دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دسته‌بندی گروه‌های EPPO متناهی با هفت کلاس تزویج نامرکزی

زینب فروزان‌فر[1*]، مهدی رضائی[2]

[(۱و۲)] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) - مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۱۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۰

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی و $Z(G)$ مرکز گروه G باشد. فرض کنید برای گروه متناهی G، $\pi_e(G)$ مجموعه مرتبه‌های عناصر G را نمایش دهد. در این صورت G را یک گروه EPPO نامند، هرگاه مرتبه عناصر آن توان‌های نامنفی از اعداد اول باشد. همچنین فرض کنید برای یک زیر مجموعه A از G، $r_G(A)$ تعداد کلاس‌های تزویج از G باشد که اشتراکش با A نابدیهی است. هدف این مقاله دسته‌بندی گروه‌های EPPO متناهی با ویژگی $r_G(G-Z(G))=7$ می‌باشد. ابتدا حالتی که $Z(G)=1$ می‌باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس به بررسی حالتی که $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی باشد می‌پردازیم. پس از آن حالتی که $\frac{G}{Z(G)}$ ناآبلی هست را در نظر می‌گیریم. این حالت را در سه زیر حالتی که $\frac{G}{Z(G)}$ یک p-گروه، یک گروه فروبنیوس یا گروهی ۲-فروبنیوس باشد، بررسی می‌کنیم. در واقع نشان می‌دهیم که تنها گروه‌هایی که در خاصیت مورد نظر صدق می‌کنند همان گروه‌هایی هستند که در حالت $Z(G)=1$ به‌دست آمده اند و تمامی این گروه ها، گروه‌هایی فروبنیوس هستند.

واژه‌های کلیدی: کلاس تزویج، p-زیرگروه سیلو، گروه فروبنیوس، مرتبه.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: zforouzanfar@gmail.com , z.forozanfar@bzeng.ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی و N یک زیرگروه نرمال از G باشد. اخیراً مطالعات گسترده‌ای در مورد ساختار گروه‌های متناهی با توجه به تعداد کلاس‌های تزویج آنها انجام شده است. برای اولین بار در سال ۱۹۸۴، در [1] گروه‌های متناهی را که زیرگروه‌های نرمال آنها به صورت اجتماع دو کلاس تزویج از G هستند دسته‌بندی شدند. در ادامه این کار در سال ۱۹۹۸، در [2] ساختار زیرگروه نرمال N که به صورت اجتماع سه کلاس تزویج از G می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفت. همچنین در سال ۲۰۰۱، در [3] ساختار زیرگروه نرمال N که به صورت اجتماع چهار کلاس تزویج از G می‌باشد، مشخص گردیدند. برای یک زیرمجموعه A از G، فرض کنید $r_G(A)$ تعداد کلاس‌های تزویج از G که اشتراکش با A نابدیهی است، تعریف شود. در سال ۲۰۰۴، در [4] حالتی که $r_G(G-N)\leq 3$ در نظر گرفته شد و تمام گروه‌های متناهی که در این شرط صدق می‌کنند رده بندی شدند. همچنین در سال ۲۰۱۱، در [5] ساختار گروه‌های متناهی با حداکثر چهار کلاس تزویج نامرکزی مورد بررسی قرار گرفتند. در ادامه کار در [6] و [7]، به ترتیب گروه‌های متناهی با پنج و شش کلاس تزویج نامرکزی رده بندی شدند. G را یک گروه EPPO نامیم، هرگاه مرتبه عناصر آن توان‌های نامنفی از اعداد اول باشد. در کل مقاله منظور از C_n ، x^G و D_{2n} به ترتیب کلاس تزویج x در گروه G، گروه دوری از مرتبه n و گروه دو وجهی از مرتبه $2n$ است. همچنین لازم به ذکر است که برای یک گروه متناهی G، H و K حاصلضرب نیم مستقیم دو زیرگروه K و H با زیرگروه نرمال K می‌باشد. به‌ویژه، یک گروه فروبنیوس با هسته K و متمم H به صورت $K\times_f H$ نمایش داده می‌شود. برای یک عنصر $x\in G$، گروه خارج قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ و همدسته $xZ(G)$ را به ترتیب با $\overline{G}$ و $\overline{x}$ نمایش می‌دهیم. هدف اصلی این مقاله رده‌بندی گروه‌های EPPO متناهی با هفت کلاس تزویج نامرکزی می‌باشد.

قضیه ۱.۱: G یک گروه EPPO متناهی با ویژگی $r_G(G-Z(G))=7$ است اگر و تنها اگر G با یکی از گروه‌های فروبنیوس زیر یکریخت باشد:
$C_5^2\times_f Q_8$، $C_2^4\times_f C_5$، $C_{13}\times_f C_6$، $C_{17}\times_f C_4$، $C_2^3\times_f C_7$، $C_4^2\times_f C_3$، $C_2^4\times_f C_3$ یا D_{26}.

۲- نتایج اصلی

در این بخش برخی از نتایج مهمی که در اثبات قضیه ۱.۱ مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲: ([8]) فرض کنید G یک گروه متناهی و $r_G(G)$ تعداد کلاس های تزویج G باشد. در اینصورت

(1) اگر $r_G(G)=1$، آنگاه $G\cong 1$،

(2) اگر $r_G(G)=2$، آنگاه $G\cong C_2$،

(3) اگر $r_G(G)=3$، آنگاه G با C_3 یا S_3 یکریخت است،

(4) اگر $r_G(G)=4$،آنگاه G با C_4، $C_2\times C_2$، D_{10} یا A_4 یکریخت است،

(5) اگر $r_G(G)=5$،آنگاه G با C_5، D_8، Q_8، D_{14}، S_4، A_5، $C_7\times_f C_3$ یا $C_5\times_f C_4$ یکریخت است،

(6) اگر $r_G(G)=6$، آنگاه G با C_6، D_{12}، C_4م C_3، D_{18}، $C_3^2\times_f C_2$، $C_3^2\times_f C_4$، $C_3^2\times_f Q_8$، یا $PSL(2,7)$ یکریخت است،

(7) اگر $r_G(G)=7$، آنگاه G با C_7، D_{16}، Q_{16}، SD_{16}، D_{22}، $SL(2,3)$، $C_{13}\times_f C_3$، $C_7\times_f C_6$، $C_{13}\times_f C_4$، $C_{11}\times_f C_5$، S_5 یا A_6

یکریخت است،

(8) اگر $r_G(G)=8$، آنگاه G با C_8، $C_2\times C_4$، $C_2\times C_2\times C_2$، $C_2\times D_{10}$، $C_5 \rtimes C_4$، $C_2\times A_4$، D_{26}، $C_2^4\times_f C_3$، $C_4^2\times_f C_3$، $GL(2,3)$، $SL(2,3).C_4$، $C_2^3\times_f C_7$، $C_{17}\times_f C_4$، $C_{13}\times_f C_6$، $C_2^4\times_f C_5$، $Hol(C_2^3, C_7\times_f C_3)$، $C_5^2\times_f Q_8$، $C_5^2\times_f DC_3$، $C_5^2\times_f SL(2,3)$، $PSL(2,11)$ یا $M_9=PGL^*(2,9)$ یکریخت است.

لم ۲.۲: (لم ۴.۰ از [9]) فرض کنید G یک گروه EPPO متناهی باشد. در این صورت

(1) G پوچتوان است اگر و تنها اگر G یک p-گروه باشد.

(2) اگر G حل‌پذیر و غیرپوچتوان باشد، آنگاه $|G|=p^\alpha q^\beta$. فرض کنید P (یا Q)، p (یا q)-زیرگروه سیلو G و P_1، بزرگترین p-زیرگروه نرمال G باشد.

(a) اگر ۲-زیرگروه سیلوی G یک گروه کواترنیون باشد، آنگاه $p\neq 2$، $q=2$ و G یک گروه فروبنیوس با متمم فروبنیوس Q است. علاوه براین، G دارای عامل‌های اصلی $\underbrace{2,\ldots,2}_{\beta}$، $p^{b_1},\ldots,p^{b_k}$ می‌باشد که $b_i>1$، $b\,|\,b_i$، $i=1,\ldots,k$ و b نمایی از p به پیمانه $2^{\alpha-1}$ است.

(b) فرض کنید مرتبه G فرد باشد یا ۲-زیرگروه سیلوی G یک گروه کواترنیون نباشد. در این صورت G/P_1 دوری ($P_1=P$) یا فرادوری ($P_1<P$) است و G به ترتیب یک گروه فروبنیوس یا ۲-فروبنیوس می‌باشد.

$(b1)$ $P_1=P$ و G یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس P و متمم دوری Q است. علاوه بر این، G دارای عامل‌های اصلی $\underbrace{q,\ldots,q}_{\beta}$، $\underbrace{p^b,\ldots,p^b}_{k}$ می‌باشد که $\alpha=kb$ و b نمایی از p به پیمانه q^β است. در این حالت کلاس پوچتوانی P کوچکتر یا مساوی k است.

$(b2)$ $P_1<P$ و G یک گروه ۲-فروبنیوس است. اگر $|G/P_1|=p^\gamma q^\beta$، آنگاه $p^\gamma\,|\,(q-1)$. G دارای عامل‌های اصلی $\underbrace{p,\ldots,p}_{\gamma}$، $\underbrace{q,\ldots,q}_{\beta}$، $p^{b_1},\ldots,p^{b_k}$ می‌باشد که $b_i>1$، $b\,|\,b_i$، $i=1,\ldots,k$، $\gamma<b$ و b نمایی از p به پیمانه q^β است.

(3) اگر G ساده باشد، آنگاه

$G\cong L_2(q),\ q=5,7,8,9,17;$ $L_3(4)$، $Sz(8)$ یا $Sz(32)$ (قضیه ۱۶ در [10]).

(4) اگر G یک گروه حل‌ناپذیر و غیرساده باشد، آنگاه $G\cong M_{10}$ یا G دارای یک ۲-زیرگروه آبلی مقدماتی مانند P است، P در G نرمال است و

$G/P\cong L_2(q),\ \ q=5,8;\ Sz(8)$ یا $Sz(32)$ (قضیه ۳ در [11] و قضیه ۱.۳ در [12]).

لم ۳.۲ :(لم ۱.۲ در [8]) فرض کنید N یک زیرگروه نرمال گروه G و $x\in G$ باشد. همچنین فرض کنید xN به صورت اجتماع متمایز $(xn_1)^G$، ....، $(xn_s)^G$ با $n_i\in N$ برای همه‌ی iها باشد. در این صورت:

(i) $1/|C_{\overline{G}}(\overline{x})|=\sum_{k=1}^{s}1/|C_G(xn_k)|$ و $o(\overline{x})$، $|C_G(xn_k)|$ را برای هر $k=1,\ldots,s$ می‌شمارد.

(ii) $r_G(xN)=1$ اگر و تنها اگر $|C_G(x)|=|C_{\overline{G}}(\overline{x})|$. بعلاوه در این حالت داریم $xN\subset x^G$.

گزاره ۴.۲: (گزاره ۱.۲ در [4]) اگر N یک زیرگروه نرمال گروه متناهی و ناآبلی G باشد، آنگاه $r_G(G-N)=1$ اگر و تنها اگر G یک گروه فروبنیوس با هسته N و $|N|=\frac{|G|}{2}$ است.

لم ۵.۲: (لم ۶ در [5]) فرض کنید G یک گروه متناهی و K و N دو زیرگروه نرمال G با $|\frac{K}{N}|=p$ که در آن p یک عدد اول است، باشند. اگر $|C_G(x)|=p$ برای هر $x\in K-N$، آنگاه K یک گروه فروبنیوس با هسته N است.

۳- اثبات قضیه اصلی

فرض کنید G یک گروه EPPO متناهی نا آبلی با هفت کلاس تزویج نامرکزی باشد و $G-Z(G)=\cup_{i=1}^{7}x_i^{G}$. از آنجایی که $r_{\overline{G}}(\overline{G})-1\le r_G(G-Z(G))=7$، داریم $r_{\overline{G}}(\overline{G})\le 8$. اگر $Z(G)=1$، آنگاه $r_G(G)=8$ و با استفاده از لم‌های ۱.۲ و ۲.۲، G با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

$C_5^2\times_f Q_8, C_2^4\times_f C_5, C_{13}\times_f C_6, C_{17}\times_f C_4, C_2^3\times_f C_7, C_4^2\times_f C_3, C_2^4\times_f C_3$ یا D_{26}.

در ادامه مقاله، فرض می‌کنیم $Z(G)\ne 1$ و نشان می‌دهیم در این حالت هیچ گروه EPPO که در ویژگی $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد. اثبات را در دو حالت که $\overline{G}$ آبلی یا نا آبلی باشد جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا در لم زیر حالتی که $\overline{G}$ آبلی است را در نظر می‌گیریم.

گزاره ۱.۳: اگر $\overline{G}$ آبلی باشد، آنگاه هیچ گروه EPPO متناهی که در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد.

اثبات. از آنجایی که $r_{\overline{G}}(\overline{G})\le 8$، با استفاده از لم ۱.۲، $\overline{G}$ با یکی از گروه های زیر یکریخت است: $C_2\times C_2$، $C_2\times C_2\times C_2$ یا $C_2\times C_4$.

اگر $\overline{G}\cong C_2\times C_2$، آنگاه از آنجایی که برای هر عنصر نامرکزی x، $|x^G|=|G:C_G(x)|=2$، تساوی $G-Z(G)=\cup_{i=1}^{7}x_i^{G}$ نتیجه می‌دهد که $3|Z(G)|=14$، که تناقض است.

اگر $\overline{G}\cong C_2\times C_2$ یا $C_2\times C_4$، آنگاه به طور مشابه از آنجایی که برای هر عنصر نامرکزی x، $|x^G|=|G:C_G(x)|=2$ یا 4، تساوی $G-Z(G)=\cup_{i=1}^{7}x_i^{G}$ نتیجه می‌دهد که $3|Z(G)|=14$، که تناقض است. W

حال فرض کنید $\overline{G}$ ناآبلی باشد. با توجه به لم‌های ۱.۲ و ۲.۲، $\overline{G}$ یا یک p-گروه، یا گروهی فروبنیوس یا ۲-فروبنیوس یا یک گروه ساده می‌باشد. همچنین $3\le r_{\overline{G}}(\overline{G})\le 8$. ابتدا گزاره زیر را درباره حالت p-گروه بیان می‌کنیم.

گزاره ۲.۳: اگر $\overline{G}$ یک p-گروه باشد، آنگاه هیچ گروه EPPO متناهی که در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد.

اثبات. از آنجایی که $\overline{G}$ یک p-گروه است، با توجه به لم ۱.۲، $\overline{G}$ با یکی از گروه های زیر یکریخت است:

D_8, Q_8, D_{16}, Q_{16} یا SD_{16}.

فرض کنید $\overline{G}$ با D_8 یا Q_8 یکریخت باشد و $\overline{K}$ یک زیرگروه دوری از مرتبه ۴ در $\overline{G}$ باشد. بنابراین $r_{\overline{G}}(\overline{G}-\overline{K})=r_{\overline{G}}(\overline{K})-1=2$. در نتیجه یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد: $r_G(G-K)=2$ و $r_G(K-Z(G))=5$ یا $r_G(G-K)=3$ و $r_G(K-Z(G))=4$ یا $r_G(G-K)=4$ و $r_G(K-Z(G))=3$ یا $r_G(G-K)=5$ و $r_G(K-Z(G))=2$. در حالت اول، فرض می‌کنیم $G-K=x_1^G\cup x_2^G$. بنابراین $\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}=\frac{1}{2}$. حال از آنجایی که $|C_G(x_1)|=2a_1$ و $|C_G(x_2)|=2a_2$ برای اعداد صحیح مثبت a_i، $1\le i\le 2$، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=1$. بنابراین G دارای عضوی مانند x_1 با $|C_G(x_1)|=4$ می‌باشد. این نتیجه می‌دهد که $|Z(G)|=2$ و بنابراین $|G|=16$. اما با استفاده از [13]، هیچ گروه EPPO از مرتبه ۱۶ که در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد. در حالت دوم، فرض می‌کنیم $G-K=x_1^G\cup x_2^G\cup x_3^G$ و $K-Z(G)=x_4^G\cup x_5^G\cup x_6^G\cup x_7^G$. بنابراین $\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{2}$ و

$$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}+\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{3}{8}$$

حال از آنجایی که $|C_G(x_i)|=2a_i$ برای اعداد صحیح مثبت a_i، $1\le i\le 7$، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$ و $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}=\frac{3}{4}$. با حل این دو معادله می‌توان به این نتیجه رسید که $|Z(G)|=2$ یا 3 و بنابراین $|G|=16$ یا 24. اما با استفاده از [13]، هیچ گروه EPPO از مرتبه ۱۶ و ۲۴ که در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد. در دو حالت دیگر نیز به روش مشابه به تناقض خواهیم رسید.

حال فرض کنید $\overline{G}$ با D_{16}، Q_{16} یا SD_{16} یکریخت باشد و $\overline{K}$ یک زیرگروه دوری از مرتبه ۸ در $\overline{G}$ باشد. بنابراین $r_{\overline{G}}(\overline{K})=4$ و یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد: $r_G(G-K)=3$ و $r_G(K-Z(G))=4$ یا $r_G(G-K)=4$ و $r_G(K-Z(G))=3$. در حالت اول، فرض می‌کنیم $G-K=x_1^G\cup x_2^G\cup x_3^G$. بنابراین $\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{2}$.

حال از آنجایی که $|C_G(x_1)|=2a_1$، $|C_G(x_2)|=2a_2$ و $|C_G(x_3)|=2a_3$ برای اعداد صحیح مثبت a_i، $1\le i\le 3$، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$. از این معادله نتیجه می‌گیریم که $|Z(G)|=2$ یا 3 و $|G|=32$ یا 48. اما با استفاده از [13]، هیچ گروهی از مرتبه ۳۲ و همچنین هیچ گروه EPPO متناهی از مرتبه ۴۸ با مرکز نابدیهی، در ویژگی $r_G(G-Z(G))=7$ صدق نمی‌کند. در حالت دوم، فرض می‌کنیم $K-Z(G)=x_1^G\cup x_2^G\cup x_3^G$. بنابراین $\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{7}{16}$ حال از آنجایی که $|C_G(x_1)|=2a_1$، $|C_G(x_2)|=2a_2$ و $|C_G(x_3)|=2a_3$ برای اعداد صحیح مثبت a_i، $1\le i\le 3$، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{7}{8}$. از این معادله نتیجه

می‌گیریم که $|Z(G)|=2$ و $|G|=32$، که تناقض است. W

حال دو تذکر بیان می‌کنیم که در بررسی حالت بعدی استفاده می‌شوند.

تذکر ۳.۳: فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی باشد. اگر G دارای زیرگروه ماکسیمال نرمال از اندیس عدد اول r باشد به طوری که $Z(G)\le K$، آنگاه طبق قسمت (ii) از لم ۹.۲ در [8]، برای هر $g\in G-K$، $r_G(G-K)=s(p-1)$، که s تعداد کلاس‌های تزویج از K می‌باشد که توسط خودریختی تزویج α_g القا شده توسط g از K، ثابت می‌ماند. بوضوح، $|Z(G)|\le s$ و از آنجایی که $Z(G)$ یک زیرگروه ماکسیمال نمی‌باشد، داریم

$$|Z(G)|\le s(p-1)=r_G(G-K)$$
$$<r_G(G-Z(G))$$

حال از آنجایی که $r_G(G-Z(G))=7$ و $|Z(G)|\ge 2$، داریم 3 یا $p=2$. اگر $p=2$، آنگاه $2\le|Z(G)|\le s\le 6$ و اگر $p=3$، آنگاه $2\le|Z(G)|\le s\le 3$.

تذکر ۴.۳: فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی باشد و $5\le r_{\overline{G}}(\overline{G})$. در این حالت با استفاده از تذکر ۲ در [7]، $Z(G)\le G'$. حال اگر $\overline{G}=\overline{PQ}$ که P و Q به ترتیب p-زیرگروه سیلو و q-زیرگروه سیلوی G هستند، آنگاه با استفاده از قسمت (i) از تذکر ۱ در [7]، p یا q باید $|Z(G)|$ را بشمارند. همچنین با استفاده از قسمت (ii) از تذکر ۱ در [7]، اگر p، $|Z(G)|$ را بشمارد، آنگاه $\overline{P}$ نمی‌تواند دوری باشد و با استفاده از قسمت (iii) از تذکر ۱ در [7]، اگر q، $|Z(G)|$ را بشمارد، آنگاه $\overline{Q}$ نمی‌تواند دوری باشد.

اکنون با توجه به تذکرهای فوق، به بررسی حالتی که $\overline{G}$ یک گروه فروبنیوس یا ۲-فروبنیوس باشد، می‌پردازیم.

گزاره ۵.۳: اگر $\overline{G}$ گروهی فروبنیوس یا ۲-فروبنیوس باشد، آنگاه هیچ گروه EPPO متناهی که در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد.

اثبات. با توجه به اینکه $3\le r_{\overline{G}}(\overline{G})\le 8$، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(a) $r_{\overline{G}}(\overline{G})=8$. در این حالت با توجه به لم‌های ۱.۲ و ۲.۲، $\overline{G}$ با یکی از گروه های فروبنیوس زیر یکریخت است:

$C_5^2\times_f Q_8, C_2^4\times_f C_5, C_{13}\times_f C_6,$
$C_{17}\times_f C_4, C_2^3\times_f C_7, C_4^2\times_f C_3,$
$C_2^4\times_f C_3$ یا D_{26}.

از آنجایی که $r_{\overline{G}}(\overline{G})=r_G(G-Z(G))+1$، با استفاده از لم ۳.۲ از [8]، داریم $|C_{\overline{G}}(\overline{x})|=|C_G(x)|$ برای هر $x\in G-Z(G)$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $Z(G)=1$، که یک تناقض است.

(b) $5\le r_{\overline{G}}(\overline{G})\le 7$. در این حالت $\overline{G}$ با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

$C_{11}\times_f C_5, C_{13}\times_f C_4, C_{13}\times_f C_3,$
$D_{22}, D_{18}, C_7\times_f C_3, C_5\times_f C_4,$
$D_{14}, C_3^2\times_f C_2, C_3^2\times_f C_4,$
$C_3^2\times_f Q_8$ یا S_4.

از طرفی با استفاده از تذکر ۴.۳ و لم ۱.۲، $\overline{G}$ نمی‌تواند با گروه‌های فروبنیوس زیر یکریخت باشد: $C_{11}\times_f C_5$,$C_{13}\times_f C_4$,$C_{13}\times_f C_3$, D_{22} ,D_{18} ,$C_7\times_f C_3$,$C_5\times_f C_4$ یا D_{14}.

فرض کنید $\overline{G}\cong C_3^2\times_f C_2$. در این حالت با استفاده از تذکر ۴.۳، می‌توان نتیجه گرفت که $|Z(G)|$ توسط ۳ شمرده می‌شود. حال از آنجایی که C_3^2 یک زیرگروه نرمال از اندیس ۲ در $\overline{G}$ می‌باشد، با به‌کارگیری تذکر ۳.۳، 6 یا $|Z(G)|=3$ و در نتیجه 108 یا $|G|=54$ است. اما با بررسی به‌وسیله [13]، می‌توان به این نتیجه رسید که هیچ گروه EPPO از مرتبه ۵۴ و ۱۰۸ در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق نمی‌کند.

فرض کنید $\overline{G}\cong C_3^2\times_f C_4$. در این حالت با استفاده از تذکر ۴.۳، می‌توان نتیجه گرفت که $|Z(G)|$ توسط ۳ شمرده می‌شود. با توجه به اینکه $\overline{K}=C_3^2$ یک زیرگروه نرمال در $\overline{G}$ می‌باشد، با به‌کارگیری لم ۳.۴ از [14]، $r_{\overline{G}}(\overline{K})=3$ و در نتیجه یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

$r_G(G-K)=3$ و $r_G(K-Z(G))=4$ یا
$r_G(G-K)=4$ و $r_G(K-Z(G))=3$ یا
$r_G(G-K)=5$ و $r_G(K-Z(G))=2$.

در حالت اول، فرض می‌کنیم $G-K=x_1^G\cup x_2^G\cup x_3^G$. بنابراین

$$\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{3}{4}.$$

حال از آنجایی که $|C_G(x_i)|=2a_i$ برای $1\le i\le 3$ که در آن a_i ها اعداد صحیح مثبت می‌باشند، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{3}{2}$. با حل این معادله می‌توان به این نتیجه رسید که $1\le|Z(G)|\le 2$، که تناقض است.

در حالت دوم، فرض کنید $G-K=x_1^G\cup x_2^G\cup x_3^G\cup x_4^G$ و $K-Z(G)=x_5^G\cup x_6^G\cup x_7^G$. بنابراین

$$\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}+\frac{1}{|C_G(x_4)|}=\frac{3}{4}$$

و

$$\frac{1}{|C_G(x_5)|}+\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{2}{9}.$$

حال از آنجایی که $|C_G(x_i)|=2a_i$ برای $1\le i\le 4$ و $|C_G(x_i)|=3a_i$ برای $5\le i\le 7$ که در آن a_i ها اعداد صحیح مثبت می‌باشند، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}=\frac{2}{3}$. با حل این معادلات به این نتیجه می‌رسیم که $Z(G)=1$، که تناقض است. در حالت سوم، به روش مشابه، می‌توان به این نتیجه رسید که $|Z(G)|=3$ و $|G|=108$، که در این حالت نیز به تناقض می‌رسیم.

فرض کنید $\overline{G}\cong C_3^2\times_f Q_8$. از آنجایی که $\overline{K}=C_3^2$ یک زیرگروه نرمال در $\overline{G}$ می‌باشد، با به‌کارگیری لم ۳.۴ از [14]، $r_{\overline{G}}(\overline{K})=2$ و در نتیجه یکی از حالت های زیر رخ می‌دهد:

$r_G(G-K)=4$ و $r_G(K-Z(G))=3$
$r_G(G-K)=5$ و $r_G(K-Z(G))=2$ یا
$r_G(G-K)=6$ و $r_G(K-Z(G))=1$ یا.

در حالت اول، فرض کنید $G-K=x_1^G\cup x_2^G\cup x_3^G\cup x_4^G$ و $K-Z(G)=x_5^G\cup x_6^G\cup x_7^G$. بنابراین

$$\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}+\frac{1}{|C_G(x_4)|}=\frac{7}{8}$$

و

$$\frac{1}{|C_G(x_5)|}+\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{9}.$$

حال از آنجایی که $|C_G(x_i)|=2a_i$ برای $1\le i\le 4$ و $|C_G(x_i)|=3a_i$ برای $5\le i\le 7$ که در آن a_i ها اعداد صحیح مثبت می‌باشند، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=\frac{7}{4}$ و $\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}=\frac{1}{3}$. با حل این معادلات به این نتیجه می‌رسیم که $|Z(G)|=2$ و $|G|=144$، که با استفاده از [13]، به تناقض می‌رسیم. در حالت دوم، به روش مشابه، می‌توان به این نتیجه رسید که $|G|=144$، که امکان پذیر نیست. در حالت آخر، به روش مشابه $|Z(G)|=3$ و $|G|=216$، که با استفاده از [13]، می‌توان دید که هیچ گروهی در این حالت صدق نمی‌کند.

سرانجام فرض کنید $\overline{G}\cong S_4=A_4\times_f C_2$. سه حالت زیر را داریم:

(i) $\overline{G}$ دارای سه کلاس تزویج نابدیهی می باشد که هر کدام از آنها تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج نامرکزی از G است و دارای یک کلاس تزویج نابدیهی است که اجتماع تصویر چهار کلاس تزویج باقیمانده از $G-Z(G)$ می‌باشد. در این حالت، داریم $r_G(\overline{x_1})=r_G(\overline{x_2})=r_G(\overline{x_3})=1$ و $r_G(\overline{x_4})=4$. حال از آنجایی که مرتبه نماینده کلاس‌های تزویج نامرکزی $\overline{G}$، ۳، ۴، ۴ و ۸ می‌باشد، با استفاده از لم ۳.۲ از [7] و لم ۳.۲، حالت‌های زیر را داریم:

$|C_G(x_1)|=3$، $|C_G(x_2)|=4$، $|C_G(x_3)|=4$

یا

$|C_G(x_1)|=3$، $|C_G(x_2)|=4$، $|C_G(x_3)|=8$

یا

$|C_G(x_1)|=4$، $|C_G(x_2)|=4$، $|C_G(x_3)|=8$.

در دو حالت اول، $Z(G)=1$، که تناقض است. در حالت سوم، $|Z(G)|=2$ و $|G|=48$. اما با استفاده از [13] می‌توان دید که هیچ گروه EPPO از مرتبه ۴۸ با مرکز از اندازه ۲ وجود ندارد.

(ii) $\overline{G}$ دارای دو کلاس تزویج نابدیهی می‌باشد که هر کدام از آنها تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج نامرکزی از G است و دارای دو کلاس تزویج نابدیهی دیگر است که یکی از آنها به صورت اجتماع تصویر سه کلاس تزویج از پنج کلاس تزویج باقیمانده در $G-Z(G)$ و دیگری به صورت اجتماع تصویر دو کلاس تزویج باقیمانده از $G-Z(G)$ می‌باشد. در این حالت، داریم $r_G(\overline{x_1})=r_G(\overline{x_2})=1$، $r_G(\overline{x_3})=3$ و $r_G(\overline{x_4})=2$. حال از آنجایی که مرتبه نماینده کلاس‌های تزویج نامرکزی $\overline{G}$، ۳، ۴، ۵ و ۵ می‌باشد، با استفاده از لم ۳.۲ از [7] و لم ۳.۲، حالت‌های زیر را داریم:

$|C_G(x_1)|=3$، $|C_G(x_2)|=4$ یا

$|C_G(x_1)|=3$، $|C_G(x_2)|=8$ یا

$|C_G(x_1)|=4$، $|C_G(x_2)|=4$ یا

$|C_G(x_1)|=4$، $|C_G(x_2)|=8$. در دو حالت

اول، $Z(G)=1$، که تناقض است. در دو حالت دیگر، $|Z(G)|=2$ و $|G|=48$، که تناقض است.

(iii) $\overline{G}$ دارای یک کلاس تزویج نابدیهی می‌باشد که تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج نامرکزی از G است و دارای سه کلاس تزویج نابدیهی است که هر کدام از آنها به صورت اجتماع تصویر دو کلاس تزویج از شش کلاس تزویج باقیمانده در $G-Z(G)$ می‌باشد. در این حالت، داریم $r_G(\overline{x_1})=1$، $r_G(\overline{x_2})=r_G(\overline{x_3})=r_G(\overline{x_4})=2$. حال از آنجایی که مرتبه نماینده کلاس‌های تزویج نامرکزی $\overline{G}$، ۳، ۴، ۴ و ۸ می‌باشد، با استفاده از لم ۳.۲ از [7] و لم ۳.۲، حالت‌های زیر را داریم:

$$|C_G(x_1)|=3,\quad \frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{8}$$

یا

$$|C_G(x_1)|=4,\quad \frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{8}$$

یا

$$|C_G(x_1)|=8,$$
$$\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{4}.$$

در حالت اول، $Z(G)=1$، که تناقض است. در دو حالت دیگر، $|Z(G)|=2$ و $|G|=48$، که تناقض است.

(c) $3\le r_{\overline{G}}(\overline{G})\le 4$. در این حالت $\overline{G}$ یکی از گروه‌های S_3، D_{10} یا A_4 می‌باشد.

اگر $\overline{G}\cong S_3$، آنگاه از آنجایی که $\overline{K}=C_3$ یک زیرگروه نرمال در $\overline{G}$ می‌باشد، با به‌کارگیری قسمت (ii) از لم ۹.۲ در [8]، $r_G(G-K)\ge 2$ و در نتیجه یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

$r_G(G-K)=2$ و $r_G(K-Z(G))=5$

یا $r_G(G-K)=3$ و $r_G(K-Z(G))=4$

یا $r_G(G-K)=4$ و $r_G(K-Z(G))=3$

یا $r_G(G-K)=5$ و $r_G(K-Z(G))=2$

یا $r_G(G-K)=6$ و $r_G(K-Z(G))=1$.

در حالت اول، فرض می‌کنیم $G-K=x_1^G\cup x_2^G$. بنابراین $\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}=\frac{1}{2}$. حال از آنجایی که $|C_G(x_1)|=2a_1$ و $|C_G(x_2)|=2a_2$ برای اعداد صحیح مثبت a_i، $1\le i\le 2$، داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=1$. بنابراین G دارای عضوی مانند x_1 با $|C_G(x_1)|=4$ می‌باشد. این نتیجه می‌دهد که $|Z(G)|=2$ و بنابراین $|G|=12$. اما با استفاده از [13]، هیچ گروه EPPO از مرتبه ۱۲ که در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد. در حالت دوم، فرض می‌کنیم $G-K=x_1^G\cup x_2^G\cup x_3^G$ و $K-Z(G)=x_4^G\cup x_5^G\cup x_6^G\cup x_7^G$. بنابراین

$$\frac{1}{|C_G(x_1)|}+\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{2}$$

و

$$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}+\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{3}.$$

حال از آنجایی که $|C_G(x_i)|=2a_i$ برای اعداد صحیح مثبت a_i، $1\le i\le 3$ و $|C_G(x_i)|=3a_i$ برای اعداد صحیح مثبت a_i، $4\le i\le 7$ داریم $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$ و $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}=1$. در این حالت نیز $|Z(G)|=2$ و بنابراین $|G|=12$، که تناقض است. در حالت‌های سوم و چهارم، به طریق مشابه می‌توان به این نتیجه رسید که 3 یا $|Z(G)|=2$. بنابراین 18 یا $|G|=12$ حال با توجه به اینکه هیچ گروهی از مرتبه ۱۲ و ۱۸ در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق نمی‌کند، به تناقض می‌رسیم. در حالت آخر، از آنجایی که $r_G(K-Z(G))=1$، می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x\in K-Z(G)$، $|C_G(x)|=3$. بنابراین با به‌کارگیری لم ۵.۲، K یک گروه فروبنیوس با هسته $Z(G)$ می‌باشد، که تناقض است.

اگر $\overline{G}\cong D_{10}$، آنگاه از آنجایی که $\overline{K}=C_5$ یک زیرگروه نرمال در $\overline{G}$ می‌باشد، با به‌کارگیری قسمت (ii) از لم ۹.۲ در [8]، $r_G(G-K)\ge 2$ و در نتیجه یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

$r_G(G-K)=2$ و $r_G(K-Z(G))=5$ یا $r_G(G-K)=3$ و $r_G(K-Z(G))=4$ یا $r_G(G-K)=4$ و $r_G(K-Z(G))=3$ یا $r_G(G-K)=5$ و $r_G(K-Z(G))=2$. در حالت‌های اول و دوم، به روش‌های مشابه، به این نتیجه می‌رسیم که $|Z(G)|=2$ و بنابراین $|G|=20$. اما با بررسی بوسیله [13]، هیچ گروهی از مرتبه ۲۰ در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق نمی‌کند. در حالت سوم، $|Z(G)|=1$، که تناقض است. در حالت آخر، از آنجایی که $r_G(K-Z(G))=2$، می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x\in K-Z(G)$، $|C_G(x)|=5$. بنابراین با به‌کارگیری لم ۵.۲، K یک گروه فروبنیوس با هسته $Z(G)$ می‌باشد، که تناقض است.

اگر $\overline{G}\cong A_4$، آنگاه از آنجایی که $\overline{K}=C_2^2$ یک زیرگروه نرمال از اندیس ۳ در $\overline{G}$ می‌باشد، با استفاده از تذکر ۳.۳،
3 یا $|Z(G)|=2$. بنابراین 36 یا $|G|=24$. اما با استفاده از [13]، هیچ گروه EPPO از مرتبه‌های ۲۴ و ۳۶ در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق نمی‌کند. W

گزاره ۶.۳: اگر $\overline{G}$ یک گروه ساده باشد، آنگاه هیچ گروه EPPO متناهی که در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق کند، وجود ندارد.

اثبات. از آنجایی که $\overline{G}$ یک گروه ساده است، با توجه به لم‌های ۱.۲ و ۲.۲، $\overline{G}$ با یکی از گروه‌های $PSL(2,7)$، A_6 یا A_5 یکریخت است. اگر $\overline{G}$ با $PSL(2,7)$ یکریخت باشد، آنگاه $r_{\overline{G}}(\overline{G})=6$ و $\overline{G}$ حداقل سه کلاس تزویج

نابدیهی مانند $\overline{x_1}^{\overline{G}}$، $\overline{x_2}^{\overline{G}}$ و $\overline{x_3}^{\overline{G}}$ دارد که هر یک از آنها تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج از $G-Z(G)$ است. بنابراین با توجه به لم ۳.۲ از [7]، $r_G(\overline{x_1})=r_G(\overline{x_2})=r_G(\overline{x_3})=1$. حال از آنجایی که مرتبه مرکزساز نماینده کلاس‌های تزویج نابدیهی از $\overline{G}$، برابر با ۳، ۴، ۷، ۷ و ۸ می‌باشد، با به‌کارگیری لم ۳.۲، داریم $Z(G)=1$، که تناقض است.

اگر $\overline{G}$ با A_6 یکریخت باشد، آنگاه $r_{\overline{G}}(\overline{G})=7$ و $\overline{G}$ دقیقاً پنج کلاس تزویج نابدیهی دارد مانند $\overline{x_1}^{\overline{G}}$، $\overline{x_2}^{\overline{G}}$، $\overline{x_3}^{\overline{G}}$، $\overline{x_4}^{\overline{G}}$ و $\overline{x_5}^{\overline{G}}$ دارد که هر یک از آنها تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج از $G-Z(G)$ است. بنابراین با توجه به لم ۳.۲ از [7]،

$$r_G(\overline{x_1})=r_G(\overline{x_2})=r_G(\overline{x_3})=r_G(\overline{x_4})=r_G(\overline{x_5})=1.$$

حال از آنجایی که مرتبه مرکزساز نماینده کلاس‌های تزویج نابدیهی از $\overline{G}$، برابر با ۴، ۵، ۵، ۸، ۹ و ۹ می‌باشد، با به‌کارگیری لم ۳.۲، داریم $Z(G)=1$، که تناقض است.

سرانجام فرض کنید $\overline{G}$ با A_5 یکریخت باشد. در این صورت $r_{\overline{G}}(\overline{G})=5$ و سه حالت زیر را داریم:

(i) $\overline{G}$ دارای سه کلاس تزویج نابدیهی می‌باشد که هر کدام از آنها تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج نامرکزی از G است و دارای یک کلاس تزویج نابدیهی است که اجتماع تصویر چهار کلاس تزویج باقیمانده از $G-Z(G)$ می‌باشد. در این حالت، داریم $r_G(\overline{x_1})=r_G(\overline{x_2})=r_G(\overline{x_3})=1$ و $r_G(\overline{x_4})=4$. حال از آنجایی که مرتبه نماینده کلاس‌های تزویج نامرکزی $\overline{G}$، ۳، ۴، ۵ و ۵ می‌باشد. بنابراین با استفاده از لم ۳.۲ از [7] و لم ۳.۲، حالت‌های زیر را داریم:

$|C_G(x_1)|=3$، $|C_G(x_2)|=4$، $|C_G(x_3)|=5$

یا

$|C_G(x_1)|=4$، $|C_G(x_2)|=5$، $|C_G(x_3)|=5$

یا

$|C_G(x_1)|=3$، $|C_G(x_2)|=5$، $|C_G(x_3)|=5$.

در تمامی این حالت‌ها $Z(G)=1$، که تناقض است.

(ii) $\overline{G}$ دارای دو کلاس تزویج نابدیهی می‌باشد که هر کدام از آنها تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج نامرکزی از G است و دارای دو کلاس تزویج نابدیهی دیگر است که یکی از آنها به صورت اجتماع تصویر سه کلاس تزویج از پنج کلاس تزویج باقیمانده در $G-Z(G)$ و دیگری به صورت اجتماع تصویر دو کلاس تزویج باقیمانده از $G-Z(G)$ می‌باشد. در این حالت، داریم $r_G(\overline{x_1})=r_G(\overline{x_2})=1$، $r_G(\overline{x_3})=3$ و $r_G(\overline{x_4})=2$. حال از آنجایی که مرتبه نماینده کلاس‌های تزویج نامرکزی $\overline{G}$، ۳، ۴، ۵ و ۵ می‌باشد. بنابراین با استفاده از لم ۳.۲ از [7] و لم ۳.۲، حالت‌های زیر را داریم:

$|C_G(x_2)|=4$، $|C_G(x_1)|=3$ یا

$|C_G(x_2)|=5$، $|C_G(x_1)|=3$ یا

$|C_G(x_2)|=5$، $|C_G(x_1)|=4$ یا

$|C_G(x_2)|=5$، $|C_G(x_1)|=5$.

در سه حالت اول، $Z(G)=1$، که تناقض است. در حالت آخر،

$|C_G(x_1)|=|C_G(x_2)|=5$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_3)|}+\frac{1}{|C_G(x_4)|}=\frac{1}{3}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_5)|}+\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{4}$

یا

$|C_G(x_1)|=|C_G(x_2)|=5$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_3)|}+\frac{1}{|C_G(x_4)|}=\frac{1}{4}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_5)|}+\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{3}$.

در هر دو حالت، $Z(G)=1$، که تناقض است.

(iii) $\overline{G}$ دارای یک کلاس تزویج نابدیهی می‌باشد که تصویر دقیقاً یک کلاس تزویج نامرکزی از G است و دارای سه کلاس تزویج نابدیهی است که هر کدام از آنها به صورت اجتماع تصویر دو کلاس تزویج از شش کلاس تزویج باقیمانده در $G-Z(G)$ می‌باشد. در این حالت، داریم $r_G(\overline{x_1})=1$، $r_G(\overline{x_2})=r_G(\overline{x_3})=r_G(\overline{x_4})=2$. حال از آنجایی که مرتبه نماینده کلاس‌های تزویج نامرکزی $\overline{G}$، ۳، ۴، ۵ و ۵ می‌باشد، با استفاده از لم ۳.۲ از [7] و لم ۳.۲، حالت‌های زیر را داریم:

$|C_G(x_1)|=3$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{4}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}=\frac{1}{5}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{5}$

یا

$|C_G(x_1)|=4$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{3}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}=\frac{1}{5}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{5}$

یا

$|C_G(x_1)|=5$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{1}{3}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_4)|}+\frac{1}{|C_G(x_5)|}=\frac{1}{4}$ ،

$\frac{1}{|C_G(x_6)|}+\frac{1}{|C_G(x_7)|}=\frac{1}{5}$.

در حالت اول و سوم، $Z(G)=1$، که تناقض است. در حالت دوم، $|Z(G)|=2$ و $|G|=120$. اما با استفاده از [13]، هیچ گروه EPPO از مرتبه ۱۲۰ در شرط $r_G(G-Z(G))=7$ صدق نمی‌کند. W

اکنون با استفاده از گزاره های ۲.۳، ۵.۳ و ۶.۳، اثبات قضیه ۱.۱ کامل می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله گروه‌های EPPO متناهی با هفت کلاس تزویج نامرکزی در دو حالتی که مرکز گروه بدیهی یا نابدیهی باشد، بررسی و رده بندی شده‌اند.

فهرست منابع

[1] W. J. Shi. A class of special minimal normal subgroups (Chinese). Journal of Southwest Teachers College 9: 9-13 (1984)

[2] M. Shahryari, M. A. Shahabi. Subgroups which are the union of three conjugacy classes. Journal of Algebra 207:326-332 (1998)

[3] U. Riese, M. A. Shahabi. Subgroups which are the union of four conjugacy classes. Communications in Algebra 29:695-701 (2001)

[4] G. Qian, W. Shi, X. You. Conjugacy classes outside a normal subgroup. Communications in Algebra 32:4809-4820 (2004)

[5] X. You, Z. Liu, W. Zhu. Finite groups in which there are at most four noncentral conjugacy classes. International Conference on Multimedia Technology (ICMT) (2011)

[6] M. Rezaei, Z. Foruzanfar. Finite groups with five non-central conjugacy classes. Journal of Algebraic Systems 4:85-95 (2017)

[7] M. Rezaei, Z. Foruzanfar. Finite groups with six non-central conjugacy classes. Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science 43:1665-1669 (2019)

[8] A.V. Lopez, J. V. Lopez. Classification of finite groups according to the number of conjugacy classes. Israel Journal of Mathematics 51:305-338 (1985)

[9] W. J. Shi and H. Lv. A Note of CP_2 Groups. Communications in Mathematics and Statistics 5:447-451 (2017)

[10] M. Suzuki. On a class of doubly transitive groups. Annals of Mathematics 75:105-145 (1962)

[11] R. Brandl. Finite groups all of whose elements are of prime power order. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana A(5) 18:491-493 (1981)

[12] W. J. Shi, W. Z. Yang. The finite groups all of whose elements are of prime power order Journal of Yunnan Educational College 1:2-10 (1986)

[13] The GAP Group, GAP Groups. Algorithms and Programming. Version 4.11.0, (2020) http://www.gap-system.org.

[14] M. Fang, P. Zhang. Finite groups with graphs containing no triangles. Journal of Algebra 264:613-619 (2003)