



مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی با تابع غیر خطی از متغیر برونزا و ناکارایی فنی پویا

بهاره فیضی^{۱*}، احمد پوردرویش^۲

^(۱) گروه ریاضی، واحد چالوس، دانشگاه آزاد اسلامی، چالوس، ایران.

^(۲) دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۲۳

چکیده

در این مقاله، ما بر روی مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی جدیدی براساس تابع غیرخطی از متغیر برونزا، در داده‌های تابلویی متمرکز شده‌ایم. در مدل‌های مالی کلاسیک، ناکارایی فنی به صورت ناهمبسته در نظر گرفته می‌شود، که اغلب در موارد تجربی این فرض صدق نمی‌کند. در مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی مدنظر، خطای مرکب از دو جزء، خطای آماری و ناکارایی فنی تشکیل شده است، به طوری که ناکارایی فنی به صورت خودهمبسته، فرض می‌شود. ناکارایی فنی خودهمبسته را می‌توان به این صورت تفسیر نمود که ناکارایی فنی شرکت در زمان حال، بستگی به میزان ناکارایی فنی قبلی شرکت و ناکارایی فعلی آن دارد. روش نیمه‌پارامتری برای برآورد تابع غیرخطی متغیر برونزا، از طریق روند دو مرحله‌ای به صورت بسط سری تیلور و فاکتور تعدیل‌گر ناپارامتری، محاسبه شده است. برای برآورد پارامترهای مدل، نیز از رویکرد حداکثر انتظار استفاده می‌شود و عملکرد برآورد توسط شبیه‌سازی مونت کارلو بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی، حداکثر انتظار، برآورد نیمه‌پارامتری، داده‌های تابلویی، ناکارایی فنی.

۱- مقدمه

یکی از جنبه‌های کاربرد مدل‌های آماری، در داده‌های اقتصادی می‌باشد. در میان مدل‌های اقتصادی، مدل مرزی تصادفی به‌طور گسترده‌ای برای اندازه‌گیری کارایی اقتصادی استفاده شده است، که توسط [۱] و [۲] ارائه و گسترش داده شده است. ایده اصلی در مدل‌های مرزی، معرفی عبارت خطای دوطرفه جمع‌پذیر می‌باشد که شامل خطای اندازه‌گیری دوطرفه و ناکارایی فنی یک‌طرفه شرکت است.

به عنوان نمونه از برخی زمینه‌های کاربردی مدل‌های مرزی تصادفی در متون، می‌توان کارایی بانک‌ها [۳] و [۴] و کارایی فنی سه نوع محصول برنج در بنگلادش [۵] را نام برد. پیت و لی [۶] و اسمیت و سیکلس [۷] از داده‌های تابلویی در آنالیز مرزی استفاده نمودند و ناکارایی فنی را زمان-ناوردا^۲ ناوردا^۲ تحت دو مبحث مدل‌های اثرات ثابت و اثرات تصادفی در نظر گرفتند. لای و کومباکار^۳ [۸] مدل مرزی تصادفی تابلویی را با ناکارایی فنی پویا، معرفی و پارامترهای مدل را با استفاده از سه رویکرد مختلف، برآورد نمودند. اخیراً، فیضی و پوردرویش [۹] نیز مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی جدیدی را برای داده‌های تابلویی معرفی نمودند، به طوری که تابع خودبازگشتی مدل را غیرخطی و ناکارایی فنی را پویا در نظر گرفتند.

در مدل‌های مرزی تصادفی، توزیع خطای اندازه‌گیری را عموماً به صورت نرمال در نظر می‌گیرند، از این‌رو نوح و کیلگوم [۱۰] سه مدل مرزی تصادفی جدید، بدون توجه به فرض توزیع ناکارایی، معرفی نمودند. نتایج حاصل از برآورد پارامترها، حاکی از حساسیت ناچیز پارامترها به توزیع ناکارایی فنی می‌باشد. هم‌چنین کارایی مدل

مرزی تصادفی را در داده‌های بیمارستان‌های محلی ژاپن نشان دادند.

مدل‌های آماری از قبیل مدل‌های رگرسیون و سری زمانی اغلب تحت فرض خطی بودن به کار برده می‌شوند. اما در بسیاری از شرایط واقعی، فرض خطی بودن نقض می‌شود. در این موارد کاربرد مدل‌های غیرخطی به وضوح مشاهده می‌شود. بسیاری از پدیده‌های تجربی در علوم مختلف، مانند زیست‌شناسی، پزشکی، مهندسی، مالی و اقتصادی دارای ساختار غیرخطی می‌باشند. [۱۱] یک مدل شبکه عصبی خودبازگشتی غیرخطی با متغیر برون‌زا (NARX^۴) برای مدیریت و کنترل مصرف آب و توسعه آب‌های کم‌عمق معرفی نمودند. تیلاب و همکاران [۱۲] یک شبکه عصبی خودبازگشتی غیرخطی، شبکه عصبی بازگشتی با ساختار خودبازگشتی میانگین متحرک را ارائه و بر روی ظرفیت این شبکه‌ها در پیش‌بینی سری‌های زمانی غیرخطی تمرکز نمودند. پال و شانکر [۱۳] مدل مرزی تصادفی در داده‌های تابلویی با اثرات کارایی را مورد بررسی قرار دادند و توجه ویژه‌ای به ناهمگونی زمان-ناوردا نمودند. آن‌ها با استفاده از رویکرد کمترین مربعات غیرخطی، برآوردها را به دست آورده و در بررسی کارایی مدل مدنظر از داده‌های تابلویی کشاورزان هندی استفاده نمودند.

یو و همکاران [۱۴] یک مدل خودبازگشتی غیرخطی نامعلوم را مدنظر قرار داده و با استفاده از روش نیمه‌پارامتری شامل ترکیبی از برآوردگر رگرسیون پارامتری و تعدیل‌گر ناپارامتری، برآورد پارامترها را به دست آوردند. آن‌ها، در ابتدا یک فرض خام برای تابع نامعلوم در نظر گرفته و تقریب اولیه پارامتری را توسط ضریب ناپارامتری تعدیل نمودند. فرنوش و همکاران [۱۵] مدل غیرخطی $AR^5(1)$ با خطاهای وابسته و مستقل را بسط و

^۴ Non-linear autoregressive exogenous

^۵ Autoregressive

^۲ Time-invariant

^۳ Lai and Kumbhakar

بماند. با استفاده از روش نیمه پارامتری تابع نامعلوم متغیر برونزا را برآورد می‌نماییم که در آن تقریب بسط سری تیلور را با استفاده از ضریب تعدیل‌گر، بهبود می‌بخشیم. برای برآورد پارامترهای مدل نیز روش برآورد حداکثر-انتظار (EM^{10}) در نظر گرفته می‌شود.

ساختار مقاله به شرح زیر می‌باشد. در بخش ۲، مدل مرزی تصادفی غیرخطی و مدل تبدیل‌یافته را معرفی می‌نماییم. بحث‌هایی پیرامون برآورد نیمه پارامتری تابع نامعلوم متغیر برونزا و برآورد حداکثر درستی‌نمایی (ML^{11}) پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم EM در بخش ۳ ارائه شده است. پیش‌بینی ناکارایی فنی مدل مذکور در بخش ۴ محاسبه شده است. در پایان در فصل ۵، عملکرد روش‌های برآورد مدل با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو^{۱۲} ارائه شده است.

۲- مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی غیرخطی

در سال‌های اخیر، به منظور افزایش کارایی مدل‌ها در شاخه‌های مخلف علوم به ویژه در علوم کاربردی، اقتصادسنجی و مطالعات مالی، ترکیبی از روش‌های پارامتری و توابع غیرخطی به کار برده شده است.

ما در این بخش، مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی با متغیر برونزای غیرخطی جدیدی را در داده‌های تابلویی معرفی می‌کنیم. با استفاده از داده‌های تابلویی، فرصتی برای بررسی رفتار کارایی فنی هر شرکت برحسب زمان ایجاد می‌شود. مدل جدید به صورت زیر ارائه می‌شود

$$Y_{it} = \beta Y_{it-1} + m(X_{it}) + v_{it} \quad u_{it}, \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T,$$

که در آن i بیانگر هر واحد تولیدی، t شاخص زمان، Y_{it} بیانگر خروجی تولیدی i -ام در زمان t -

گسترش دادند و برای تابع غیرخطی به جای فرض خام اولیه، از بسط سری تیلور استفاده نمودند.

با توجه به محدودیت فرض نرمال در مدل‌های خودبازگشتی، بسیاری از محققین در صدد برآزش مدل‌های خودبازگشتی با نوآوری‌های غیرنرمال برای داده‌های واقعی برآمدند. مدل نرمال چوله (SN^Y) یکی از مطلوب‌ترین جایگزین‌ها برای توزیع نوآوری‌ها می‌باشد [۱۶، ۱۷ و ۱۸]. پارامترهای مدل خودبازگشتی، زمانی که خطاها از توزیع آمیخته مقیاسی از توزیع SN می‌باشند، توسط [۱۹] مورد بررسی قرار گرفت که از بسط روش حداکثر شرطی انتظار^۸ استفاده نمودند. حاج رجبی و فلاح [۲۰] مدل AR نیمه پارامتری غیرخطی با نوآوری‌های چوله-متقارن^۹ رت معرفی نمودند و برآورد پارامترها را با الهام از دستاوردهای [۱۴] به دست آوردند.

در بسیاری از مدل‌های مرزی تصادفی تابلویی، اغلب مولفه ناکارایی در طول زمان مستقل فرض می‌شود، اگرچه وابستگی زمانی در بین مولفه‌های ناکارایی قابل چشم‌پوشی نمی‌باشد. علاوه بر این، علی‌رغم متون گسترده پیرامون مدل‌های ناپارامتری در علوم اقتصادی، متاسفانه توجه بسیار کمی به برآوردهای ناپارامتری در حیطه داده‌های تابلویی شده است. با توجه به تمام نقایص فوق، در این مقاله، به منظور بررسی کارایی مدل‌های آماری در علوم اقتصادی، قصد معرفی یک مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی غیرخطی جدیدی در داده‌های تابلویی را داریم، به طوری که مولفه ناکارایی شرکت‌ها را نیز با یک ساختار پویا در نظر می‌گیریم. از آنجایی که شرکت‌ها در یک محیط رقابتی، به طور مداوم با عملکرد قبلی خودشان و رقیبانشان مورد مقایسه قرار می‌گیرند، لذا دور از ذهن به نظر می‌رسد که ناکارایی شرکت در فواصل زمانی مختلف ثابت باقی

⁶ Innovation

⁷ Skew-Normal

⁸ Expectation Conditional Maximization

⁹ Skew-Symmetric

¹⁰ Expectation-Maximization

¹¹ Maximum Likelihood

¹² Monte Carlo

خودهمبستگی مذکور اکنون توسط v_{it} ارائه می‌گردد. با معرفی $v_{it} = \alpha v_{it-1} + m(X_{it})$ و $u_{it} = v_{it}$ آن‌گاه

$$Y_{it} = (\alpha + \beta)Y_{it-1} - \alpha\beta Y_{it-2} + m(X_{it}) - \alpha m(X_{it-1}) + \varepsilon_{it} \quad (۳)$$

میانگین، واریانس و خودهمبستگی ε_{it} به ترتیب به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$E(\varepsilon_{it}) = \mu_\varepsilon = E(v_{it} - u_{it}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_u$$

$$Var(\varepsilon_{it}) = (1 + \alpha^2)\sigma_v^2 + \left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\sigma_u^2.$$

$$Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}) = \begin{cases} \alpha\sigma_v^2, & |i - s| = 1 \\ (1 + \alpha^2)\sigma_v^2 + \left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\sigma_u^2, & i = s \\ 0, & |i - s| > 1 \end{cases}$$

خودهمبستگی $\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}$ نیز به صورت زیر به دست می‌آید

$$Corr(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}) = \begin{cases} \frac{-\alpha\sigma_v^2}{(1 + \alpha^2)\sigma_v^2 + \left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\sigma_u^2}, & |i - s| = 1 \\ 1, & i = s \\ 0, & |i - s| > 1 \end{cases}$$

فرایند $\{\varepsilon_{it}\}$ به صورت منفی با مقادیر پیشین خود، همبستگی دارد و به صورت پیچشی از متغیرهای تصادفی نرمال و نیم‌نرمال می‌باشد.

به منظور به کارگیری روش حداکثر درستنمایی برای برآورد پارامترهای مدل، نیاز است برای هر i, t توزیع توأم $\mathbf{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{iT})'$ را به دست آوریم.

فرض کنید $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{iT})'$ و $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{iT})'$

بنابراین بردار خطاهای مرکب $\mathbf{\varepsilon}_i$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد

ام، $m(\cdot)$ تابع نامعلوم اما هموار و X_{it} بردار متغیرهای برون‌زا می‌باشد. در مدل (۱)، v_{it} خطای تصادفی دوطرفه از توزیع نرمال با پارامترهای $(0, \sigma_v^2)$ می‌باشد.

ما ناکارایی فنی یک‌طرفه u_{it} را با یک ساختار پویا از فرایند AR(1) در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، ناکارایی فنی شرکت در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند

$$u_{it} = \alpha u_{it-1} + u_{it}, \quad t = 1, \dots, T,$$

که در آن α ضریب خودبازگشتی و u_{it} خطای تصادفی نامنفی از توزیع نیم‌نرمال به صورت $N^+(0, \sigma_u^2)$ می‌باشد. علاوه بر این، برای هر i و u_{it} و u_{is} از یکدیگر مستقل و $(i \neq s)$ $u_{i0} \sim N^+(0, \frac{\sigma_u^2}{1-\alpha^2})$ می‌باشد. بنابراین، عبارت خطای مرکب $v_{it} - u_{it}$ چوله به چپ می‌باشد.

برای بررسی ایستایی فرایند، لازم است قید $\alpha \in (0, 1)$ را در مدل لحاظ نماییم. لذا، برای هر (i, t) $u_{it} > 0$ می‌باشد که دلالت بر همبستگی مثبت مولفه‌های ناکارایی با زمان پیشین خود دارد. با توجه به ایستایی فرایند داریم

$$E(u_{it}) = \alpha E(u_{it-1}) + E(u_{it})$$

و لذا

$$E(u_{it}) = \frac{E(u_{it})}{1 - \alpha},$$

$$E(u_{it}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_u$$

به منظور تسهیل محاسبات، خودهمبستگی در u_{it} را می‌توان با استفاده از تبدیل (۱) به صورت زیر حذف نمود.

$$Y_{it} - \alpha Y_{it-1} = \beta Y_{it-1} - \alpha\beta Y_{it-2} + m(X_{it}) - \alpha m(X_{it-1}) + v_{it} - \alpha v_{it-1} - u_{it} \quad (۳)$$

یکی از مزایای این تبدیل، حذف عبارت u_{it} و متعاقبا حذف خودهمبستگی u_{it} می‌باشد.

$$\begin{aligned} & \dots E(e^{v_{it}r_{it}})E(e^{-r' u_i}) = \\ & \exp\left\{\frac{(r_1 - ar_2)^2 + (r_2 - ar_3)^2 + r_1^2}{2}\sigma_v^2\right\} \\ & \exp\left\{\frac{(r_1^2 + r_2^2 + r_1^2)\sigma_u^2}{2}\right\} \frac{\Phi_P(-\Sigma_u^2 r')}{\Phi_P(0)} \\ & = \exp\left\{\frac{1}{2}r'\Sigma r\right\} \frac{\Phi_P\left(-\frac{1}{\Sigma_u^2}r'\right)}{\Phi_P(0)} \\ & = 2^T \exp\left\{\frac{1}{2}r'\Sigma r\right\} \Phi_P\left(\frac{1}{\Sigma_u^2}r'\right), \end{aligned}$$

که در واقع تابع MGF توزیع MSN است و اثبات کامل می‌گردد.

۳- برآورد پارامترهای مدل

در این بخش، بر روی برآورد تابع نامعلوم متغیر برونزا و پارامترهای مدل متمرکز می‌شویم. برای برآورد تابع $m(\cdot)$ ترکیبی از روش برآورد پارامتری و تعدیل گر ناپارامتری و برای پارامترهای مدل روش EM را در نظر می‌گیریم.

۳.۱. برآورد تابع برونزا

برای برآورد تابع نامعلوم $m(\cdot)$ به روشی مشابه با [۱۵]، روندی را مدنظر قرار می‌دهیم که شامل دو مرحله می‌باشد و تقریب پارامتری اولیه $g(x, \hat{\gamma})$ توسط ضریب تعدیل گر $\xi(x)$ اصلاح می‌شود. با استفاده از معیار برازش L_2 تعدیل گر $\xi(x)$ را برآورد می‌نماییم.

فرض کنید $g(X_{it}, \hat{\gamma})$ بسط سری تیلور $m(X_{it})$ باشد و به صورت زیر نشان داده شود

$$g(X_{it}, \gamma) = m(x) + m'(x)(X_{it} - x) + \frac{1}{2}m''(x)(X_{it} - x)^2,$$

که در آن $\gamma = (m(x), m'(x), \frac{1}{2}m''(x))$ میانگین نمونه می‌تواند یک گزینه مناسب برای x باشد.

فرض کنید $Z_{it} = (1, (X_{it} - x), (X_{it} - x)^2)$ آن‌گاه $g(X_{it}, \gamma) = \gamma' Z_{it}$ می‌باشد.

$$\varepsilon_i = Qv_i \quad u_i = v_i \quad u_i$$

که در آن $v_i = Qv_i$ یک بردار $T \times 1$ بعدی می‌باشد و

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

یک ماتریس $T \times T$ است. ماتریس Q را ماتریس تبدیلات شبه تفاضل^{۱۳} می‌نامیم.

گزاره ۱: اگر $u_{it} \sim v_{it} \sim N(0, \sigma_v^2)$ و $\varepsilon_{it} = v_{it} + \alpha v_{it-1}$ و $u_{it} \sim N^+(0, \sigma_u^2)$ آن‌گاه بردار خطاهای مرکب ε_i از مدل تبدیل‌یافته دارای توزیع نرمال چوله چندمتغیره (MSN^{14}) می‌باشد. تابع احتمال توام ε_i به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$f_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i, \theta) = 2^T \phi_T(\varepsilon_i, 0_T, \Sigma) \Phi_T(\lambda' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_i), \quad (4)$$

که $\Sigma_v = \sigma_v^2 Q Q'$ و $\Sigma = \Sigma_v + \Sigma_u$ $\Sigma_u = \sigma_u^2 I_T$ $\lambda = \frac{-1}{\Sigma_v^2} \frac{1}{\Sigma_u^2}$ بیانگر ماتریس یک $T \times T$ و 0_T یک بردار صفر $T \times 1$ می‌باشد. تابع $\Phi_T(\cdot, \mu, \Sigma)$ تابع چگالی احتمال نرمال T -متغیره با بردار میانگین μ و ماتریس کواریانس Σ و $\Phi_T(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد T -متغیره می‌باشد.

اثبات: توزیع ε_i با استفاده از تابع مولد گشتاور (MGF^{۱۵}) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon_i}(r) &= E(e^{r'\varepsilon_i}) = \\ & E(e^{r_1 \varepsilon_{i1} + r_T \varepsilon_{iT}}) \\ &= E(e^{v_{i1}(r_1 - ar_2)}) E(e^{v_{i2}(r_2 - ar_3)}) \end{aligned}$$

¹³ Quasi-difference transformation

¹⁴ Multivariate Skew Normal

¹⁵ Moment Generating Function

$$e_{it} = Y_{it} - \beta Y_{it-1} - m(X_{it}) + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u}{1-\alpha}$$

$$e_{it-1} = Y_{it-1} - \beta Y_{it-2} - m(X_{it-1}) + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u}{1-\alpha}$$

اکنون با توجه به این نکته که خطاهای مدل مقادیر

کوچکی هستند، آن‌گاه داریم

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it}-x}{h_n}\right) m(X_{it}) g(X_{it}, \hat{\nu}) \approx \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it}-x}{h_n}\right) \left[Y_{it} - \beta Y_{it-1} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u}{1-\alpha} \right] g(X_{it}, \hat{\nu}),$$

و

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n}\right) m(X_{it-1}) g(X_{it-1}, \hat{\nu}) \approx \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n}\right) \left[Y_{it-1} - \beta Y_{it-2} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u}{1-\alpha} \right] g(X_{it-1}, \hat{\nu}).$$

برآوردگر ناپارامتری $\xi(x)$ به صورت $\xi(x) = \frac{A_1}{A_2}$

نشان داده می‌شود، که در آن

$$A_1 = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it}-x}{h_n}\right) \left[Y_{it} - \beta Y_{it-1} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u}{1-\alpha} \right] g(X_{it}, \hat{\nu}) + K\left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n}\right) \left[Y_{it-1} - \beta Y_{it-2} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u}{1-\alpha} \right] g(X_{it-1}, \hat{\nu}).$$

$$A_2 = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it}-x}{h_n}\right) g^2(X_{it}, \hat{\nu}) + K\left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n}\right) g^2(X_{it-1}, \hat{\nu})$$

برآوردگر $\tilde{m}(x)$ به صورت $\tilde{m}(x) = \frac{m(\cdot)}{g(x, \hat{\nu}) \xi(x)}$ به دست می‌آید.

بردار پارامتر γ با استفاده از روش میانگین مربعات

خطا به صورت زیر برآورد می‌شود

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (Y_{it} - (\alpha + \beta)Y_{it-1} - \alpha\beta Y_{it-2} - \gamma'Z_{it} + \alpha\gamma'Z_{it-1} - \mu_\varepsilon)^2 \quad (5)$$

و تقریب اولیه به صورت $g(x, \hat{\nu}) \xi(x)$ تعدیل

می‌شود. برای مدل تبدیل یافته (۲)، معیار برازش

L_2 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$q(x, \xi) = \frac{1}{h_n} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it}-x}{h_n}\right) \{m(X_{it}) - g(X_{it}, \hat{\nu}) \xi\}^2 + \frac{1}{h_n} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n}\right) \{m(X_{it-1}) - g(X_{it-1}, \hat{\nu}) \xi\}^2,$$

که در آن K و n بر تابع هسته^{۱۶} و پهنای باند^{۱۷}

دلالیت دارد. برآوردگر $\hat{\xi}(x)$ توسط حداقل کردن

$q(x, \xi)$ برحسب $\xi(x)$ به دست می‌آید و داریم

$$\hat{\xi}(x) = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \frac{K\left(\frac{X_{it}-x}{h_n}\right) m(X_{it}) g(X_{it}, \hat{\nu})}{B} + \frac{K\left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n}\right) m(X_{it-1}) g(X_{it-1}, \hat{\nu})}{B}}{B} \quad (6)$$

که در آن

$$B = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{it}-x}{h_n}\right) g^2(X_{it}, \hat{\nu}) + K\left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n}\right) g^2(X_{it-1}, \hat{\nu}).$$

رابطه (۶) شامل توابع نامعلوم

$(m(X_{it}), m(X_{it-1}))$ می‌باشد، که می‌تواند به

صورت زیر بیان شود

$$m(X_{it}) = Y_{it} - \beta Y_{it-1} - v_{it} + u_{it},$$

$$m(X_{it-1}) = Y_{it-1} - \beta Y_{it-2} - v_{it-1} + u_{it-1}.$$

با تعریف

¹⁶ Kernel Function

¹⁷ Bandwidth

۳.۲. برآورد پارامترهای مدل

یک نمایش برداری از (۳) را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \mathbf{Y}_{iT} - (\alpha + \beta)\mathbf{Y}_{iT-1} + \alpha\beta\mathbf{Y}_{iT-2} \\ &\quad \mathbf{m}_{iT} + \alpha\mathbf{m}_{iT-1}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{iT} &= (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{iT})', \\ \mathbf{Y}_{iT-1} &= (0, Y_{i1}, \dots, Y_{iT-1})' \\ \mathbf{Y}_{iT-1} &= (0, Y_{i1}, \dots, Y_{iT-1})' \\ \mathbf{m}_{iT} &= (m(X_{i1}), \dots, m(X_{iT}))' \\ \mathbf{m}_{iT-1} &= (0, m(X_{i1}), \dots, m(X_{iT-1}))' \end{aligned}$$

می‌باشد.

با در نظر گرفتن $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_{iT})_{i=1, \dots, n}$ و (۴)، تابع

$$n(L(\mathbf{Y}, \theta)) = \sum_{i=1}^n \ln(f_{\boldsymbol{\varepsilon}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \theta)) = \quad (۷)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \ln \left[2^T \phi_T(\boldsymbol{\varepsilon}_i, 0, \Sigma) \Phi_T \left(\lambda' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_i \right) \right] \\ &= \frac{nT}{2} \ln 2 - \frac{nT}{2} \ln \pi - \frac{n}{2} \ln |\Sigma| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_i' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=1}^n \ln \Phi_T(\lambda' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_i), \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \mathbf{Y}_{iT} - (\alpha + \beta)\mathbf{Y}_{iT-1} + \alpha\beta\mathbf{Y}_{iT-2} \\ &\quad \mathbf{m}_{iT} + \alpha\mathbf{m}_{iT-1}. \end{aligned}$$

به دلیل پیچیدگی تابع لگاریتم درست‌نمایی، مشتق‌های (۷)، دارای فرم بسته‌ای نمی‌باشند و لذا محاسبه برآوردگرهای ML پارامترهای $\theta = (\sigma_u, \sigma_v, \alpha, \beta)$ دشوار می‌باشد. از این‌رو، از الگوریتم EM در محاسبه برآوردگرهای ML استفاده خواهیم نمود.

قضیه ۱. یک نمایش تصادفی از بردار خطای مرکب به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \stackrel{d}{=} W_0 + W_1, \quad (۸)$$

که در آن $W_0 \sim N_T^+(0_T, \Sigma_u)$ و $W_1 \sim N_T(0_T, \Sigma_v)$ (توزیع‌های نیم‌نرمال T -متغیره و نرمال T -متغیره به ترتیب با نمادهای $N_T^+(\cdot, \cdot)$ و $N_T(\cdot, \cdot)$ نشان داده می‌شوند)، W_0 و W_1 مستقل می‌باشند. قرار دهید

$$\delta = (I_T + \lambda' \lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\varepsilon}_i, W_0}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, w_0) &= \left(\frac{1}{\pi^T} \right) \left| \Sigma_v \right|^{-\frac{1}{2}} \left| \Sigma_u \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (۹) \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}_i \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i + (w_0 \quad \delta' \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i)' \Sigma_u^{-1} (I_T + \lambda' \lambda) (w_0 \quad \delta' \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i)] \right\}. \end{aligned}$$

اثبات: $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ در (۸) دارای توزیع نرمال چوله چندمتغیره می‌باشد که به راحتی با استفاده از تابع MGF اثبات می‌شود و توزیع توام $(\boldsymbol{\varepsilon}_i, W_0)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f_{\boldsymbol{\varepsilon}_i, W_0}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, w_0) = f_{W_1, W_0}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, w_0, w_0).$$

بنابر (۹)، توزیع $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ به شرط W_0 نرمال چندمتغیره است و به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i | W_0 = w_0 \sim N_T(w_0, \Sigma_v).$$

توزیع W_0 به شرط $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ نرمال چندمتغیره بریده شده در صفر ($ZTN^{1\lambda}$) و به صورت زیر می‌باشد

$$W_0 | \boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim ZTN_T(\mu_{W_0}, \Sigma_{W_0}),$$

که در آن

$$\mu_{W_0} = \delta' \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \Sigma_{W_0} = \Sigma \delta' \delta (I_T + \lambda' \lambda)^{-1}$$

الگوریتم EM یک الگوریتم پرکاربرد برای محاسبه برآوردهای ML در مدل‌هایی با داده‌های ناکامل می‌باشد. فرض کنید $\mathbf{W}_0 = (W_{01}, \dots, W_{0n})'$ (که هر W_{0i} , $(i = 1, \dots, n)$ از توزیع نیم‌نرمال چندمتغیره می‌باشند) و $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_i)_{i=1, \dots, n}$ به

¹⁸ Zero Truncated Normal

در گام E، امید تابع لگاریتم درست‌نمایی داده کامل

به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E[(\boldsymbol{\varepsilon}_c, \hat{\theta}) | \boldsymbol{\varepsilon}] = nT \ln \pi \frac{n}{2} \ln(|\hat{\Sigma}|) \quad (10)$$

$$+ \frac{n}{2} \ln(|I_T + \hat{\lambda}' \hat{\lambda}|) \frac{n}{2} \ln\left(1 + \left|\hat{\lambda}' \hat{\lambda}\right|\right)$$

$$\frac{1}{2} \text{tr}\{\hat{\Sigma}^{-1}(I_T + \hat{\lambda}' \hat{\lambda}) \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\varepsilon}_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i + a_{1i}' (\hat{\lambda}' \hat{\lambda})^{-1}$$

$$(I_T + \hat{\lambda}' \hat{\lambda}) a_{1i} \quad 2a_{1i}' \boldsymbol{\varepsilon}_i)\} \frac{1}{2} \text{tr}\{\hat{\Sigma}^{-1}(I_T +$$

$$\hat{\lambda}' \hat{\lambda})(\hat{\lambda}' \hat{\lambda})^{-1}(I_T + \hat{\lambda}' \hat{\lambda}) \sum_{i=1}^n (a_{2i} \quad a_{1i} a_{1i}')\}$$

$$= nT \ln \pi \frac{n}{2} \ln(|\hat{\Sigma}|) + \frac{n}{2} \ln\left(|I_T + \hat{\lambda}' \hat{\lambda}|\right)$$

$$\frac{n}{2} \ln(1 + |\hat{\lambda}' \hat{\lambda}|) \frac{1}{2} \text{tr}\{\hat{\Sigma}^{-1}(I_T + \hat{\lambda}' \hat{\lambda})$$

$$\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\varepsilon}_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad 2a_{1i}' \boldsymbol{\varepsilon}_i + (\hat{\lambda}' \hat{\lambda})^{-1}(I_T +$$

$$\hat{\lambda}' \hat{\lambda})' a_{2i})\},$$

که در آن $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT})'$

$$\varepsilon_{it} = Y_{it} \quad (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) Y_{it-1} + \hat{\alpha} \hat{\beta} Y_{it-2}$$

$$\tilde{m}(X_{it}) + \hat{\alpha} \tilde{m}(X_{it-1}),$$

$$\tilde{m}(X_{it}) = g(X_{it}, \hat{\gamma}) \tilde{\xi}(X_{it}) = \hat{\gamma}' Z_{it} \tilde{\xi}(X_{it})$$

در گام M، به منظور حصول یک مجموعه جدیدی

از پارامترها، معادله (۱۰) را حداکثر می‌نماییم.

برآوردهای به‌روز شده^{۲۰} پارامترها در تکرار $-k + 1$

ام به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\hat{\Sigma}^{(k+1)} = \frac{1}{n} [(I_T + \hat{\lambda}'^{(k)} \hat{\lambda}^{(k)}) \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_i'^{(k)} \quad 2a_{1i}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_i'^{(k)} + a_{2i}^{(k)}$$

$$(\hat{\lambda}'^{(k)} \hat{\lambda}^{(k)})^{-1} (I_T + \hat{\lambda}'^{(k)} \hat{\lambda}^{(k)}))]$$

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \quad (12)$$

$$\text{argmax}_{\hat{\lambda}} \sum_{i=1}^n \ln \Phi_T(\lambda' \hat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}(k+1)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)}),$$

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = (\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_{iT-1} \quad \hat{\beta}^{(k)} \mathbf{Y}_{iT-2}$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_{iT-1}^{(k)})' \quad (13)$$

$$\hat{\Sigma}^{-1(k+1)} (I_T + \hat{\lambda}'^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k+1)})$$

$$(\mathbf{Y}_{iT-1} \quad \hat{\beta}^{(k)} \mathbf{Y}_{iT-2} \quad \tilde{\mathbf{m}}_{iT-1}^{(k)})^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_{iT-1} \quad \hat{\beta}^{(k)} \mathbf{Y}_{iT-2} \quad \tilde{\mathbf{m}}_{iT-1}^{(k)})'$$

$$\hat{\Sigma}^{-1(k+1)} (I_T + \hat{\lambda}'^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k+1)})$$

$$(\mathbf{Y}_{iT} \quad \hat{\beta}^{(k)} \mathbf{Y}_{iT-1} \quad \tilde{\mathbf{m}}_{iT}^{(k)} \quad a_{1i}^{(k)}),$$

$$\hat{\beta}^{(k+1)} = \quad (14)$$

$$(\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_{iT-1} \quad \hat{\alpha}^{(k+1)} \mathbf{Y}_{iT-2})' \hat{\Sigma}^{-1(k+1)})$$

ترتیب داده گمشده و ناکامل باشند، توزیع توأم داده

کامل $\boldsymbol{\varepsilon}_c = (\boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{W}_0)'$ با استفاده از (۹) محاسبه

می‌گردد. فرض کنید $L(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{W}_0, \theta)$ تابع درست‌نمایی

داده کامل باشد، متعاقباً تابع لگاریتم درست‌نمایی به

صورت زیر محاسبه می‌شود

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_c, \theta) = \ln(L(\boldsymbol{\varepsilon}_c, \theta)) =$$

$$\ln(\prod_{i=1}^n f_{\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{W}_{i0}}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{W}_{i0}))$$

$$= \sum_{i=1}^n \ln\left[\left(\frac{1}{\pi^T}\right) |\Sigma_v|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma_u|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}_i' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i + (\mathbf{W}_{i0} \quad \mu_{W_0})'$$

$$\Sigma_{W_0}^{-1} (\mathbf{W}_{i0} \quad \mu_{W_0})]\right\}$$

$$= nT \ln \pi \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_u| + |\Sigma_v|) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_i' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i + (\mathbf{W}_{i0} \quad \mu_{W_0})' \Sigma_{W_0}^{-1} (\mathbf{W}_{i0}$$

$$\mu_{W_0})]$$

$$= nT \ln \pi \frac{n}{2} \ln(|\Sigma|) + \frac{n}{2} \ln(|I_T + \lambda' \lambda|)$$

$$\frac{n}{2} \ln(1 + |\lambda' \lambda|) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\boldsymbol{\varepsilon}_i' \Sigma^{-1}$$

$$(I_T + \lambda' \lambda) \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{W}_{i0}' (I_T + \lambda' \lambda) \Sigma^{-1} (\lambda' \lambda)^{-1}$$

$$(I_T + \lambda' \lambda) \mathbf{W}_{i0} \quad 2\mathbf{W}_{i0}' \Sigma^{-1} (I_T + \lambda' \lambda) \boldsymbol{\varepsilon}_i]$$

$$= nT \ln \pi \frac{n}{2} \ln(|\Sigma|) + \frac{n}{2} \ln(|I_T + \lambda' \lambda|)$$

$$\frac{n}{2} \ln(1 + |\lambda' \lambda|) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\text{tr}\{\Sigma^{-1} (I_T$$

$$+ \lambda' \lambda) (\boldsymbol{\varepsilon}_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{W}_{i0}' (\lambda' \lambda)^{-1} (I_T + \lambda' \lambda) \mathbf{W}_{i0}$$

$$2\mathbf{W}_{i0}' \boldsymbol{\varepsilon}_i)\}],$$

به طوری که $\text{tr}\{A\}$ مخفف اثر^{۱۹} ماتریس A است.

فرض کنید $\boldsymbol{\mu}_{W_0} = \delta' \hat{\delta}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$

$$\hat{\Sigma}_{W_0}^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

که $\hat{\Sigma}_{W_0} = \hat{\Sigma} \hat{\delta}' \hat{\delta} (I_T + \hat{\lambda}' \hat{\lambda})^{-1}$ قرار دهید

$$\boldsymbol{\varphi} = \left(\frac{\phi(\sum_{i=1}^n \sigma_{1i} \mu_i)}{\Phi(\sum_{i=1}^n \sigma_{1i} \mu_i)}, \frac{\phi(\sum_{i=1}^n \sigma_{2i} \mu_i)}{\Phi(\sum_{i=1}^n \sigma_{2i} \mu_i)}, \dots, \frac{\phi(\sum_{i=1}^n \sigma_{ni} \mu_i)}{\Phi(\sum_{i=1}^n \sigma_{ni} \mu_i)} \right),$$

آنگاه

$$a_{1i} = E_{\hat{\theta}}(W_0 | \boldsymbol{\varepsilon}_i) = \mu_{W_0} + \hat{\Sigma}_{W_0}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varphi},$$

$$a_{2i} = E_{\hat{\theta}}(W_0 W_0' | \boldsymbol{\varepsilon}_i)$$

$$= \mu_{W_0} \mu_{W_0}' + \hat{\Sigma}_{W_0} + \hat{\Sigma}_{W_0}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}' \hat{\Sigma}_{W_0}^{-\frac{1}{2}}.$$

²⁰ Updated

¹⁹ Trace

$$\begin{aligned} \xi^{(k+1)}(X_{it}) &= \frac{B_1}{B_2} \\ B_1 &= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n K \left(\frac{X_{it}-x}{h_n} \right) \\ &\left[Y_{it} \hat{\beta}^{(k+1)} Y_{it-1} + \right. \\ &\left. \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{\sigma}_u^{(k+1)}}{1-\hat{\alpha}^{(k+1)}} g(X_{it}, \hat{\gamma}^{(k+1)}) \right. \\ &+ K \left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n} \right) [Y_{it-1} \hat{\beta}^{(k+1)} Y_{it-2} + \\ &\left. \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{\sigma}_u^{(k+1)}}{1-\hat{\alpha}^{(k+1)}} g(X_{it-1}, \hat{\gamma}^{(k+1)}) \right]. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \{ K \left(\frac{X_{it}-x}{h_n} \right) g^2(X_{it}, \hat{\gamma}^{(k+1)}) \\ &+ K \left(\frac{X_{it-1}-x}{h_n} \right) g^2(X_{it-1}, \hat{\gamma}^{(k+1)}) \}. \end{aligned}$$

گام‌های E و M را تا حصول همگرایی مدنظر ادامه می‌دهیم. با یک الگوریتم ساده، روند کلی برآورد را گام به گام شرح می‌دهیم.

الگوریتم مراحل برآوردیابی:

۱- مقادیر اولیه پارامترها را به صورت زیر در نظر بگیرید $(\Sigma^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \gamma^{(0)}, m^{(0)})$.

۲- قرار دهید $k = 1$ و با استفاده از (۱۱) و $(\lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \gamma^{(0)}, m^{(0)})$ را به دست آورید.

۳- براساس $(\hat{\Sigma}^{(1)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \gamma^{(0)}, m^{(0)})$ و با استفاده از (۱۲)، $\hat{\lambda}^{(1)}$ را به دست آورید.

۴- براساس $(\hat{\Sigma}^{(1)}, \hat{\lambda}^{(1)}, \beta^{(0)}, \gamma^{(0)}, m^{(0)})$ و با استفاده از (۱۳)، $\hat{\alpha}^{(1)}$ را به دست آورید.

۵- براساس $(\hat{\Sigma}^{(1)}, \hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\alpha}^{(1)}, \gamma^{(0)}, m^{(0)})$ و با استفاده از (۱۴)، $\hat{\beta}^{(1)}$ را به دست آورید.

۶- براساس $(\hat{\Sigma}^{(1)}, \hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\alpha}^{(1)}, \hat{\beta}^{(1)}, m^{(0)})$ و با استفاده از (۱۷)، $\hat{\gamma}^{(1)}$ را به دست آورید.

۷- براساس $(\hat{\Sigma}^{(1)}, \hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\alpha}^{(1)}, \hat{\beta}^{(1)}, \hat{\gamma}^{(1)})$ و با استفاده از (۱۸)، $\hat{m}^{(1)}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} &(I_T + \hat{\lambda}'^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k+1)}) \\ &(\mathbf{Y}_{iT-1} \hat{\alpha}^{(k+1)} \mathbf{Y}_{iT-2})^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_{iT-1} \\ &\hat{\alpha}^{(k+1)} \mathbf{Y}_{iT-2})' \hat{\Sigma}^{-1(k+1)} \\ &(I_T + \hat{\lambda}'^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k+1)}) (\mathbf{Y}_{iT} \hat{\alpha}^{(k+1)} \mathbf{Y}_{iT-1} \\ &\hat{\mathbf{m}}_{iT}^{(k)} + \hat{\alpha}^{(k+1)} \hat{\mathbf{m}}_{iT-1}^{(k)} a_{1i}^{(k)}), \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \varepsilon_{it}^{(k)} &= Y_{it} (\hat{\alpha}^{(k)} + \hat{\beta}^{(k)}) Y_{it-1} \\ &+ \hat{\alpha}^{(k)} \hat{\beta}^{(k)} Y_{it-2} \tilde{m}^{(k)}(X_{it}) \\ &+ \hat{\alpha}^{(k)} \tilde{m}^{(k)}(X_{it-1}). \end{aligned}$$

با استفاده از برآوردهای به روز شده پارامترها، $\sigma_u^{2(k+1)}$ و $\sigma_v^{2(k+1)}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_u^{(k+1)} &= \hat{\Sigma}^{(k+1)} \hat{\lambda}'^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k+1)} (I_T \\ &+ \hat{\lambda}'^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k+1)})^{-1}, \\ \hat{\Sigma}_v^{(k+1)} &= \\ \hat{\Sigma}^{(k+1)} &(I_T + \hat{\lambda}'^{(k+1)} \hat{\lambda}^{(k+1)})^{-1}, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\hat{\sigma}_u^{2(k+1)} = \frac{1}{T} \left| \hat{\Sigma}_u^{(k+1)} \right| \quad (۱۵)$$

$$\hat{\sigma}_v^{2(k+1)} = \quad (۱۶)$$

$$\frac{1}{T} \left| \hat{Q}'^{(k+1)} \hat{Q}^{(k+1)} \right|^{-1} \left| \hat{\Sigma}_v^{(k+1)} \right|.$$

مقدار به روز شده پارامتر γ از رابطه (۵) به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^{(k+1)} &= \operatorname{argmin}_{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (Y_{it} \\ &(\hat{\alpha}^{(k+1)} + \hat{\beta}^{(k+1)}) Y_{it-1} + \\ &\hat{\alpha}^{(k+1)} \hat{\beta}^{(k+1)} Y_{it-2} \\ &\gamma' Z_{it} + \hat{\alpha}^{(k+1)} \gamma' Z_{it-1} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{\sigma}_u^{(k+1)})^2. \end{aligned} \quad (۱۷)$$

برآورد نیمه پارامتری به روز شده تابع $m(X_{it})$ در تکرار $k+1$ -ام به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\hat{m}^{(k+1)}(X_{it}) = \hat{\gamma}'^{(k+1)} Z_{it} \xi^{(k+1)}(X_{it}) \quad (۱۸)$$

که

$$= M_{\mathbf{u}_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it}}(\boldsymbol{\alpha}'_t),$$

و در نتیجه

$$TE_{it} = M_{\mathbf{u}_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it}}(\boldsymbol{\alpha}'_t)M_{u_{i0}}(\alpha^t),$$

که نیاز به تابع MGF برای \mathbf{u}_{it} به شرط $\boldsymbol{\varepsilon}_{it}$ و u_{i0} را روشن می‌سازد.

گزاره ۱. فرض کنید $\mathbf{v}_{it} = (v_{i1}, \dots, v_{it})$ ، $\mathbf{v}_{it} = v_{it}$ ، αv_{it-1} و $\mathbf{u}_{it} = (u_{i1}, \dots, u_{it})$ به طوری که $v_{it} \sim u_{it} \sim N^+(0, \sigma_u^2)$ و $\mathbf{u}_{it} \sim N(0, \sigma_v^2)$ آن‌گاه توزیع \mathbf{u}_{it} به شرط $\boldsymbol{\varepsilon}_{it}$ نرمال بریده شده در صفر چندمتغیره می‌باشد و به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\mathbf{u}_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it} \sim ZTN_t(\boldsymbol{\mu} = \delta'_t \delta_t \boldsymbol{\varepsilon}_{it}, \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_t \delta'_t, \delta_t (I_t + \lambda'_t \lambda_t)^{-1}),$$

که در آن $\boldsymbol{\Sigma}_{v_t} = \sigma_v^2 Q_t Q'_t$ ، $\boldsymbol{\Sigma}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{v_t} + \boldsymbol{\Sigma}_{u_t}$ و $\delta'_t = (I_t + \lambda'_t \lambda_t)^{-\frac{1}{2}} \lambda_t$ ، $\boldsymbol{\Sigma}_{u_t} = \sigma_u^2 I_t$ و $\lambda_t = \frac{-1}{\boldsymbol{\Sigma}_{v_t}^2 \boldsymbol{\Sigma}_{u_t}^2}$ می‌باشد.

تابع مولد گشتاور \mathbf{u}_{it} به شرط $\boldsymbol{\varepsilon}_{it}$ با استفاده از گزاره ۱، به صورت زیر به دست می‌آید

$$M_{\mathbf{u}_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it}}(\boldsymbol{\alpha}'_t) = E[e^{-\boldsymbol{\alpha}'_t \mathbf{u}_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it}}] \quad (19)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}'_t \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_t - \boldsymbol{\alpha}'_t \boldsymbol{\mu}\right) \frac{\Phi_t(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}})}{\Phi_t(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu})},$$

و تابع مولد گشتاور u_{i0} به صورت زیر بیان می‌شود

$$M_{u_{i0}}(\alpha^t) = E[e^{-\alpha^t u_{i0}}] \quad (20)$$

$$= 2 \exp\left(\frac{\alpha^{2t} \sigma_u^2}{2(1-\alpha^{2t})}\right) \Phi_1\left(\frac{-\alpha^t \sigma_u}{\sqrt{1-\alpha^{2t}}}\right).$$

اکنون، می‌توان کارایی فنی و ناکارایی فنی را پیش‌بینی نمود. پیش‌بینی کارایی فنی به صورت زیر به دست می‌آید.

۸- به گام ۲ بازگردید و قرار دهید $k = k + 1$ و این روند را تا زمانی که تفاضل دو مقدار متوالی برآوردها کمتر از 0.05، ادامه دهید. پارامترهای $\hat{\sigma}_u^{(k+1)}$ و $\hat{\sigma}_v^{(k+1)}$ در هر تکرار با استفاده از (۱۵) و (۱۶) محاسبه می‌شوند.

۴- پیش‌بینی ناکارایی فنی

در این بخش، در مورد چگونگی پیش‌بینی کارایی هر واحد از تولیدی برحسب زمان بحث خواهیم کرد. یک تولیدی از لحاظ فنی زمانی کارا است که نتوان محصول بیشتری از هر ورودی، بدون کم شدن خروجی‌های دیگر یا با استفاده از ورودی بیشتر، تولید کرد. طبق مدل‌های مرزی تصادفی، متغیر پاسخ برحسب لگاریتم بیان می‌شود، کارایی فنی (TE^*) واحد i -ام در زمان t -ام به صورت زیر پیش‌بینی می‌شود

$$TE_{it} = E(e^{-u_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}}).$$

از آنجایی که عبارت ناکارایی u_{it} دارای ساختار AR(1) می‌باشد، با جایگذاری مکرر رابطه (۲) به نمایش میانگین متحرک زیر دست می‌یابیم

$$u_{it} = \alpha u_{it-1} + u_{it} = \sum_{s=0}^{t-1} \alpha^s u_{it-s} + \alpha^t u_{i0}.$$

بنابراین، کارایی فنی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$TE_{it} = E(e^{-u_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}})$$

$$= E(e^{-\sum_{s=0}^{t-1} \alpha^s u_{it-s} - \alpha^t u_{i0}|\boldsymbol{\varepsilon}})$$

$$= E(e^{-\sum_{s=0}^{t-1} \alpha^s u_{it-s}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it}}) E(e^{-\alpha^t u_{i0}}),$$

که در آن $\boldsymbol{\varepsilon}_{it} = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{it})'$ برای هر $t = 1, \dots, T$ فرض کنید

$$\mathbf{u}_{it} = (u_{i1}, \dots, u_{it})',$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = (\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}, \dots, 1)',$$

لذا

$$E(e^{-\sum_{s=0}^{t-1} \alpha^s u_{it-s}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it}}) = E(e^{-\boldsymbol{\alpha}'_t \mathbf{u}_{it}|\boldsymbol{\varepsilon}_{it}})$$

مرتبۀ اول می‌باشد، به طوری که $u_{it} \sim N(0, \sigma_v^2)$ و $N^+(0, \sigma_u^2)$ است. در تمام مقایسه‌های شبیه‌سازی، پارامترها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم $\sigma_v = 0.15, \sigma_u = 0.3, \alpha = 0.4, \beta = 0.6$

ارزیابی عملکرد مدل را با استفاده از نمونه کوچک محک می‌زنیم، چرا که در عمل، اکثر مطالعات تجربی بر مبنای داده‌های تابلویی کوچک می‌باشند. تابع هسته را گوسین و پهنای باند را متناسب با $(nT)^{-\frac{1}{5}}$ انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $\omega = (nT)^{-\frac{1}{5}}$ ، به طوری که $\omega = (0.13, 0.26)$ می‌باشد.

در جدول ۱، آریبی و ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE^{۲۳}) برآوردها را برای ترکیب‌های مختلفی از $n = (10, 20, 30)$ و $T = (20, 30)$ ارائه شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، تمامی برآوردهای ML به مقدار واقعی پارامتر نزدیک و مقادیر RMSE کوچک می‌باشند. با افزایش n و T ، مقدار RMSE کاهش می‌یابد که بیانگر سازگاری برآوردها می‌باشد.

در ادامه کارایی برآورد نیمه‌پارامتری تابع نامعلوم متغیر برونزا را نیز بررسی خواهیم نمود. مقادیر $m(x_{it})$ و برآوردهای نیمه‌پارامتری متناظر آن‌ها را با پهنای باند $n = 0.04$ ، $\omega = 0.13$ و $T = 100$ برای $n = 4$ تولیدی به دست می‌آوریم. به منظور خلاصه‌سازی، تنها، نمودار مقدار $m(x_{it})$ برای تولیدی اول و $T = 100$ را رسم می‌نماییم. در شکل ۱، عملکرد مناسب برآورد نیمه‌پارامتری تابع برونزا، نشان داده شده است.

باقیمانده‌های مدل به صورت زیر محاسبه می‌شود $r_{it} = Y_{it} - \hat{Y}_{it} = Y_{it} - \hat{\beta}Y_{it-1} - \hat{m}(X_{it}) + \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_u}{1-\alpha}$ ، $i = 1, 2, 3, 4$; $t = 1, \dots, 100$.

$$TE_{it} = 2 \exp\left(\frac{1}{2} \alpha_t' \Sigma \alpha_t\right) \frac{\alpha_t'^\mu + \frac{\alpha^{2t} \sigma_u^2}{2(1-\alpha^2)}}{\Phi_t(\Sigma^{\frac{1}{2}} \mu - \alpha_t' \Sigma^{\frac{1}{2}}) \Phi_1\left(\frac{-\alpha^t \sigma_u}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)} \Phi_t(\Sigma^{\frac{1}{2}} \mu)$$

به طور مشابه، با استفاده از (۱۹) و (۲۰)، پیش‌بینی ناکارایی فنی $E(u_{it}|\mathcal{E})$ ، به صورت زیر به دست می‌آید

$$E(u_{it}|\mathcal{E}) = E\left(\sum_{s=0}^{t-1} \alpha^s u_{it-s} + \alpha^t u_{i0} | \mathcal{E}\right) = E(\alpha_t' \mathbf{u}_{it} | \mathcal{E}_{it}) + E(\alpha^t u_{i0}) = \alpha_t' \left(\mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varphi}_t \right) + \alpha^t \sigma_u \sqrt{\frac{2}{\pi(1-\alpha^2)}}$$

که $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)'$

$$\Sigma^{\frac{-1}{2}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1t} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{t1} & \sigma_{t2} & \dots & \sigma_{tt} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_t = \left(\frac{\phi(\sum_{i=1}^t \sigma_{1i} \mu_i)}{\Phi(\sum_{i=1}^t \sigma_{1i} \mu_i)}, \frac{\phi(\sum_{i=1}^t \sigma_{2i} \mu_i)}{\Phi(\sum_{i=1}^t \sigma_{2i} \mu_i)}, \dots, \frac{\phi(\sum_{i=1}^t \sigma_{ti} \mu_i)}{\Phi(\sum_{i=1}^t \sigma_{ti} \mu_i)} \right)$$

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد برآوردگرهای ML به دست آمده از الگوریتم EM را توسط نمونه شبیه‌سازی مونت‌کارلو^{۲۲} بررسی می‌کنیم.

به منظور بررسی کارایی روش برآورد نیمه‌پارامتری، یک مطالعه شبیه‌سازی برای مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی غیرخطی زیر ارائه می‌نماییم

$$Y_{it} = \beta Y_{it-1} + m(X_{it}) + v_{it} \quad u_{it}, \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T.$$

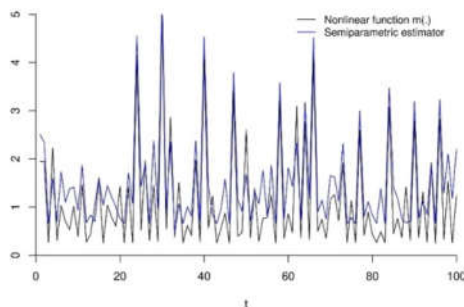
تابع $m(x) = 5e^{-x^2} + 0.1x$ و $X_{it} \sim N(1, 0.5)$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین $u_{it} = \alpha u_{it-1} + u_{it}$ دارای ساختار خودبازگشتی

²³ Root Mean Square Error

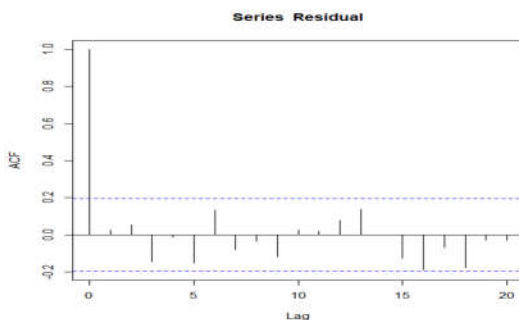
²² Monte Carlo

جدول ۱. نتایج برآورد پارامترهای مدل مرزی تصادفی جدید، اریبی و مقادیر RMSE در پرائنتر

ω	T	n	$\sigma_u = 0.3$	$\sigma_v = 0.15$	$\alpha = 0.4$	$\beta = 0.6$
0.13	20	10	-0.064015 (0.033508)	-0.035714 (0.029729)	0.070187 (0.059095)	0.086036 (0.073056)
		20	0.058109 (0.030704)	0.033066 (0.026013)	0.068016 (0.055904)	0.082947 (0.071502)
		30	-0.050734 (0.027118)	-0.030834 (0.024172)	-0.063004 (0.052031)	0.076086 (0.066258)
	30	10	0.052118 (0.026158)	0.029203 (0.018171)	0.057018 (0.043004)	-0.072346 (0.060159)
		20	-0.038776 (0.025569)	0.027009 (0.017004)	0.050778 (0.039011)	-0.067466 (0.055057)
		30	-0.032211 (0.021518)	0.024656 (0.015211)	0.043836 (0.028047)	0.064919 (0.049049)
0.26	20	10	0.062099 (0.030687)	0.035087 (0.030917)	0.069399 (0.057024)	-0.079792 (0.068845)
		20	0.065275 (0.028066)	-0.032263 (0.027907)	0.066256 (0.052705)	0.071177 (0.063971)
		30	0.048304 (0.026062)	-0.029529 (0.021565)	-0.061013 (0.047644)	0.067103 (0.059438)
	30	10	0.036763 (0.020195)	0.024208 (0.017008)	-0.060019 (0.045045)	0.064162 (0.058489)
		20	-0.029303 (0.015905)	0.028725 (0.016092)	-0.052736 (0.038095)	0.063064 (0.057095)
		30	0.028449 (0.013892)	-0.020715 (0.013669)	-0.053029 (0.026054)	0.061971 (0.046348)



شکل ۱. نمودار تابع غیرخطی متغیر برونزا و برآورد نیمه پارامتری متناظر آن



شکل ۲. تابع ACF باقیمانده‌های مدل

در شکل ۲، نمودار تابع خودهمبستگی (ACF^{24}) باقیمانده‌های مدل، تحت $\omega = 0.13$ ، برای تولیدی اول و $T = 100$ رسم شده است که گویای ناهمبستگی باقیمانده‌ها و متعاقبا کفایت برازش می‌باشد.

یادآور می‌شویم که نمودار ACF سایر تولیدی‌های نیز موید ناهمبستگی باقیمانده‌ها و کفایت برازش می‌باشد، ولیکن با توجه به خلاصه‌سازی مطالب، نمودار آن‌ها ارائه نشده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل مرزی تصادفی خودبازگشتی غیرخطی جدیدی را معرفی نمودیم که در آن ناکارایی فنی را پویا با ساختار $AR(1)$ در داده‌های تابلویی، در نظر گرفته‌ایم که با واقعیت سازگارتر می‌باشد. برای برآورد تابع نامعلوم متغیر برونزا از بسط سری تیلور که دارای شکل پارامتری می‌باشد به همراه یک ضریب تعدیل‌گر استفاده نمودیم. برای برآورد پارامترهای مدل از الگوریتم EM که شامل ۸ مرحله می‌باشد، بهره برده‌ایم. هم‌چنین کارایی فنی و ناکارایی فنی مدل را پیش‌بینی کرده و عملکرد برآوردهای EM را با توسط مطالعات شبیه‌سازی مونت کارلو ارزیابی نمودیم.

²⁴ Autocorrelation Function

MPRA Paper, 87830, University Library of Munich, Germany (2018)

فهرست منابع

- [9] B. Feizi, A. Pourdarvish. Nonlinear autoregressive stochastic frontier model with dynamic technical inefficiency in panel data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, (2021)
- [10] H. Noh, I.V. Keilegom. On relaxing the distributional assumption of stochastic frontier models. *Journal of the Korean Statistical Society* 49:1–14(2020)
- [11] Alsumaiei, A.A. A Nonlinear Autoregressive modeling approach for forecasting groundwater level fluctuation in urban aquifers. *Water*, 12: 820(2020)
- [12] A. Tealab, H. Hefny, A. Badr. Forecasting of nonlinear time series using ANN. *Future Computing and Informatics Journal* 2(1):39–47(2017)
- [13] S. Paul, S. Shankar. Estimating efficiency effects in a panel data stochastic frontier model. *Journal of Productivity Analysis* 53:163–180(2020)
- [14] Yu, Z., Wang, b. and Shi, N. Semiparametric estimation of regression functions in autoregressive models. *Statistics and Probability Letters*, 79:165–172(2009)
- [15] R. Farnoosh, M. Hajebi, S.Y. Samadi. A semiparametric estimation for the first-order nonlinear autoregressive time series model with independent and dependent errors. *Iranian Journal of Science and Technology* 43(3):905–917(2019)
- [16] Azzalini A. with the collaboration of Capitanio A. *The skew-normal and related families*. Cambridge: Cambridge University Press, IMS Monographs series (2014)
- [1] D.J. Aigner, C.A.K. Lovell, P. Schmidt. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics* 6:21–37(1977)
- [2] W. Meeusen, J. van den Broeck. Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International Economic Review* 18:435–444(1977)
- [3] M. Koetter, J.W. Kolari, L. Spierdijk. Enjoying the quiet life under deregulation? evidence from adjusted Lerner indices for U.S. banks. *The Review of Economics and Statistics* 94:462–480(2012)
- [4] Casu, B., Ferrari, A. and Zhao, T. Regulatory reform and productivity change in Indian banking. *Review of Economics and Statistics*, 95(3):1066–1077(2013)
- [5] Baten, A. and Hossain, I. Stochastic frontier model with distributional assumptions for rice production technical efficiency. *Journal of Agricultural Science and Technology*, 16:(2014)
- [6] M.M. Pitt, L.-F. Lee. The measurement and sources of technical inefficiency in the Indonesian weaving industry. *Journal of Development Economics* 9:43–64(1981)
- [7] P. Schmidt, R.C. Sickles. Production frontiers and panel data. *Journal of Business and Economic Statistics* 2:367–374(1984)
- [8] H. Lai, S.C. Kumbhakar. Estimation of dynamic stochastic frontier model using likelihood-based approaches.

-
- [17] M. Pourahmadi. Skew-normal ARMA models with nonlinear heteroscedastic predictors. *Communications in Statistics - Theory and Methods* 36:1803–1819(2007)
- [18] M. Sharafi, and A.R. Nematollahi. AR(1) model with skew-normal innovations. *Metrika* 17:1011–1029(2016)
- [19] M. Maleki. R.B. Arellano-Valle. Maximum a-posteriori estimation of autoregressive processes based on finite mixtures of scale-mixtures of skew-normal distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 87(6):1061–1083(2017)
- [20] A. Hajrajabi, A. Fallah. Nonlinear semiparametric AR(1) model with skewsymmetric innovations. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 47(5):1453–1462(2018)

