دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک کران بالا برای شاخص G-P مکعب‌های فیبوناچی

حجت کاویانی[۱]، لطف‌الله پور فرج[۲]*

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۱۳

چکیده

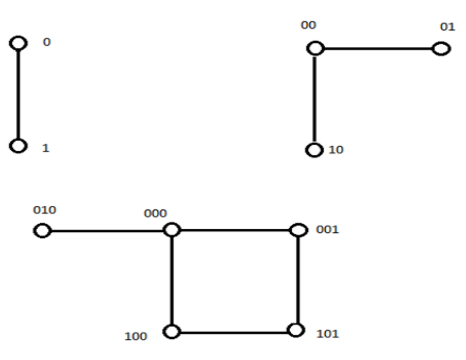
شاخص وینر گراف همبند G به صورت $W(G)=\sum_{u,v\in V(G)} d(u,v)$ تعریف می‌شود که درآن $d(u,v)$ فاصله‌ی بین رئوس u و v در G است. شاخص گراوواک – پیسانسکی (G-P) یک گراف، نسخه اصلاح شده شاخص وینر روی فاصله بین هر رأس u و تصویر $\alpha(u)$ آن رأس می‌باشد که α یک خودریختی گراف G است. مجموعه F_n شامل تمام رشته‌های دودویی به طول n است که دارای هیچ دو مولفه متوالی [۱] نباشند. مکعب فیبوناچی $\Gamma_n\ (n\geq 1)$ گرافی با مجموعه رئوس F_n است. در این گراف، دو رأس مجاور هستند اگر و تنها اگر در یک مؤلفه اختلاف داشته باشند. ما در این مقاله یک کران بالا برای شاخص G-P مکعب‌های فیبوناچی به دست می‌آوریم.

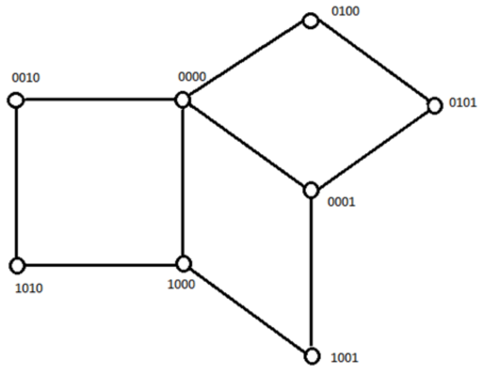
واژه‌های کلیدی: مکعب‌های فیبوناچی، شاخص وینر گراف، شاخص G-P گراف، خودریختی گراف‌ها.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: l.pourfaraj@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید n یک عدد صحیح غیر منفی باشد. ابرمکعب $n-$ بعدی گرافی است که رئوس آن رشته‌های دودویی هستند و دو رأس آن با هم مجاورند اگر و تنها اگر فاصله همینگ آن‌ها یک باشد. منظور از فاصله همینگ بین دو رشته، تعداد مولفه‌هایی است که آن دو رشته با هم اختلاف دارند. هسو در سال ۱۹۹۳ مکعب‌های فیبوناچی را تعریف کرد [۱]. اعداد فیبوناچی F_n به صورت $F_0=0$ و $F_1=1$ و $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ ($n\geq 2$) تعریف شده‌اند. یک مکعب فیبوناچی زیرگرافی از یک ابرمکعب است که مجموعه رئوس آن رشته‌های دودویی هستند به طوریکه هیچ دو ۱ متوالی در رشته‌ها وجود ندارد، لذا داریم $\left|V\left(\Gamma_n\right)\right|=F_{n+2}$ [۱] (شکل ۱). رأسی از Γ_n که دارای n تا 0 است را با 0^n نشان می‌دهیم. فرض کنید $\Gamma_{n,k}$ مجموعه رئوسی از Γ_n باشند که به طور دقیق شامل k تا ۱ است، بنابراین $\Gamma_{n,k}$ مجموعه‌ای از رئوس Γ_n است که فاصله آن‌ها از 0^n برابر k است. همچنین $\Gamma_{n,0}=\left\{0^n\right\}$ و $\Gamma_{n,1}=\left\{10^{n-1},010^{n-2},\ldots,0^{n-1}1\right\}$.





شکل (۱): مکعب‌های فیبوناچی

در سال ۱۹۴۷ هارولد وینر شاخص وینر گراف همبند G را به صورت $W\left(G\right)=\sum_{u,v\in V\left(G\right)} d\left(u,v\right)$ تعریف کرد که در آن $d\left(u,v\right)$ فاصله بین رئوس u و v در گراف همبند G است [۲]. این شاخص در [۳] برای مکعب‌های فیبوناچی محاسبه شده است. در سال ۱۹۹۱ گراوواک و پیسانسکی نسخه اصلاح شده‌ای از شاخ وینر ارائه کردند که علاوه بر فواصل بین رئوس، تقارن روی رئوس گراف‌ها را نیز شامل می‌شود. اگر G یک گراف از مرتبه n و $Aut\left(G\right)$ گروه خودریختی‌های گراف G باشد آن‌گاه شاخص گراوواک – پیسانسکی (G-P) آن برابر است با [۴].

$$\hat{W}\left(G\right)=\frac{n}{2\left|Aut\left(G\right)\right|}\sum_{v\in V\left(G\right)}\sum_{\alpha\in Aut\left(G\right)} d\left(u,\alpha\left(u\right)\right).$$

فرض کنید G یک گراف باشد، عمل گروه $Aut\left(G\right)$ روی $V\left(G\right)$، آن را به مدارهایش افراز می‌کند. رئوس u و v متعلق به یک مدار هستند اگر و تنها اگر $\alpha\in Aut\left(G\right)$ موجود باشد به طوری که $\alpha\left(u\right)=v$.

قضیه ۱-۱[۵]: اگر G یک گراف همبند و $V_1,V_2,...,V_m$ مدارهای $V(G)$ تحت عمل $Aut(G)$ باشند، آن‌گاه

$$\hat{W}(G) = n(G)\sum_{i=1}^{m}\frac{W(V_i)}{|V_i|}.$$

۲- مدارهای مکعب‌های فیبوناچی

فرض کنید G یک گراف باشد. مجموعه مدارهای رأسی حاصل از عمل $Aut(G)$ که روی $V(G)$ عمل می‌کند را با $O_V(G)$ و تعداد این مدارها را با $o_V(G) = |O_V(G)|$ نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه مدارهای رأسی گراف G از اندازه k را با $O_V(G,k)$ و تعداد آن‌ها را با $o_V(G,k) = |O_V(G,k)|$ نشان می‌دهیم.

اشرفی و همکاران گروه خودریختی مکعب‌های فیبوناچی را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۶]. نگاشت معکوس β را به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\beta : V(\Gamma_n) \longrightarrow V(\Gamma_n)$$

$$\beta(b_1b_2..b_n) = b^R = b_nb_{n-1}..b_1$$

در این صورت β تنها خودریختی نابدیهی Γ_n است [۷].

قضیه ۲-۱ [۷]: برای هر $n \geq 1$ داریم $Aut(\Gamma_n) \cong \mathbb{Z}_2$. بنابراین مکعب‌های فیبوناچی دارای مدارهای رأسی از اندازه‌های 1 و 2 هستند. در قضیه زیر تعداد مدارهای مکعب‌های فیبوناچی محاسبه شده است.

قضیه ۲-۲ [۶]: اگر $n \geq 2$، آن‌گاه

$$o_V(\Gamma_n,1) = F_{\left\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \right\rfloor +2}$$

$$o_V(\Gamma_n,2) = \frac{1}{2}\left(F_{n+2} - F_{\left\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \right\rfloor +2}\right)$$

$$o_V(\Gamma_n) = \frac{1}{2}\left(F_{n+2} + F_{\left\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \right\rfloor +2}\right).$$

برای مثال مدارهای Γ_4 به صورت زیر است:

$$O_V(\Gamma_n,1) = \{\{0000\},\{1001\}\}$$

$$O_V(\Gamma_n,2) = \left\{\begin{matrix}\{1000,0001\},\{1010,0101\},\\ \{0010,0100\}\end{matrix}\right\}$$

۳- نتیجه اصلی

در این بخش یک کران بالا برای شاخص G-P مکعب‌های فیبوناچی به دست می‌آوریم.

قضیه ۳-۱: فرض کنید $V_i \in O_V(\Gamma_n,2)$ و $m = o_V(\Gamma_n,2)$ $(1 \leq i \leq m)$ در این صورت داریم:

$$\hat{W}(\Gamma_n) = \frac{F_{n+2}}{2}\sum_{i=1}^{m}W(V_i).$$

برهان. چون $|V(\Gamma_n)| = F_{n+2}$ و $|Aut(\Gamma_n)| = 2$ و برای هر مدار V از $O_V(\Gamma_n,1)$ داریم $|V| = 1$، لذا با استفاده از قضیه ۱-۱ حکم برقرار است.

□

گزاره ۳-۲: برای هر رأس u متعلق به مدارهای $O_V(\Gamma_n,2)$ داریم:

$$d\left(u,\beta(u)\right)\le 2r$$

که درآن r برابر با تعداد 1 ها در u است.

برهان. فرض کنید رأس u متعلق به مدارهای $O_V(\Gamma_n,2)$ و $u=b_1b_2...b_n$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $n=2k$.

اگر برای هر $i\in\{1,2,...,n\}$ هر دو مولفه b_i و b_{n+1-i} برابر 1 نباشند، آن‌گاه با توجه به تعریف نگاشت معکوس β تمام r تا 1 در u در جایگاهی متفاوت با r تا 1 در $\beta(u)$ قرار خواهند گرفت. بنابراین فاصله همینگ آن‌ها برابر $2r$ است. در غیر این صورت $i\in\{1,2,...,n\}$ موجود است به طوری که برای مولفه‌های غیر متوالی b_i و b_{n+1-i} داریم $b_i=b_{n+1-i}=1$. لذا با توجه به تعریف نگاشت معکوس β، رئوس u و $\beta(u)$ در دو مولفه i ام و $n+1-i$ ام دارای 1 می‌باشند بنابراین فاصله همینگ آن‌ها کمتر از $2r$ است. در نتیجه $d\left(u,\beta(u)\right)\le 2r$.

۲) $n=2k+1$.

اگر برای هر $i\in\{1,2,...,n\}$ هر دو مولفه b_i و b_{n+1-i} برابر 1 نباشند و $b_{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\ne 1$، آن‌گاه با توجه به تعریف نگاشت معکوس β تمام r تا 1 در u در جایگاهی متفاوت با r تا 1 در $\beta(u)$ قرار خواهند گرفت. بنابراین فاصله همینگ آن‌ها برابر $2r$ است. در غیر این صورت $i\in\{1,2,...,n\}$ موجود است به طوری که برای مولفه‌های b_i و b_{n+1-i} داریم $b_i=b_{n+1-i}=1$ یا $b_{\lceil \frac{n}{2}\rceil}=1$، آن‌گاه با توجه به تعریف نگاشت معکوس β، رئوس u و $\beta(u)$ در دو مولفه i ام و $n+1-i$ ام دارای 1 می‌باشند بنابراین فاصله همینگ آن‌ها کمتر از $2r$ است. در نتیجه $d\left(u,\beta(u)\right)\le 2r$.

□

فرض کنید $n\ge 1$، برای هر $0\le r\le\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ منظور از $\Gamma_{n,r}$ مجموعه رئوس از Γ_n است که در آن‌ها r تا 1 وجود دارد. همچنین چون هر رأس $\Gamma_{n,r}$، r تا 1 و $n-r$ تا 0 دارد، پس برای شمارش $\left|V\left(\Gamma_{n,r}\right)\right|$، در هر رشته n تایی ابتدا 0 ها را قرار داده و سپس 1 ها را در $n-r+1$ مکان باقی مانده بین 0 ها جای گذاری می‌کنیم. بنابراین

$$\left|V\left(\Gamma_{n,r}\right)\right|=\binom{n-r+1}{r}$$

قضیه ۳-۳ : اگر n عددی زوج باشد آن‌گاه تعداد رئوس $O_V(\Gamma_n,1)$ که r تا 1 دارند برابر است با

$$\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r}{2}}$$

برهان. فرض کنید n زوج و u رأسی از مدار V باشد که $V\in O_V(\Gamma_n,1)$. بنابر تعریف نگاشت معکوس β، داریم $u=\beta(u)$. بنابراین رشته u

متقارن است و دو مولفه وسط آن باید 0 باشند، لذا $u = v\,00\beta(v)$ که $v \in V(\Gamma_{\frac{n-2}{2}})$. همچنین به دلیل متقارن بودن u، تعداد 1 های آن نمی‌تواند عددی فرد باشد. پس باید تعداد $\frac{r}{2}$ عدد 1 را در v قرار می‌دهیم. برای این کار ابتدا 0 ها را قرار می‌دهیم و سپس 1 ها را در $\frac{n-2}{2} - \frac{r}{2} + 1 = \frac{n-r}{2}$ مکان باقی مانده بین 0 ها جای گذاری می‌کنیم.

□

قضیه ۳-۴ : فرض کنید n عددی فرد باشد در این صورت:

الف) هرگاه r فرد باشد آن‌گاه تعداد رئوس متعلق به مدارهای $O_V(\Gamma_n, 1)$ که r تا 1 دارند برابر است با

$$\begin{pmatrix} \frac{n-r}{2} \\ \frac{r-1}{2} \end{pmatrix}$$

ب) هرگاه r زوج باشد آن‌گاه تعداد رئوس متعلق به مدارهای $O_V(\Gamma_n, 1)$ که r تا 1 دارند برابر است با

$$\begin{pmatrix} \frac{n-r+1}{2} \\ \frac{r}{2} \end{pmatrix}$$

برهان.

الف) فرض کنید r فرد باشد و u رأسی از مدار V باشد که $V \in O_V(\Gamma_n, 1)$. بنابر تعریف نگاشت معکوس β، داریم $u = \beta(u)$ درنتیجه رشته u متقارن است. چون r فرد است پس مولفه وسط در رأس u حتما عدد 1 می‌باشد و بنابر تعریف مکعب فیبوناچی دو مولفه کناری آن نمی‌توانند 1 باشند لذا $u = v\,010\beta(v)$ که $v \in V(\Gamma_{\frac{n-3}{2}})$. بنابراین باید تعداد $\frac{r-1}{2}$ عدد 1 را در v قرار دهیم. ابتدا 0 ها را قرار می‌دهیم و سپس 1 ها را در $\frac{n-3}{2} - \frac{r-1}{2} + 1 = \frac{n-r}{2}$ مکان باقی مانده بین 0 ها جای گذاری می‌کنیم.

ب) فرض کنید r زوج باشد و u رأسی از مدار V باشد که $V \in O_V(\Gamma_n, 1)$. بنابر تعریف نگاشت معکوس β، داریم $u = \beta(u)$. بنابراین رشته u متقارن است. چون r زوج است پس در مولفه وسط حتما عدد 0 باید قرار بگیرد لذا $u = v\,0\beta(v)$ که $v \in V(\Gamma_{\frac{n-1}{2}})$. بنابراین باید تعداد $\frac{r}{2}$ عدد 1 را در v قرار دهیم. ابتدا 0 ها را قرار می‌دهیم و 1 ها را در $\frac{n-1}{2} - \frac{r}{2} + 1 = \frac{n-r+1}{2}$ مکان باقی مانده بین 0 قرار می‌دهیم.

□

نتیجه ۳-۵ : تعداد رئوس $O_V(\Gamma_n, 2)$ که r تا 1 دارند برابر است با

الف) اگر n و r هر دو زوج باشند، آن‌گاه

$$\begin{pmatrix} n-r+1 \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{n-2}{2} \\ \frac{r}{2} \end{pmatrix},$$

ب) اگر n زوج و r فرد باشند. آن‌گاه

$$\binom{n-r+1}{r},$$

پ) اگر n فرد و r زوج باشند. آن‌گاه

$$\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r+1}{2}}{\frac{r}{2}},$$

ت) اگر n و r هر دو فرد باشند. آن‌گاه

$$\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r-1}{2}}.$$

قضیه ۳-۶: در مکعب فیبوناچی $\Gamma_n\ (n\geq 2)$ داریم:

الف) اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه

$$\hat{W}(\Gamma_n)\leq \frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} r\binom{n-r+1}{r}$$
$$+\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n}{2}} r\left(\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r}{2}}\right).$$

ب) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه

$$\hat{W}(\Gamma_n)\leq \frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} r\left(\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r-1}{2}}\right)$$
$$+\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n}{2}} r\left(\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r+1}{2}}{\frac{r}{2}}\right).$$

که r تعداد 1 ها در رئوس Γ_n است.

برهان.

الف) فرض کنید n زوج و $V_1,V_2,\ldots,V_m$ مدارهای با اندازه 2 در Γ_n باشند. با استفاده از نتیجه ۳-۵، تعداد رئوس $O_V(\Gamma_n,2)$ که به طور دقیق r تا 1 دارند و دو به دو در یک مدار قرار دارند برابر است با

$$\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r}{2}}$$

که r زوج و $2\leq r\leq \frac{n}{2}$. و تعداد رئوس $O_V(\Gamma_n,2)$ که به طور دقیق r تا 1 دارند و دو به دو در یک مدار قرار دارند برابر است با

$$\binom{n-r+1}{r}$$

که r فرد و $1\leq r\leq\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$.

فرض کنید $\left(1\le i \le m\right)$ $V_i \in O_V\left(\Gamma_n,2\right)$ و $u \in V_i$، در این صورت با استفاده از گزاره ۳-۲ داریم:

$$W\left(V_i\right)=d\left(u,\beta(u)\right)\le 2r$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{m} W\left(V_i\right)\le \sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} 2r\times\frac{1}{2}\binom{n-r+1}{r}$$
$$+\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n}{2}} 2r\times\frac{1}{2}\left(\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r}{2}}\right)$$

لذا

$$\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{i=1}^{m} W\left(V_i\right)\le \frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} r\binom{n-r+1}{r}$$
$$+\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n}{2}} r\left(\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r}{2}}\right)$$

بنابر این با استفاده از قضیه ۳-۱ داریم

$$\hat{W}\left(\Gamma_n\right)\le\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} r\binom{n-r+1}{r}$$
$$+\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n}{2}} r\left(\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r}{2}}\right).$$

ب) فرض کنید n عددی فرد و $V_1,V_2,\ldots,V_m$ مدارهای با اندازه 2 در $O_V\left(\Gamma_n,2\right)$ باشند با استفاده از نتیجه ۳-۵ تعداد رئوس $O_V\left(\Gamma_n,2\right)$ که به طور دقیق r تا 1 دارند و دو به دو در یک مدار قرار دارند برابر است با

$$\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r+1}{2}}{\frac{r}{2}}$$

که r زوج و $2\le r\le\dfrac{n-1}{2}$. تعداد رئوس $O_V\left(\Gamma_n,2\right)$ که به طور دقیق r تا 1 دارند و دو به دو در یک مدار قرار دارند برابر است با

$$\binom{n-r+1}{r}-\binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r-1}{2}}$$

که r فرد و $1\le r\le\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$

فرض کنید $\left(1\le i \le m\right)$ $V_i \in O_V\left(\Gamma_n,2\right)$ و $u \in V_i$ در این صورت با استفاده از گزاره ۳-۲ داریم:

$$W\left(V_i\right)=d\left(u,\beta(u)\right)\le 2r$$

جدول (۱): شاخص G-P مکعب‌های فیبوناچی ($2\le n\le 7$)

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$\hat{W}\left(\Gamma_n\right)$	۳	۵	۳۲	۶۵	۳۱۵	۶۸۰
کران محاسبه شده	۳	۵	۳۲	۷۸	۳۵۷	۹۱۸

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{m} W\left(V_i\right) \le \sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} 2r \times \frac{1}{2}\left(\binom{n-r+1}{r} - \binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r-1}{2}}\right)$$

$$+\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n-1}{2}} 2r \times \frac{1}{2}\left(\binom{n-r+1}{r} - \binom{\frac{n-r+1}{2}}{\frac{r}{2}}\right)$$

لذا

$$\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{i=1}^{m} W\left(V_i\right) \le \frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} r\left(\binom{n-r+1}{r} - \binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r-1}{2}}\right)$$

$$+\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n-1}{2}} r\left(\binom{n-r+1}{r} - \binom{\frac{n-r+1}{2}}{\frac{r}{2}}\right)$$

بنابر این با استفاده از قضیه ۳-۱ داریم:

$$\hat{W}\left(\Gamma_n\right) \le \frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=1,r=2k+1}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} r\left(\binom{n-r+1}{r} - \binom{\frac{n-r}{2}}{\frac{r-1}{2}}\right)$$

$$+\frac{F_{n+2}}{2}\sum_{r=2,r=2k}^{\frac{n}{2}} r\left(\binom{n-r+1}{r} - \binom{\frac{n-r+1}{2}}{\frac{r}{2}}\right).$$

□

برای $n = 2,3.4$ تساوی برقرار است. در حالت کلی اگر n زوج باشد و $u = b_1 b_2 ... b_n$ رأسی از مدارهای $O_V\left(\Gamma_n, 2\right)$ باشد و مولفه های غیر مجاور b_i و b_{n+1-i} هردو 1 نباشند آن‌گاه تساوی برقرار است. اگر n فرد باشد و هر دو مولفه b_i و b_{n+1-i} مخالف 1 باشند یا $b_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil} \neq 1$ آن‌گاه تساوی برقرار است. در غیر این صورت کران ارائه شده در قضیه ۹ شارپ است. در جدول زیر شاخص G-P و کران حاصل از قضیه ۳-۶ برای برخی مکعب‌های فیبوناچی آمده است.

فهرست منابع

[۱] W J. Hsu, Fibonacci cubes- a new interconnection technology. IEEE Trans. Parallel Distr. Systems, ۴ (۱۹۹۳) , no. ۱. ۳-۱۲

[۲] H. Wiener, Structural Determination of Paraffin Boiling Points, J. Am. Chem. Soc, ۶۹ (۱۹۴۷) ۱۷-۲۰.

[۳] M. Kovse, R. V. A, A. Vijayakumar, Wiener index and Steiner ۳-Wiener index of a graph, Asian-European J.Math, Vol ۱۴ (۰۹), (۲۰۲۱), ۲۱۵۰۱۶۵.

[۴] A. Graovac, T. Pisanski, On the Wiener index of a graph, J. Math. Chem, ۸ (۱۹۹۱) ۵۳-۶۲.

[۵] M. Ghorbani, M. Hakimi-Nezhad, M. Dehmer and X. Li, Analysis of the Graovac-Pisanski Index of Some Polyhedral Graphs Based on Their Symmetry Group, Symmetry, (۲۰۲۰),۱۲،۱۴۱۱.

[۶] A. R. Ashrafi, J. Azarija, Kh. Fathalikhani, S. Klavzar and M. Petkovsek. Vertex and edge orbits of Fibonacci and Lucas cubes, Ann. Comb, ۲۰ (۲۰۱۶) ۲۰۹-۲۲۹.A. Graovac, T. Pisanski, On the Wiener index of a graph, J. Math. Chem, ۸ (۱۹۹۱) ۵۳-۶۲.

[۷] A. Castro, S. Klavzar, M. Mollard and Y. Rho. On the domination number and ۲-packing number of Fibonacci cubes and Lucas cubes, Comput. Math. Appl, ۶۱ (۲۰۱۱) ۲۶۵۵-۲۶۶۰.