Rajkovic, P. M., Marinkovic, S. D.

and Stankovic, M. S. (2007). Fractional Integrals and Derivatives in q-Calculus, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 1, 311-323.