

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



بژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

خانواده جدید $G*Q$ -لگاریتمی: ویژگی‌ها، رویکردهای برآورد و کاربردها

آرزو امیرزادی^۱، عزت‌اله بالوئی جامخانه^{۱*}، عین‌اله دیری^۱

(^۱) گروه آمار، واحد قائمشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائمشهر، ایران

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۲۲

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۱۵

چکیده

در این مقاله، به معرفی خانواده جدیدی از توزیع‌های طول عمر به نام خانواده $G*Q$ -لگاریتمی، پرداخته و با استفاده از رویکردهای ماکزیمم درست‌نمایی، بیز و E -بیز، برآورد پارامترهای خانواده جدید و هم‌چنین آنالیز تابع قابلیت اطمینان متناظر آن را به دست می‌آوریم. علاوه بر این، برخی ویژگی‌های آماری مانند توابع گشتاور غیرمرکزی، گشتاور ناکامل، مولد گشتاورها و تابع چندکی این خانواده را بررسی و با در نظر گرفتن توزیع پایه وایبل معکوس، دو زیرمدل از این خانواده به نام‌های وایبل معکوس نمایی-لگاریتمی و وایبل معکوس توانی-لگاریتمی را معرفی و ویژگی‌های آماری و برآورد پارامترهای دو مدل جدید معرفی‌شده را ارائه می‌نماییم. در ادامه، با استفاده از رویکرد شبیه‌سازی مونت‌کارلو، روش‌های برآوردیابی را مقایسه می‌نماییم. برتری خانواده جدید معرفی‌شده، در برازش داده‌های واقعی، بر برخی توزیع‌های کلاسیک مانند گاما، وایبل، پارتو، گومپرتز، لیندلی، بور نوع XII ، وایبل معکوس، مارشال الکین-وایبل و وایبل نمایی شده نیز بررسی و گزارش شده است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل لگاریتمی، طول عمر، تابع قابلیت اطمینان، برآوردگر E -بیز، نمونه‌گیری نقاط مهم.

۱- مقدمه

در دو دهه اخیر، توزیع‌های آماری بسیاری برای مدل‌سازی بهتر و منعطف‌تر داده‌های طول عمر معرفی شده‌اند. اکثر توزیع‌های جدید معرفی شده، در واقع بسط و یا اصلاح‌شده‌ی توزیع‌های کلاسیک می‌باشند. در این میان، می‌توان توزیع‌های لگ-گاما- G [۱]، وایبل- X [۲]، لجستیک- G [۳]، وایبل تعمیم‌یافته جدید [۴]، نمایی‌شده تعمیم‌یافته [۵]، نمایی- X [۶]، نمایی- H [۷]، بخت^۱ وایبل معکوس تعمیم‌یافته [۸] و X -گسترش‌یافته [۹] را نام برد.

[۱۰] خانواده لگاریتم-نمایی با نرخ شکست^۳ نزولی

را به صورت زیر معرفی نمودند

$$F(x, \beta, p) = 1 - \frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x})}{\ln(p)},$$

$$0 < p < 1, \beta > 0.$$

همچنین برآورد پارامترهای مدل را با استفاده از EM- الگوریتم محاسبه نمودند.

با الهام از دستاوردهای [۱۰]، توزیع لگاریتم بریده‌شده تعمیم‌یافته-نمایی به همراه آنالیز تابع قابلیت اطمینان^۴، توسط [۱۱] معرفی شده است. آن‌ها با استفاده از روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی (ML^۵)، EM-الگوریتم، گشتاوری و بیزی، به برآورد پارامترهای توزیع جدید پرداختند.

به منظور مدل‌سازی داده‌های پزشکی که چوله به راست می‌باشند، [۱۲] خانواده جدیدی از توزیع‌ها به نام لگاریتم- X منعطف کاهش‌یافته^۶ را ارائه نمودند. این خانواده را می‌توان از طریق دوباره‌پارامترسازی^۷ خانواده‌های کومارساتومی G -لگاریتمی نمایی‌شده و α -لگاریتمی [۱۳] به دست آورد. [۱۴] روش نوینی برای تولید

توزیع‌ها به نام روش تبدیلات لگاریتمی معرفی نموده است. اخیراً [۱۵] مولد جدیدی برای تولید خانواده جدیدی از توزیع‌ها به نام تبدیلات لگ-نمایی^۸ (LET) را معرفی نمودند و توزیع‌های پایه مختلفی از قبیل فرشه^۹، نمایی، لومکس را در نظر گرفته و به طور ویژه به بررسی توزیع جدید LET-فرشه پرداختند.

[۱۶] توزیع آمیخته کومارساتومی سه مولفه‌ای را معرفی نموده و به مبحث استنباط بیزی پارامترهای مدل، تحت سانسور نوع اول پرداختند. از آنجایی که برآوردهای بیزی دارای فرم بسته‌ای نمی‌باشند، لذا الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم را به کار بردند.

در متون آماری، زمانی که حوزه تغییرات پارامترها روی فضای پارامتر، وسیع باشد، علاوه بر روش برآورد بیز سلسله مراتبی، روش دیگری به نام روش بیز-مورد انتظار^{۱۰} (E) بیز) معرفی و به کار برده شده که نسبت به روش بیز از برتری آماری و خطای برآورد کمتری برخوردار می‌باشد و توسط بسیاری از نویسندگان مورد توجه و بررسی واقع شده است.

[۱۷] به بررسی روش‌های برآورد ماکزیمم درست‌نمایی، بیزی و E-بیز پارامترها و تابع قابلیت اطمینان توزیع بور- X تحت سانسور هیبرید نوع دوم تعمیم‌یافته پرداختند. [۱۸] به برآورد بایی پارامتر مقیاس، تابع قابلیت اطمینان و تابع نرخ مخاطره^{۱۱} توزیع چن، با رویکرد E-بیز، توجه نموده و از تابع زیان مربع خطا متعادل^{۱۲} و توزیع پیشین مزدوج گاما بهره بردند. [۱۹] با استفاده از روش E-بیز، به برآورد تابع پارامتری توزیع نمایی معکوس تعمیم‌یافته تحت تابع زیان مربع خطا پرداختند. آن‌ها بر اساس توابع پیشین

^۷ Reparameterization

^۸ Log-Expo Transformation

^۹ Fréchet

^{۱۰} Expected-Bayesian

^{۱۱} Hazard Rate

^{۱۲} Balanced

^۱ Odd

^۲ Extended

^۳ Failure Rate

^۴ Reliability Function

^۵ Maximum Likelihood

^۶ Flexible Reduced Logarithmic-X

چندکی را به دست می‌آوریم. بخش ۳ به روش‌های مختلف برآورد پارامترهای خانواده جدید مدنظر اختصاص می‌یابد و بخش ۴، به معرفی و برآورد تابع قابلیت اطمینان خانواده جدید از توزیع‌ها معطوف می‌باشد. در بخش ۵، دو زیر مدل از خانواده جدید به همراه ویژگی‌های آماری توزیع‌ها و روش‌های برآورد پارامترها به طور جامع ارائه می‌گردد. دو توزیع مدنظر دارای تابع نرخ مخاطره وان شکل وارون می‌باشند. در بخش ۶، با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده از دو توزیع جدید، به بررسی روش‌های مختلف برآورد پارامترها و تابع قابلیت اطمینان می‌پردازیم. در پایان در بخش ۷، با استفاده از داده واقعی، کارایی خانواده جدید در برازش و مدل‌سازی داده‌ها در مقایسه با برخی توزیع‌های کلاسیک، محک می‌زنیم.

۲- معرفی خانواده G^*Q -لگاریتمی

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $Q(x, \alpha, \gamma)$ و تابع چگالی احتمال $q(x, \alpha, \gamma)$ می‌باشد. سپس با استفاده از تبدیل لگاریتمی و بر اساس توزیع پایه $Q(x, \alpha, \gamma)$ ، خانواده جدید از توزیع‌های طول عمر را به صورت زیر معرفی می‌کنیم که آن را G^*Q -لگاریتمی (G^*Q-L) می‌نامیم.

$$F(x, \alpha, \gamma, p, \beta) \quad (1)$$

$$= 1 - \frac{\ln(1 - (1-p)G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta))}{\ln(p)},$$

$$0 < p < 1, x, \alpha, \beta, \gamma > .$$

که در آن تابع $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta)$ ، تابعی از $Q(x, \alpha, \gamma)$ و پارامتر β می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند

گوناگونی از ابرپارامترها^{۱۲}، تاثیر انتخاب توزیع پیشین بر روی دقت برآورد را بررسی نمودند.

در علوم پزشکی و مهندسی، با مشاهداتی روبرو می‌شویم که نرخ مخاطره آن‌ها در ابتدا تا رسیدن به نقطه اوج در زمان‌های آغازین، افزایش می‌یابد و ناگهان کاهش می‌یابد تا به یک مقدار ثابتی دست یابد. توابع نرخ مخاطره با این ویژگی‌های رفتاری را نرخ مخاطره وان شکل وارون^{۱۴} می‌نامند و در مدل‌سازی داده‌های طول عمر و بقا کاربرد فراوانی دارد. توزیع‌های گوناگونی با نرخ مخاطره وان شکل وارون معرفی شده است از قبیل توزیع وایبل معکوس تبدیل‌یافته^{۱۵} [۲۰]، توزیع توانی آلفا لومکس [۲۱] و رایلی معکوس نمایی شده [۲۲].

در این مقاله، بنا بر نیاز مدل‌سازی داده‌های طول عمر، با استفاده از توزیع‌های منعطف‌تر با برازش بهتر، به معرفی خانواده جدیدی از توزیع‌ها می‌پردازیم و به عنوان دو زیرمدل خاص از آن، دو توزیع جدید آماری را معرفی می‌نماییم. روش‌های برآورد گوناگونی از قبیل ماکزیمم درستنمایی، بیزی و E-بیزی برای پارامترهای مدل در نظر گرفته شده است. جنبه دیگری که در این مقاله به آن به طور جامع پرداخته شده است، آنالیز تابع قابلیت اطمینان خانواده جدید می‌باشد. با استفاده از روش‌های برآورد مذکور، تابع قابلیت اطمینان را برآورد نموده و بهترین روش برآورد را معرفی می‌نماییم. هم‌چنین با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده به ارائه بهترین و دقیق‌ترین روش برآورد بر مبنای ریشه میانگین مربعات خطا ($RMSE^{16}$) می‌پردازیم.

در بخش ۲، خانواده جدید G^*Q -لگاریتمی را معرفی نموده و برخی ویژگی‌های آماری آن مانند گشتاور غیرمرکزی، گشتاور ناکامل، تابع مولد گشتاور و تابع

^{۱۱} Root Mean Squared Error

^{۱۲} Hyperparameter

^{۱۴} Upside-down Bathtub Shape

^{۱۵} Transmuted

اگر $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) = \frac{1-Q(x, \alpha, \gamma)^\beta}{1+Q(x, \alpha, \gamma)^\beta}$ باشد به

خانواده توزیع حاصل شده، خانواده Q توانی - لگاریتمی^{۲۲} (PQ-L) می‌گوییم.

اگر $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) = \frac{Q(x, \alpha, \gamma)^\beta}{Q(x, \alpha, \gamma)^\beta + Q(x, \alpha, \gamma)}$

باشد به خانواده توزیع حاصل شده، خانواده Q نسبت

بخت-لگاریتمی^{۲۳} (ORQ-L) می‌گوییم.

اکنون توزیع پایه زیر را در نظر بگیرید

$$Q(x, \alpha, \gamma) = e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \quad x > 0. \quad (2)$$

که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است

$$q(x, \alpha, \gamma) = -\alpha\phi'(x, \gamma)e^{-\alpha\phi(x, \gamma)},$$

و در آن $\phi(x, \gamma)$ تابع اکیدا نزولی با $\phi(\infty, \gamma) = 0$ و

$$\phi(0, \gamma) = \infty \text{ می‌باشد.}$$

توزیع پایه (۲) خانواده گسترده‌ای از توزیع‌های طول عمر

را در بر می‌گیرد. با انتخاب‌های متفاوت تابع $\phi(x, \gamma)$.

توزیع‌های آماری مختلفی حاصل می‌گردد. به‌عنوان مثال

با انتخاب $\phi(x, \gamma) = x^{-1}$ ، توزیع نمایی معکوس، با

$\phi(x, \gamma) = x^{-\gamma}$ ، توزیع وایبل معکوس، با

$\phi(x, \gamma) = e^{x^{-\gamma}} - 1$ ، توزیع رایلی معکوس، با

توزیع چن معکوس، با $\phi(x, \gamma) = \log(1 + \frac{\gamma}{x})$

لومکس معکوس، با $\phi(x, \gamma) = e^{x^{\frac{1}{\gamma}}(\frac{\gamma}{x}+1)}$ ، توزیع

گومپرتز معکوس و با $\phi(x, \gamma) = \log(1 + \frac{1}{x^\gamma})$ ، توزیع

بور معکوس به دست می‌آید.

با استفاده از توزیع پایه (۲)، کلاس توزیع‌های جدید (۱)

به صورت زیر حاصل می‌شود که آن را ϕG^* -لگاریتمی

($G^* \phi$ -L) می‌نامیم

$$F(x, \theta) = 1 - \frac{\ln(1 - (1-p)G(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta))}{\ln(p)}$$

$$1 - G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) \in [0, 1]$$

۲- تابع $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta)$ مشتق‌پذیر و یکنوا

(غیرصعودی) می‌باشد.

۳- اگر $x \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) \rightarrow 0$ و

اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) \rightarrow 1$.

با در نظر گرفتن بردار پارامتر $\theta = (\alpha, \gamma, p, \beta)$ ، تابع

PDF در خانواده جدید به صورت زیر به دست می‌آید

$$f(x, \theta) = \frac{(1-p)q(x, \alpha, \gamma)g(Q(x, \alpha, \gamma), \beta)}{(1 - (1-p)G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta)) \ln(p)}$$

که در آن $g(\cdot)$ مشتق تابع $G(\cdot)$ می‌باشد.

تذکر ۱. اگر $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) = 1 - Q(x, \alpha, \gamma)^\beta$

باشد به خانواده توزیع حاصل شده، خانواده Q نمایی شده-

لگاریتمی^{۱۷} گفته می‌شود و اگر در آن $\beta = 1$ باشد، آن‌گاه

به خانواده توزیع حاصل شده، خانواده Q-لگاریتمی^{۱۸} گفته

می‌شود [۲۳].

اگر $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) = 1 - (1 - (1 -$

$(Q(x, \alpha, \gamma)^\beta)^\xi)^\eta$ باشد به خانواده توزیع حاصل شده،

خانواده Q کوماراسوامی نمایی شده-لگاریتمی^{۱۹} (EKu

Q-L) گفته می‌شود و اگر در آن $\eta = 1$ باشد آنگاه به

خانواده توزیع حاصل شده، خانواده Q کاماراسوامی-

لگاریتمی^{۲۰} (Ku Q-L) گفته می‌شود [۲۳].

اگر $G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) = e^{-\beta Q(x, \alpha, \gamma)}$ باشد، به

خانواده توزیع حاصل شده، خانواده Q نمایی-لگاریتمی^{۲۱}

(EQ-L) می‌گوییم.

^{۲۱} Exponential Q-Logarithmic

^{۲۲} Power Q-Logarithmic

^{۲۳} Odd Ratio Q-Logarithmic

^{۱۷} Exponentated Q-Logarithmic

^{۱۸} Q-Logarithmic

^{۱۹} Exponentiated Kumaraswamy Q-Logarithmic

^{۲۰} Kumaraswamy Q-Logarithmic

۲.۲ برخی ویژگی‌های آماری خانواده G*Q-L

در این بخش، برخی ویژگی‌های آماری خانواده G*Q-L از قبیل تابع گشتاور غیرمرکزی، گشتاور ناکامل، مولد گشتاور (MGF^r) و تابع چندکی ارائه می‌گردد.
گزاره ۱ تابع گشتاور غیرمرکزی مرتبه r-ام خانواده G*Q-L به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\mu'_r = \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{k+1} (-\alpha)^{h+1}}{h!} \kappa(r, h),$$

که در آن

$$\kappa(r, h) = \int_0^{\infty} x^r \phi'(x, \gamma) g(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta) G^k(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta) \phi^h(x, \gamma) dx.$$

اثبات: با توجه به نمایش آمیخته تابع PDF از خانواده G*Q-L، گشتاور غیرمرکزی مرتبه r-ام به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \mu'_r = E(X^r) &= \frac{-\alpha}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+1} \\ &\int_0^{\infty} x^r \phi'(x, \gamma) e^{-\alpha\phi(x, \gamma)} g(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta) \\ &G^k(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta) dx \\ &= \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{k+1} (-\alpha)^{h+1}}{h!} \\ &\int_0^{\infty} x^r \phi'(x, \gamma) g(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta) \\ &G^k(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta) \phi^h(x, \gamma) dx, \end{aligned}$$

با جایگذاری $\kappa(r, h)$ اثبات کامل می‌شود.

ملاحظه ۱ گشتاور ناکامل خانواده G*Q-L به صورت زیر ارائه می‌شود

$$m_r(y) = \frac{1}{\ln(p)}$$

$$0 < p < 1, x, \alpha, \beta, \gamma > 0,$$

که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر می‌باشد

$$f(x, \theta) = \frac{-\alpha(1-p)\phi'(x, \gamma)e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}g(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta)}{(1-(1-p)G(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta))\ln(p)}$$

که در آن $\phi'(x, \gamma)$ مشتق تابع $\phi(x, \gamma)$ می‌باشد.

۱.۲ نمایش آمیخته‌ای از تابع PDF خانواده

G*Q-L

در این بخش، نمایش آمیخته‌ای از تابع PDF خانواده G*Q-L را به دست آورده که در محاسبه برخی ویژگی‌های آماری این خانواده به کار برده می‌شود. نمایش آمیخته تابع PDF به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{-\alpha(1-p)\phi'(x, \gamma)e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}g(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta)}{(1-(1-p)G(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta))\ln(p)} \\ &= \frac{-\alpha\phi'(x, \gamma)e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}g(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta)}{\ln(p)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+1} G^k(e^{-\alpha\phi(x, \gamma)}, \beta) \\ &= \frac{q(x, \alpha, \gamma)g(Q(x, \alpha, \gamma), \beta)}{\ln(p)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+1} G^k(Q(x, \alpha, \gamma), \beta). \end{aligned}$$

همان‌طور که مشهود است، تابع PDF خانواده G*Q-

L را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از تابع پارامتری

$\left(\frac{1}{\ln(p)}\right)$ ، تابع $q(x, \alpha, \gamma)g(Q(x, \alpha, \gamma), \beta)$ و

مجموع موزون $((1-p)^{k+1})$ سری توانی تابع

$G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta)$ به نگارش درآورد.

۳- روش‌های مختلف برآورد پارامترهای خانواده G*Q-L

در این بخش، چندین روش مختلف برآورد پارامترهای خانواده G*Q-L مانند روش‌های برآورد ماکزیمم درستنمایی، بیزی و E-بیزی را مطرح می‌نماییم. در بخش شبیه‌سازی، عملکرد روش‌های مختلف برآورد را نیز توسط رویکرد شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه خواهیم نمود.

۱.۳ برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی

متغیرهای تصادفی $X = X_1, \dots, X_n$ و توزیع پایه $Q(x, \alpha, \gamma)$ را با پارامترهای α و γ ، در نظر بگیرید، تابع لگاریتم-درستنمایی خانواده G*Q-L به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \underline{X}) &= n \ln(\alpha) + n \ln(1-p) \quad (3) \\ &- n \ln(-\ln(p)) + \sum_{i=1}^n \ln(-\phi'(x_i, \gamma)) \\ &- \alpha \sum_{i=1}^n \phi(x_i, \gamma) + \sum_{i=1}^n \ln(-g(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)) \\ &- \sum_{i=1}^n \ln(1 - (1-p)G(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)). \end{aligned}$$

برآوردگرهای ML پارامترهای نامعلوم با مساوی صفر قرار دادن معادلات نرمال تابع لگاریتم درستنمایی (۳) به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \phi(x_i, \gamma) \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{\phi(x_i, \gamma) e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)} \frac{\partial g(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{\partial \alpha}}{g(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)} \\ &- (1-p). \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\phi(x_i, \gamma) e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)} \frac{\partial g(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{\partial \alpha}}{1 - (1-p)G(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{k+1} (-\alpha)^{h+1}}{h!} \int_0^y x^r \phi'(x, \gamma) g(e^{-\alpha \phi(x, \gamma)}, \beta) G^k(e^{-\alpha \phi(x, \gamma)}, \beta) \phi^h(x, \gamma) dx.$$

اثبات: بر اساس تعریف تابع گشتاور ناقص به صورت $m_r(y) = \int_0^y x^r f(x) dx$ اثبات بدیهی است.

گزاره ۲ تابع مولد گشتاور خانواده G*Q-L به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$M_X(t) = \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{k+1} (-\alpha)^{h+1} t^l}{h! l!} \kappa(l, h).$$

اثبات: با توجه به تعریف MGF و بسط تیلور $e^{tx} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l x^l}{l!}$ داریم

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{k+1} (-\alpha)^{h+1}}{h!} \\ &\int_0^{\infty} e^{tx} \phi'(x, \gamma) g(e^{-\alpha \phi(x, \gamma)}, \beta) G^k(e^{-\alpha \phi(x, \gamma)}, \beta) \phi^h(x, \gamma) dx \\ &= \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{k+1} (-\alpha)^{h+1} t^l}{h! l!} \\ &\int_0^{\infty} x^l \phi'(x, \gamma) g(e^{-\alpha \phi(x, \gamma)}, \beta) G^k(e^{-\alpha \phi(x, \gamma)}, \beta) \phi^h(x, \gamma) dx \\ &= \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{k+1} (-\alpha)^{h+1} t^l}{h! l!} \kappa(l, h). \end{aligned}$$

تعریف ۱ تابع چندکی خانواده G*Q-L به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$x = \phi^{-1} \left(\frac{-1}{\alpha} \ln \left(G^{-1} \left(\frac{1-p^{1-u}}{1-p}, \beta \right) \right), \gamma \right).$$

$$\pi_{\gamma}(\gamma|a_{\gamma}, b_{\gamma}) = \frac{b_{\gamma}^{a_{\gamma}} \gamma^{a_{\gamma}-1} e^{-b_{\gamma}\gamma}}{\Gamma(a_{\gamma})},$$

$$\pi_{\gamma}(p|a_{\gamma}, b_{\gamma}) = \frac{\Gamma(a_{\gamma} + b_{\gamma})}{\Gamma(a_{\gamma})\Gamma(b_{\gamma})} p^{a_{\gamma}-1}$$

$$(1-p)^{b_{\gamma}-1},$$

$$\pi_{\beta}(\beta|a_{\beta}, b_{\beta}) = \frac{b_{\beta}^{a_{\beta}} \beta^{a_{\beta}-1} e^{-b_{\beta}\beta}}{\Gamma(a_{\beta})},$$

که در آن $a_i, b_i, i = 1, 2, 3, 4$ ابرپارامترهای معلوم هستند و طوری انتخاب می‌شوند که گویای اطلاعات پیشین درباره پارامترهای α, γ, β باشد. یادآور می‌شویم که با انتخاب $a_i = b_i = \cdot$ به توزیع پیشین ناآگاهی بخش برای پارامترها دست می‌یابیم.

توزیع توام پیشین پارامترها به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\pi(\theta) = \pi_{\alpha}(\alpha|a_{\alpha}, b_{\alpha})\pi_{\gamma}(\gamma|a_{\gamma}, b_{\gamma})\pi_{\beta}(\beta|a_{\beta}, b_{\beta})$$

$$\pi_{\beta}(\beta|a_{\beta}, b_{\beta}).$$

با توجه به توزیع توام پیشین و (۲)، تابع چگالی پسین

پارامترهای α, γ, β و p به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\pi(\theta|\underline{X}) \propto \alpha^{n+a_{\alpha}-1} e^{-\alpha(b_{\alpha} + \sum_{i=1}^n \phi(x_i, \gamma))} \gamma^{a_{\gamma}-1}$$

$$e^{-b_{\gamma}\gamma} p^{a_{\gamma}-1} (1-p)^{n+b_{\gamma}-1} \beta^{a_{\beta}-1} e^{-b_{\beta}\beta}$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\phi'(x_i, \gamma) g(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{(1 - (1-p)G(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)) (-\ln(p))}$$

$$\propto G_{\gamma}(a_{\gamma}, b_{\gamma}) G_{\beta}(a_{\beta}, b_{\beta}) B_p(a_{\gamma}, b_{\gamma} + n)$$

$$G_{\alpha|\gamma} \left(a_{\alpha} + n, b_{\alpha} + \sum_{i=1}^n \phi(x_i, \gamma) \right) W(\theta),$$

که در آن $G(\cdot, \cdot)$ و $B(\cdot, \cdot)$ ، به ترتیب بیانگر تابع PDF گاما و بتا می‌باشد و تابع $W(\theta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial \phi'(x_i, \gamma)}{\partial \gamma}}{\phi'(x_i, \gamma)} - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial \phi(x_i, \gamma)}{\partial \gamma}}{\phi(x_i, \gamma)}$$

$$- \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial \phi(x_i, \gamma)}{\partial \gamma} e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)} \frac{\partial g(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{\partial \gamma}}{g(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)} - \alpha(1-p)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial \phi(x_i, \gamma)}{\partial \gamma} e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)} \frac{\partial G(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{\partial \gamma}}{1 - (1-p)G(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)} = \cdot,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial p} = \frac{-n}{1-p} + \frac{n}{p \ln(p)}$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{G(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{1 - (1-p)G(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)} = \cdot,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial g(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{\partial \beta}}{g(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)} + (1-p).$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial G(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{\partial \beta}}{1 - (1-p)G(e^{-\alpha\phi(x_i, \gamma)}, \beta)} = \cdot.$$

۳.۲ برآوردگرهای بیزی

در این بخش، به معرفی برآوردگرهای بیزی پارامترهای α, γ, β و p برای خانواده G*Q-L می‌پردازیم. به منظور محاسبه برآوردگرهای بیزی، تابع زیان مربع خطا (SEL^{۲۵}) را به کار خواهیم برد. برای پارامترهای مستقل α, γ, β توزیع پیشین گاما و برای پارامتر p ، توزیع پیشین بتا را در نظر می‌گیریم. توابع توزیع پیشین پارامترها به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\pi_{\alpha}(\alpha|a_{\alpha}, b_{\alpha}) = \frac{b_{\alpha}^{a_{\alpha}} \alpha^{a_{\alpha}-1} e^{-b_{\alpha}\alpha}}{\Gamma(a_{\alpha})},$$

^{۲۵} Squared Error Loss

$$\begin{aligned} & \gamma a_{\gamma}^{-\gamma} e^{-b_{\gamma} \gamma} [(a_{\gamma} - 1) - b_{\gamma} \gamma], \\ \frac{\partial \pi_{\gamma}(p|a_{\gamma}, b_{\gamma})}{\partial p} &= p a_{\gamma}^{-\gamma} (1-p) b_{\gamma}^{-\gamma} \\ & [(a_{\gamma} - 1)(1-p) - p(b_{\gamma} - 1)], \\ \frac{\partial \pi_{\gamma}(\beta|a_{\gamma}, b_{\gamma})}{\partial \beta} &= \\ & \beta a_{\gamma}^{-\gamma} e^{-b_{\gamma} \beta} [(a_{\gamma} - 1) - b_{\gamma} \beta]. \end{aligned}$$

بنابراین با انتخاب ابرپارامترها در بازه‌های زیر، آن‌گاه
 $\pi_{\gamma}(p|a_{\gamma}, b_{\gamma})$ ، $\pi_{\gamma}(\gamma|a_{\gamma}, b_{\gamma})$ ، $\pi_{\gamma}(\alpha|a_{\gamma}, b_{\gamma})$
 $\pi_{\gamma}(\beta|a_{\gamma}, b_{\gamma})$ تابعی نزولی از پارامترهای متناظر
 می‌باشند

$$0 < a_{\gamma}, a_{\gamma}, a_{\gamma}, a_{\gamma} < 1, \quad b_{\gamma}, b_{\gamma}, b_{\gamma}, b_{\gamma} > 0.$$

با در نظر گرفتن ابرپارامترهای مستقل، $i = 1, 2, 3, 4$ ،
 b_i و a_i با توابع چگالی به ترتیب به صورت $\pi'(b_i)$
 و $\pi'(a_i)$ ، تابع چگالی توأم ابرپارامترها به صورت زیر ارائه
 می‌شود

$$\pi'_{\gamma}(a_i, b_i) = \pi'(a_i) \pi'(b_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

طبق [۲۴] مقادیر بزرگ b_i ، منجر به کاهش کارایی
 برآوردگر E-بیز می‌شود. لذا ضروری است که پارامتر b_i
 از بالا کران‌دار در نظر گرفته شود. در ادامه S_i را به عنوان
 کران بالای b_i در نظر می‌گیریم. آن‌گاه، برآوردگر E-بیز
 پارامترهای α, γ, β و امید برآورد بیزی پارامترها) به
 صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{EB} &= E(\hat{\alpha}^B | X) \\ &= \int_0^1 \int_0^{S_1} \hat{\alpha}^B \pi'_{\gamma}(a_{\gamma}, b_{\gamma}) db_{\gamma} da_{\gamma}, \\ \hat{\gamma}^{EB} &= E(\hat{\gamma}^B | X) \\ &= \int_0^1 \int_0^{S_{\gamma}} \hat{\gamma}^B \pi'_{\gamma}(a_{\gamma}, b_{\gamma}) db_{\gamma} da_{\gamma}, \\ \hat{p}^{EB} &= E(\hat{p}^B | X) \\ &= \int_0^1 \int_0^{S_p} \hat{p}^B \pi'_{\gamma}(a_{\gamma}, b_{\gamma}) db_{\gamma} da_{\gamma}, \end{aligned}$$

$$W(\theta) = \quad (۴)$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\phi'(x_i, \gamma) g(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)}{\left(1 - (1-p)G(e^{-\alpha \phi(x_i, \gamma)}, \beta)\right) (-\ln(p))}$$

یادآور می‌شویم که برآوردگر بیز تابع $A(\eta)$ تحت SEL
 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{A}^B(\eta) = E(A(\eta) | \underline{X}).$$

همان‌طور که مشهود است، عبارت فوق برای خانواده
 G*Q-L فرم بسته‌ای ندارد. لذا از روش نمونه‌گیری نقاط
 مهم^{۲۶} استفاده می‌نماییم. روش نمونه‌گیری نقاط مهم،
 روشی مناسب برای تولید نمونه‌هایی از توزیع پسین متناظر
 می‌باشد. روند کلی نمونه‌گیری نقاط مهم برای برآوردگر
 بیز از خانواده G*Q-L برای دو حالت خاص از این
 خانواده، در ادامه بحث می‌شود.

۳.۳ برآوردگرهای E-بیزی

در این بخش به محاسبه برآورد E-بیز پارامترهای خانواده
 G*Q-L می‌پردازیم. لازم به ذکر است که برای
 پارامترهای مستقل α, γ, β توزیع‌های پیشین گاما و
 برای پارامتر p توزیع پیشین بتا را در نظر خواهیم گرفت.
 لازم است پارامترهای پیشین α, γ, β و p به گونه‌ای
 انتخاب شوند تا به ترتیب، توزیع‌های پیشین
 $\pi_{\gamma}(p|a_{\gamma}, b_{\gamma})$ ، $\pi_{\gamma}(\gamma|a_{\gamma}, b_{\gamma})$ ، $\pi_{\gamma}(\alpha|a_{\gamma}, b_{\gamma})$
 و $\pi_{\gamma}(\beta|a_{\gamma}, b_{\gamma})$ تابعی نزولی از پارامترهای α, γ, β
 باشد. بدین منظور، مشتق مرتبه اول توابع پیشین را نسبت
 به پارامترهای متناظر محاسبه می‌نماییم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_{\gamma}(\alpha|a_{\gamma}, b_{\gamma})}{\partial \alpha} &= \\ & \alpha a_{\gamma}^{-\gamma} e^{-b_{\gamma} \alpha} [(a_{\gamma} - 1) - b_{\gamma} \alpha], \\ \frac{\partial \pi_{\gamma}(\gamma|a_{\gamma}, b_{\gamma})}{\partial \gamma} &= \end{aligned}$$

^{۲۶} Importance Sampling

توزیع‌های پیشین فوق به گونه‌ای انتخاب شده‌اند تا توزیع‌های پیشین پارامترهای α, γ, β و p ، نسبت به پارامترها نزولی باشند.

همانند برآوردگرهای بی‌زی، برآوردگرهای E-بیز نیز فرم بسته‌ای ندارند. بنابراین، برآوردگرهای E-بیز پارامترهای α, γ, β و p را توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم به دست می‌آوریم. الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برای دو حالت خاص از خانواده G*Q-L تحت توابع پیشین گروه اول ابرپارامترها را به صورت $\pi'_{11}(a_1, b_1)$ ، $\pi'_{21}(a_2, b_2)$ ، $\pi'_{31}(a_3, b_3)$ و $\pi'_{41}(a_4, b_4)$ ارائه می‌نماییم. الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم تحت توابع پیشین گروه دوم به راحتی مشابه با الگوریتم اول حاصل می‌گردد و در این‌جا به منظور خلاصه‌نویسی ارائه نشده است.

۴- آنالیز قابلیت اطمینان

تابع قابلیت اطمینان یکی از توابع پرکاربرد در آنالیز قابلیت اطمینان و داده‌های طول عمر می‌باشد. از این‌رو ضروری است که به بحث جامعی پیرامون برآورد تابع قابلیت اطمینان توجه ویژه‌ای شود. تابع قابلیت اطمینان در محاسبه توابعی بسیاری از قبیل آماره‌های ترتیبی، تابع عدم اطمینان، قابلیت اطمینان شرطی و تابع مخاطره کاربرد دارد. در این بخش به معرفی تابع قابلیت اطمینان و برآورد آن می‌پردازیم.

۴.۱ تابع قابلیت اطمینان و روش‌های برآوردیابی

خانواده G*Q-L از توزیع‌های طول عمر را در نظر بگیرید، توابع قابلیت (بقا^{۲۷}) و نرخ مخاطره آن، به ترتیب به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\hat{\beta}^{EB} = E(\hat{\beta}^B | X) = \int \int \hat{\beta}^B \pi'_{\varphi}(a_{\varphi}, b_{\varphi}) db_{\varphi} da_{\varphi},$$

که در آن $\hat{\beta}^B, \hat{\gamma}^B, \hat{\alpha}^B$ و \hat{p}^B برآورد‌های بیز پارامترهای β, γ, α و p تحت SEL می‌باشند.

برآوردگر E-بیز پارامترها، براساس دو تابع توزیع پیشین مختلف از ابرپارامترها، را به دست می‌آوریم. متعاقباً، توزیع‌های پیشین ابرپارامترها نیز به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که نمایانگر تاثیر توزیع‌های پیشین مختلف بر روی برآوردگرهای E-بیز پارامترها باشد. در این‌جا، توزیع‌های پیشین مدنظر، در دو گروه مختلف، به صورت زیر می‌باشند. توابع توزیع پیشین گروه اول ابرپارامترها

$$\pi'_{11}(a_1, b_1) = \frac{a_1^{u_1-1} (1-a_1)^{v_1-1}}{s_1 B(u_1, v_1)}, \quad (5)$$

$$\pi'_{21}(a_2, b_2) = \frac{a_2^{u_2-1} (1-a_2)^{v_2-1}}{s_2 B(u_2, v_2)},$$

$$\pi'_{31}(a_3, b_3) = \frac{a_3^{u_3-1} (1-a_3)^{v_3-1}}{s_3 B(u_3, v_3)},$$

$$\pi'_{41}(a_4, b_4) = \frac{a_4^{u_4-1} (1-a_4)^{v_4-1}}{s_4 B(u_4, v_4)},$$

و توابع توزیع پیشین گروه دوم ابرپارامترها به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\pi'_{12}(a_1, b_1) = \quad (6)$$

$$\frac{\gamma(s_1 - b_1) a_1^{u_1-1} (1-a_1)^{v_1-1}}{s_1^{\gamma} B(u_1, v_1)},$$

$$\pi'_{22}(a_2, b_2) = \frac{\gamma(s_2 - b_2) a_2^{u_2-1} (1-a_2)^{v_2-1}}{s_2^{\gamma} B(u_2, v_2)},$$

$$\pi'_{32}(a_3, b_3) = \frac{\gamma(s_3 - b_3) a_3^{u_3-1} (1-a_3)^{v_3-1}}{s_3^{\gamma} B(u_3, v_3)},$$

$$\pi'_{42}(a_4, b_4) = \frac{\gamma(s_4 - b_4) a_4^{u_4-1} (1-a_4)^{v_4-1}}{s_4^{\gamma} B(u_4, v_4)}.$$

^{۲۷} Survival

برآوردگرهای E -بیز تابع قابلیت اطمینان خانواده G^*Q به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\hat{R}(t)^{EB} &= E(\hat{R}(t)^B | X) \\ &= \hat{R}(t)^B \pi'(a, b) \\ &\pi'(a, b) \pi'(a, b) \pi'(a, b) da db,\end{aligned}$$

که در آن $\hat{R}(t)^B$ برآورد بیز تابع قابلیت اطمینان تحت تابع SEL ، $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

$$S = \{(a_i, b_i), i = 1, 2, 3, 4 | 0 < a_i < 1, b_i > 0\}$$

می‌باشد.

براساس الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآورد E -بیز پارامترها، برآورد E -بیز تابع قابلیت اطمینان به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\hat{R}(t)^{EB} = \frac{\sum_{i=1}^Z W(\theta_i) \left(\frac{\ln(1 - (1-p_i)G(e^{-\alpha_i \phi(t, \gamma_i), \beta_i})}{\ln(p_i)} \right)}{\sum_{i=1}^Z W(\theta_i)}$$

۵- زیر مدل‌هایی از خانواده G^*Q-L

در این بخش، دو زیرمدل از خانواده G^*Q-L را در نظر می‌گیریم و ویژگی‌های آماری دو توزیع جدید و روش‌های برآورد پارامترهای توزیع و تابع قابلیت اطمینان را به دست می‌آوریم.

۵.۱ معرفی توزیع $EIW-L$

با فرض $\phi(x, \gamma) = x^{-\gamma}$ توزیع پایه وایبل معکوس زیر را در نظر می‌گیریم

$$Q(x, \alpha, \gamma) = e^{-\alpha \phi(x, \gamma)} = e^{-\alpha x^{-\gamma}},$$

$$R(t, \theta) = \frac{\ln(1 - (1-p)G(e^{-\alpha \phi(x, \gamma), \beta}))}{\ln(p)},$$

$$h(t, \theta) = \frac{-\alpha(1-p)\phi'(x, \gamma)e^{-\alpha \phi(x, \gamma)}g(e^{-\alpha \phi(x, \gamma), \beta})}{(1 - (1-p)G(e^{-\alpha \phi(x, \gamma), \beta})) \ln(1 - (1-p)G(e^{-\alpha \phi(x, \gamma), \beta}))}$$

نتیجه ۱ با توجه به ویژگی پایایی برآوردگرهای ML پارامترهای مدل، برآوردگر تابع قابلیت اطمینان براساس روش ML به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{R}_{ML}(t) = \frac{\ln(1 - (1 - \hat{p}_{ML})G(e^{-\hat{\alpha}_{ML}\phi(t, \hat{\gamma}_{ML}), \hat{\beta}_{ML}}))}{\ln(\hat{p}_{ML})}$$

که در آن $(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML}, \hat{p}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})$ برآوردگرهای ML پارامترها می‌باشند که با استفاده از نرم‌افزارهای آماری محاسبه می‌شوند.

نتیجه ۲ با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p ، تحت تابع SEL و الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برای برآوردگرهای بیزی، برآورد بیز تابع قابلیت اطمینان خانواده G^*Q-L به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\hat{R}(t)^B = \frac{\sum_{i=1}^Z W(\theta_i) \left(\frac{\ln(1 - (1-p_i)G(e^{-\alpha_i \phi(t, \gamma_i), \beta_i})}{\ln(p_i)} \right)}{\sum_{i=1}^Z W(\theta_i)}$$

تابع $W(\theta_i)$ در رابطه (۴) معرفی شده است.

نتیجه ۳ توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p ، تحت تابع SEL را در نظر بگیرید. با فرض استقلال ابرپارامترهای $a_i, b_i, i = 1, 2, 3, 4$ و $0 < a_i < 1, b_i > 0$ آن‌گاه

هم‌چنین

گزاره ۳ تابع گشتاور غیرمرکزی مرتبه r -ام خانواده

EIW-L به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\mu'_r = \frac{\alpha\beta}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h}{h! (\alpha(h+1))^{\frac{-r}{\gamma}+1}}$$

$$\Gamma\left(1 - \frac{r}{\gamma}\right).$$

اثبات: با توجه به نمایش آمیخته تابع PDF از خانواده EIW-L، گشتاور غیرمرکزی مرتبه r -ام به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mu'_r = E(X^r)$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h}{h!}$$

$$\int_0^{\infty} x^{r-\gamma-1} e^{-\alpha(h+1)x^{-\gamma}} dx,$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = \alpha(h+1)x^{-\gamma}$ و $du = -\gamma\alpha(h+1)x^{-\gamma-1}$ داریم

$$\mu'_r = \frac{\alpha\beta}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h}{h!}$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\alpha(h+1)}\right)^{\frac{-r}{\gamma}} \frac{e^{-u}}{\alpha(h+1)} du$$

$$= \frac{\alpha\beta}{-\ln(p)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h}{h! (\alpha(h+1))^{\frac{-r}{\gamma}+1}} \Gamma\left(1 - \frac{r}{\gamma}\right).$$

ملاحظه ۲ گشتاور ناکامل خانواده EIW-L به صورت زیر ارائه می‌شود

$$m_r(y) = \frac{\alpha\beta}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h}{h! (\alpha(h+1))^{\frac{-r}{\gamma}+1}}$$

$$\int_0^y u^{\frac{-r}{\gamma}} e^{-u} du.$$

$$G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) = e^{-\beta Q(x, \alpha, \gamma)}$$

$$= e^{-\beta e^{-\alpha x^{-\gamma}}}.$$

توزیع وایبل معکوس نمایی-لگاریتمی (${}^{\gamma}\text{EIW-L}$) به صورت زیر معرفی می‌شود

$$F(x, \theta) = 1 - \frac{\ln\left(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x^{-\gamma}}}\right)}{\ln(p)},$$

$$0 < p < 1, \alpha, \gamma, \beta > 0.$$

تابع PDF توزیع EIW-L به صورت زیر به دست می‌آید

$$f(x, \theta) =$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma(1-p)x^{-\gamma-1}e^{-\alpha x^{-\gamma}}e^{-\beta e^{-\alpha x^{-\gamma}}}}{\left(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x^{-\gamma}}}\right)(-\ln(p))}.$$

تعریف ۲ نمایش آمیخته تابع PDF توزیع EIW-L به صورت زیر ارائه می‌شود

$$f(x, \theta) =$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma x^{-\gamma-1} e^{-\alpha x^{-\gamma}}}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k e^{-\beta k e^{-\alpha x^{-\gamma}}}$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma x^{-\gamma-1}}{-\ln(p)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h e^{-\alpha(h+1)x^{-\gamma}}}{h!}$$

$$= \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta)^{h+1} k^h}{(h+1)!}$$

$$q(x, \alpha(h+1), \gamma),$$

نمایش آمیخته تابع PDF توزیع EIW-L، به صورت مجموع موزونی از تابع $q(x, \cdot)$ با پارامترهای $(\alpha(h+1), \gamma)$ می‌باشد.

^{۲۸} Exponential Inverse Weibull-Logarithmic

متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع EIW-L را در نظر بگیرید، تابع لگاریتم-درستناپی آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \underline{X}) &= n \ln(1-p) + n \ln(\alpha) + n \ln(\beta) \\ &+ n \ln(\gamma) - n \ln(-\ln(p)) - \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \\ &- (\gamma + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \beta \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i^{-\gamma}} \\ &- \sum_{i=1}^n \ln\left(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}\right). \end{aligned}$$

برآوردگرهای ML پارامترهای نامعلوم توزیع EIW-L با مساوی صفر قرار دادن معادلات نرمال، به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \\ &+ \beta \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} e^{-\alpha x_i^{-\gamma}} + (1-p)\beta. \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} e^{-\alpha x_i^{-\gamma}} e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}}{1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \\ \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \ln(x_i) - \alpha \beta \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \ln(x_i) e^{-\alpha x_i^{-\gamma}} \\ &- \alpha \beta (1-p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} \ln(x_i) e^{-\alpha x_i^{-\gamma}} e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}}{1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial p} &= \frac{-n}{1-p} - \frac{n}{p \ln(p)} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}}{1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}} = 0, \end{aligned}$$

گزاره ۴ تابع مولد گشتاور خانواده EIW-L به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$M_X(t) = \frac{\alpha \beta}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h t^l}{h! l! (\alpha(h+1))^{\frac{-l}{\gamma}+1}} \Gamma\left(1 - \frac{l}{\gamma}\right),$$

اثبات: با توجه به تعریف MGF داریم

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \frac{\alpha \beta \gamma}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h}{h!} \\ &\int_0^{\infty} e^{tx} x^{-\gamma-1} e^{-\alpha(h+1)x^{-\gamma}} dx \\ &= \frac{\alpha \beta \gamma}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h t^l}{h! l!} \\ &\int_0^{\infty} x^{l-\gamma-1} e^{-\alpha(h+1)x^{-\gamma}} dx \\ &= \frac{\alpha \beta}{-\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k (-\beta k)^h t^l}{h! l! (\alpha(h+1))^{\frac{-l}{\gamma}+1}} \\ &\Gamma\left(1 - \frac{l}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

تعریف ۳ تابع چندکی خانواده EIW-L به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$x = \left[\frac{-1}{\alpha} \ln \left[-\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1-p^{-u}}{1-p} \right) \right] \right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

۱،۱،۵ روش‌های مختلف برآورد پارامترهای خانواده EIW-L

در این بخش، برآوردهای ML، بیز و E-بیز پارامترهای خانواده EIW-L را محاسبه می‌نماییم.

برآوردگر ماکزیمم درستناپی خانواده EIW-L:

۱. پارامتر γ را از توزیع $G_\gamma(a_\gamma, b_\gamma + \sum_{i=1}^n \ln(x_i))$ تولید می‌کنیم.

۲. پارامتر p را از توزیع $B_p(a_p, b_p + n)$ تولید می‌کنیم.

۳. با توجه به مقادیر تولیدشده γ در گام اول، پارامتر

α را از توزیع $G_{\alpha|\gamma}(a_\alpha + n, b_\alpha + \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma})$ تولید می‌کنیم.

۴. با توجه به مقادیر تولیدشده γ در گام اول و α تولیدشده در گام سوم، پارامتر β را از توزیع

$G_{\beta|\alpha,\gamma}(a_\beta + n, b_\beta + \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i^{-\gamma}})$ تولید می‌کنیم.

این روند را Z مرتبه تکرار کرده و لذا برآوردهای بیز

پارامترهای α, γ, β و p تحت SEL با استفاده از رابطه

زیر محاسبه می‌گردد

$$\hat{\alpha}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z \alpha_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)}, \quad (\gamma)$$

$$\hat{\gamma}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z \gamma_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)},$$

$$\hat{p}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z p_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)},$$

$$\hat{\beta}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z \beta_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)}.$$

برآوردگر E-بیزی خانواده EIW-L:

با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای

مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p و با

انتخاب ابرپارامترها در بازه‌های

$$0 < a_\alpha, a_\gamma, a_\beta, a_p < 1, \quad b_\alpha, b_\gamma, b_\beta, b_p > 0.$$

برآورد E-بیزی پارامترهای توزیع EIW-L به صورت

زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}$$

$$-(1-p) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\alpha x_i^{-\gamma}} e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}}{1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}}} = 0.$$

برآوردگر بیزی خانواده EIW-L:

با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای

مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p ،

برآوردهای بیزی پارامترهای α, γ, β و p از توزیع

EIW-L، تحت SEL به صورت زیر به دست می‌آیند.

با توجه به توزیع توام پیشین، تابع چگالی پسین پارامترهای

α, γ, β و p به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\pi(\theta|\underline{X}) \propto \alpha^{n+a_\alpha-1} e^{-\alpha(b_\alpha + \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma})} \gamma^{n+a_\gamma-1}$$

$$e^{-(b_\gamma + \sum_{i=1}^n \ln(x_i))\gamma} p^{a_p-1} (1-p)^{n+b_p-1}$$

$$\beta^{n+a_\beta-1} e^{-(b_\beta + \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i^{-\gamma}})\beta}$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{-\ln(p)(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}})}$$

$$\propto G_\gamma(a_\gamma, b_\gamma + \sum_{i=1}^n \ln(x_i)) B_p(a_p, b_p + n)$$

$$G_{\alpha|\gamma}\left(a_\alpha + n, b_\alpha + \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma}\right)$$

$$G_{\beta|\alpha,\gamma}\left(a_\beta + n, b_\beta + \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}\right) W_\gamma(\theta),$$

و تابع $W_\gamma(\theta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_\gamma(\theta) =$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\ln(p)(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha x_i^{-\gamma}}})}$$

با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم، برآورد بیز

پارامترهای توزیع EIW-L به صورت زیر ارائه می‌گردد.

الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآوردگر بیز

$$\times \frac{1}{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha t^{-\gamma}}})}$$

نتیجه ۴ برآوردگر تابع قابلیت اطمینان براساس روش ML به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{R}_{ML} = \frac{\ln(1 - (1 - \hat{p}_{ML})e^{-\hat{\beta}_{ML}e^{-\hat{\alpha}_{ML}t^{\hat{\gamma}_{ML}}})}{\ln(\hat{p}_{ML})}$$

که در آن $(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML}, \hat{p}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})$ برآوردگرهای ML می‌باشند.

نتیجه ۵ با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p ، تحت تابع SEL و الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برای برآوردگرهای بی‌زی، برآورد بیز تابع قابلیت اطمینان خانواده EIW-L به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\hat{R}(t)^B = \frac{\sum_{i=1}^Z W_i(\theta_i) \left(\frac{\ln(1 - (1-p_i)e^{-\beta_i e^{-\alpha_i t^{-\gamma_i}}})}{\ln(p_i)} \right)}{\sum_{i=1}^Z W_i(\theta_i)}$$

نتیجه ۶ با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p ، تحت تابع SEL، $0 < a_i < 1$ و $b_i > 0$ و توزیع پیشین ابرپارامترها به صورت (۵) یا (۶)، براساس الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآورد E-بیز پارامترها، برآورد E-بیز تابع قابلیت اطمینان به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\hat{R}(t)^{EB} = \frac{\sum_{i=1}^Z W_i(\theta_i) \left(\frac{\ln(1 - (1-p_i)e^{-\beta_i e^{-\alpha_i t^{-\gamma_i}}})}{\ln(p_i)} \right)}{\sum_{i=1}^Z W_i(\theta_i)}$$

الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآوردگرهای E-بیز پارامترهای α, γ, β و p توزیع EIW-L تحت پیشین اول به صورت زیر ارائه می‌شود.

الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآوردگر E-بیز

۱. برای $i = 1, 2, 3, 4$ مقادیر ابرپارامترهای a_i و b_i را به ترتیب از توزیع‌های $Beta(u_i, v_i)$ و $Uniform(0, s_i)$ تولید می‌کنیم.

۲. با توجه به مقادیر (a_γ, b_γ) ، پارامتر γ را از توزیع $G_\gamma(a_\gamma, b_\gamma + \sum_{i=1}^n \ln(x_i))$ تولید می‌کنیم.

۳. با توجه به مقادیر (a_p, b_p) ، پارامتر p را از توزیع $B_p(a_p, b_p + n)$ تولید می‌کنیم.

۴. با توجه به مقادیر (a_α, b_α) و مقادیر تولیدشده γ در گام دوم، پارامتر α را از توزیع $G_{\alpha|\gamma}(a_\alpha + \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma})$ تولید می‌کنیم.

۵. با توجه به مقادیر (a_β, b_β) ، مقادیر γ تولیدشده در گام دوم و α تولیدشده در گام چهارم، پارامتر β را از توزیع $G_{\beta|\alpha, \gamma}(a_\beta + n, b_\beta + \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i^{-\gamma}})$ تولید می‌کنیم.

این روند را Z مرتبه تکرار می‌کنیم. بنابراین برآوردهای E-بیز پارامترهای α, γ, β و p تحت SEL مشابه رابطه (۷) به دست می‌آیند.

۲،۱،۵. برآورد تابع قابلیت اطمینان

توابع قابلیت اطمینان و نرخ مخاطره توزیع EIW-L، به ترتیب به صورت زیر ارائه می‌شود

$$R(t, \theta) = \frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha t^{-\gamma}}})}{\ln(p)}$$

$$h(t, \theta) = \frac{\alpha\beta\gamma(1-p)t^{-\gamma-1}e^{-\alpha t^{-\gamma}}e^{-\beta e^{-\alpha t^{-\gamma}}}}{(1 - (1-p)e^{-\beta e^{-\alpha t^{-\gamma}}})(-\ln(p))}$$

$\cdot < p < 1, \alpha, \gamma, \beta > \cdot$.

در شکل ۱ و ۲، به ترتیب نمودارهای تابع PDF و نرخ مخاطره توزیع EIW-L به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای توزیع نشان داده شده است. طبق شکل ۱، توزیع EIW-L رفتار متفاوتی برحسب انتخاب‌های گوناگون از پارامترها را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۲، نرخ مخاطره توزیع EIW-L تک مدی (وان شکل وارون) می‌باشد. بنابراین این توزیع، در مدل‌سازی انواع پدیده‌های مختلف کارایی دارد، به ویژه مشاهداتی که دارای نرخ مخاطره غیریکنوا^{۲۹} می‌باشند. تابع نرخ مخاطره توزیع EIW-L از نقطه‌ای شروع شده و سپس تا زمان خاصی افزایش می‌یابد و پس از آن شروع به کاهش می‌نماید. رفتار تابع نرخ مخاطره توزیع EIW-L، گویای این است که توزیع برای مدل‌سازی داده‌ها یا سیستم‌هایی که دارای رفتار شکست اولیه مانند دستگاه‌های الکتریکی و مکانیکی، مرگ و میر نوزادان، مطالعات پزشکی کاربرد دارد.

۲،۵ معرفی توزیع جدید PIW-L

توزیع پایه را به صورت $\phi(x, \gamma) = x^{-\gamma}$ در نظر می‌گیریم. لذا

$$Q(x, \alpha, \gamma) = e^{-\alpha\phi(x, \gamma)} = e^{-\alpha x^{-\gamma}},$$

هم‌چنین

$$G(Q(x, \alpha, \gamma), \beta) = \frac{1 - Q^\beta(x, \alpha, \gamma)}{1 + Q^\beta(x, \alpha, \gamma)}$$

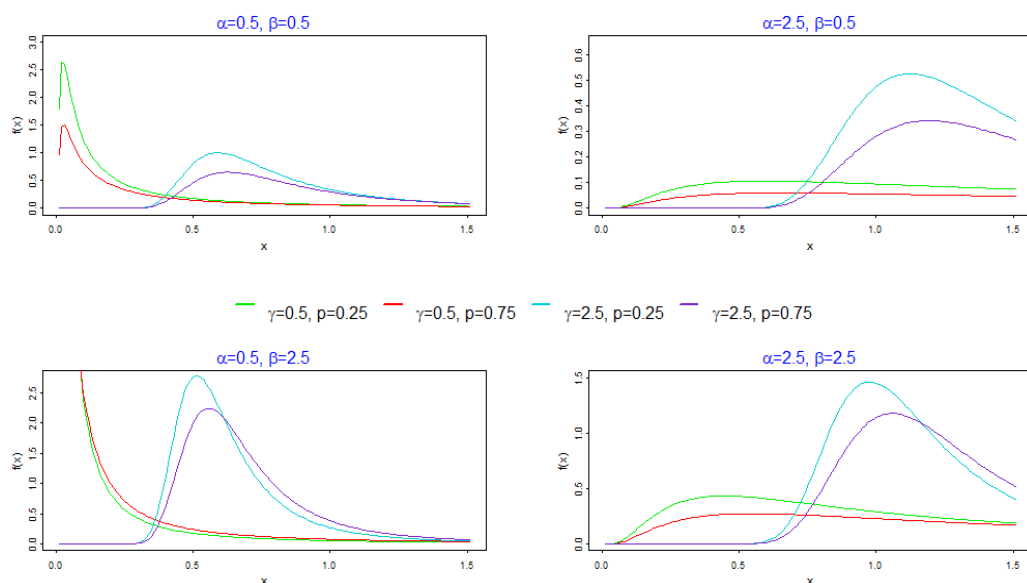
$$= \frac{1 - e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}}{1 + e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}}$$

توزیع وایبل معکوس توانی-لگاریتمی ($PIW-L^{30}$) به صورت زیر معرفی می‌شود

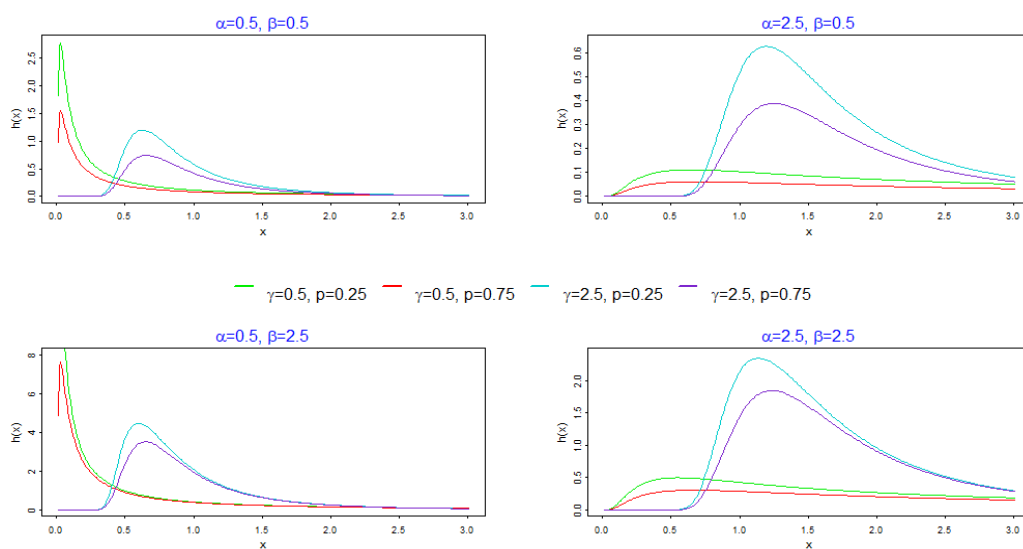
$$F(x, \theta) = 1 - \frac{\ln\left(1 - (1-p) \frac{1 - e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}}{1 + e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}}\right)}{\ln(p)},$$

^{۲۰} Power Inverse Weibull-Logarithmic

^{۲۹} Non-monotone



شکل ۱. نمودارهای مختلف تابع PDF توزیع EIW-L به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع



شکل ۲. نمودارهای مختلف تابع نرخ مخاطره توزیع EIW-L به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع.

گزاره ۵ تابع گشتاور غیرمرکزی مرتبه r -ام خانواده PIW-L به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\mu'_r = \frac{1}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(1 - \left(\frac{r-p}{p}\right)^k\right)}{(\alpha\beta k)^{\frac{-r}{\gamma}}} \Gamma\left(1 - \frac{r}{\gamma}\right).$$

اثبات: با توجه به نمایش آمیخته تابع PDF از خانواده PIW-L، گشتاور غیرمرکزی مرتبه r -ام به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \mu'_r &= E(X^r) \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \left(\frac{r-p}{p}\right)^k\right) \int_0^{\infty} x^{r-\gamma-1} e^{-\alpha\beta kx^{-\gamma}} dx. \end{aligned}$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = \alpha\beta kx^{-\gamma}$ و $du = -\gamma\alpha\beta kx^{-\gamma-1} dx$ داریم

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \frac{1}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \left(\frac{r-p}{p}\right)^k\right) \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\alpha\beta k}\right)^{\frac{-r}{\gamma}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(1 - \left(\frac{r-p}{p}\right)^k\right)}{k(\alpha\beta k)^{\frac{-r}{\gamma}}} \Gamma\left(1 - \frac{r}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

ملاحظه ۳ گشتاور ناکامل خانواده PIW-L به صورت زیر ارائه می‌شود

$$m_r(y) = \frac{1}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \left(\frac{r-p}{p}\right)^k\right) \int_0^y \left(\frac{u}{\alpha\beta k}\right)^{\frac{-r}{\gamma}} e^{-u} du.$$

تابع PDF توزیع PIW-L به صورت زیر به دست می‌آید

$$f(x, \theta) = \frac{\gamma\alpha\beta\gamma(1-p)x^{-\gamma-1}e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}}{(-\ln(p))(1+e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}})} \frac{1}{(p+(r-p)e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}})}.$$

تعریف ۴ نمایش آمیخته تابع PDF توزیع PIW-L به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{\gamma\alpha\beta\gamma(1-p)x^{-\gamma-1}}{-p\ln(p)} \left[\frac{e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}}{(1+e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}})\left(1+\frac{r-p}{p}e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}\right)} \right] \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma x^{-\gamma-1}}{-\ln(p)} \left[\frac{1}{1+e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}} - \frac{1}{1+\frac{r-p}{p}e^{-\alpha\beta x^{-\gamma}}} \right] \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma x^{-\gamma-1}}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\alpha\beta kx^{-\gamma}} \\ &\quad - \frac{\alpha\beta\gamma x^{-\gamma-1}}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{r-p}{p}\right)^k e^{-\alpha\beta kx^{-\gamma}} \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma x^{-\gamma-1}}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\alpha\beta kx^{-\gamma}} \left(1 - \left(\frac{r-p}{p}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(1 - \left(\frac{r-p}{p}\right)^k\right)}{k} q(x, \alpha\beta k, \gamma). \end{aligned}$$

نمایش آمیخته تابع PDF توزیع PIW-L، به صورت مجموع موزونی از تابع $q(x, \cdot)$ با پارامترهای $(\alpha\beta k, \gamma)$ می‌باشد.

برآوردگر ماکزیمم درستنمایی خانواده PIW-L:

متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع PIW-L را در نظر بگیرید، تابع لگاریتم-درستنمایی آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\mathcal{L}(\theta, \underline{X}) = n \ln(\gamma) + n \ln(1-p) + n \ln(\alpha) + n \ln(\gamma) + n \ln(\beta) - n \ln(-\ln(p))$$

$$-(\gamma + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \alpha \beta \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma}$$

$$- \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}})$$

$$- \sum_{i=1}^n \ln(p + (\gamma - p)e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}}).$$

برآوردگرهای ML پارامترهای نامعلوم توزیع PIW-L با مساوی صفر قرار دادن معادلات نرمال، به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \beta \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} + \beta \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}}}{1 + e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}}} + \beta(\gamma - p) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}}}{p + (\gamma - p)e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) +$$

$$\alpha \beta \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \ln(x_i)$$

$$- \alpha \beta \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} \ln(x_i) e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}}}{1 + e^{-\alpha \beta x_i^{-\gamma}}}$$

$$- \alpha \beta (\gamma - p).$$

گزاره ۶ تابع مولد گشتاور خانواده PIW-L به صورت

زیر نشان داده می‌شود

$$M_X(t) = \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(1 - \left(\frac{\gamma-p}{p}\right)^k\right) t^h}{h! k(\alpha \beta k)^{\frac{-h}{\gamma}}} \Gamma\left(1 - \frac{h}{\gamma}\right).$$

اثبات: با توجه به تعریف MGF داریم

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= \frac{\alpha \beta \gamma}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \left(\frac{\gamma-p}{p}\right)^k\right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{tx} x^{-\gamma-1} e^{-\alpha \beta k x^{-\gamma}} dx$$

$$= \frac{\alpha \beta \gamma}{-\ln(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(1 - \left(\frac{\gamma-p}{p}\right)^k\right) t^h}{h!}$$

$$\int_0^{\infty} x^{h-\gamma-1} e^{-\alpha \beta k x^{-\gamma}} dx$$

$$= \frac{1}{\ln(p)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(1 - \left(\frac{\gamma-p}{p}\right)^k\right) t^h}{h! k(\alpha \beta k)^{\frac{-h}{\gamma}}} \Gamma\left(1 - \frac{h}{\gamma}\right).$$

تعریف ۵ تابع چندکی خانواده PIW-L به صورت زیر

ارائه می‌گردد

$$x = \left[\frac{-1}{\alpha \beta} \ln \left[\frac{p - p^{1-u}}{p + p^{1-u} - \gamma} \right] \right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

۱,۲,۵ روش‌های مختلف برآورد پارامترهای خانواده PIW-L

در این بخش، برآوردهای ML، بیز و E-بیز پارامترهای خانواده PIW-L را محاسبه می‌نماییم.

$$\prod_{i=1}^n \frac{-1}{\ln(p) (1 + e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}) (p + (\gamma - p)e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}})}$$

با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم، برآورد بیز پارامترهای توزیع PIW-L به صورت زیر ارائه می‌گردد.

الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآوردگر بیز

۱. پارامتر γ را از توزیع $G_\gamma(a_\gamma, b_\gamma + \sum_{i=1}^n \ln(x_i))$

$$\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

۲. پارامتر p را از توزیع $B_p(a_p, b_p + n)$ تولید می‌کنیم.

۳. پارامتر α را از توزیع $G_{\alpha|\gamma}(a_\alpha + n, b_\alpha)$ تولید می‌کنیم.

۴. با توجه به مقادیر تولیدشده γ در گام اول و α در

گام سوم، پارامتر β را از توزیع $G_{\alpha|\gamma}(a_\beta + n, b_\beta + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma})$

$$b_\beta + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma}$$

این روند را Z مرتبه تکرار کرده و لذا برآوردهای بیز پارامترهای α, γ, β و p تحت SEL با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$$\hat{\alpha}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z \alpha_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)}, \quad \wedge ($$

$$\hat{\gamma}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z \gamma_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)},$$

$$\hat{p}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z p_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)},$$

$$\hat{\beta}^B = \frac{\sum_{i=1}^Z \beta_i W_\gamma(\theta_i)}{\sum_{i=1}^Z W_\gamma(\theta_i)}.$$

برآوردگر E-بیزی خانواده PIW-L:

با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p و با

انتخاب ابرپارامترها در بازه‌های

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} \ln(x_i) e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}}{p + (\gamma - p)e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}} = \cdot,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial p} = \frac{-n}{1-p} - \frac{n}{p \ln(p)} - \sum_{i=1}^n \frac{1 - e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}}{p + (\gamma - p)e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}} = \cdot,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \underline{X})}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}}{1 + e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}} + \alpha(\gamma - p).$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}}{p + (\gamma - p)e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}} = \cdot.$$

برآوردگر بیزی خانواده PIW-L:

با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p برآوردهای بیزی پارامترهای α, γ, β و p از توزیع PIW-L تحت SEL به صورت زیر به دست می‌آیند. با توجه به توزیع توام پیشین، تابع چگالی پسین پارامترهای α, γ, β و p به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\pi(\theta|\underline{X}) \propto \alpha^{n+a_\alpha-1} e^{-\alpha b_\alpha} \gamma^{n+a_\gamma-1} e^{-(b_\gamma + \sum_{i=1}^n \ln(x_i))\gamma} p^{a_p-1} (1-p)^{n+b_p-1} \beta^{n+a_\beta-1} e^{-(b_\beta + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma})\beta}$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{-1}{\ln(p) (1 + e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}}) (p + (\gamma - p)e^{-\alpha\beta x_i^{-\gamma}})}$$

$$\propto B_p(a_p, b_p + n) G_\gamma(a_\gamma, b_\gamma + \sum_{i=1}^n \ln(x_i)) G_\alpha(a_\alpha + n, b_\alpha) G_{\beta|\alpha, \gamma} \left(a_\beta + n, b_\beta + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \right) W_\gamma(\theta),$$

و تابع $W_\gamma(\theta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_\gamma(\theta) =$$

$$\frac{\tau \alpha \beta \gamma (1-p) t^{-\gamma-1} e^{-\alpha \beta t^{-\gamma}}}{(-\ln(p))(1+e^{-\alpha \beta t^{-\gamma}})(p+(1-p)e^{-\alpha \beta t^{-\gamma}})}$$

$$\ln\left(1 - (1-p) \frac{1-e^{-\alpha \beta t^{-\gamma}}}{1+e^{-\alpha \beta t^{-\gamma}}}\right),$$

نتیجه ۷ برآوردگر تابع قابلیت اطمینان براساس روش ML به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{R}_{ML} = \frac{\ln\left(1 - (1 - \hat{p}_{ML}) \frac{1 - e^{-\hat{\alpha}_{ML} \hat{\beta}_{ML} t^{-\hat{\gamma}_{ML}}}}{1 + e^{-\hat{\alpha}_{ML} \hat{\beta}_{ML} t^{-\hat{\gamma}_{ML}}}}\right)}{\ln(\hat{p}_{ML})},$$

که در آن $(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML}, \hat{p}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})$ برآوردگرهای ML می‌باشند.

نتیجه ۸ با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p ، تحت تابع SEL و الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برای برآوردگرهای بی‌زی، برآورد بی‌زی تابع قابلیت اطمینان خانواده PIW-L به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\hat{R}(t)^B = \frac{\sum_{i=1}^Z W_{\gamma}(\theta_i) \frac{\ln\left(1 - (1-p_i) \frac{1 - e^{-\alpha_i \beta_i t^{-\gamma_i}}}{1 + e^{-\alpha_i \beta_i t^{-\gamma_i}}}\right)}{\ln(p_i)}}{\sum_{i=1}^Z W_{\gamma}(\theta_i)}.$$

نتیجه ۹ با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامترهای مستقل α, γ, β و توزیع پیشین بتا برای پارامتر p ، تحت تابع SEL، $0 < a_i < 1$ و $b_i > 0$ و توزیع پیشین ابرپارامترها به صورت (۵) یا (۶)، براساس الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآورد E-بی‌زی پارامترها، برآورد E-بی‌زی تابع قابلیت اطمینان به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\hat{R}(t)^{EB} = \frac{\sum_{i=1}^Z W_{\gamma}(\theta_i) \frac{\ln\left(1 - (1-p_i) \frac{1 - e^{-\alpha_i \beta_i t^{-\gamma_i}}}{1 + e^{-\alpha_i \beta_i t^{-\gamma_i}}}\right)}{\ln(p_i)}}{\sum_{i=1}^Z W_{\gamma}(\theta_i)}.$$

$$0 < a_1, a_2, a_3, a_4 < 1, \quad b_1, b_2, b_3, b_4 > 0.$$

برآورد E-بی‌زی پارامترهای توزیع PIW-L به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآوردگرهای E-بی‌زی پارامترهای α, γ, β و p توزیع PIW-L تحت پیشین اول به صورت زیر ارائه می‌شود.

الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم برآوردگر E-بی‌زی

۱. برای $i = 1, 2, 3, 4$ مقادیر ابرپارامتر a_i و b_i را

به ترتیب از توزیع‌های $\text{Beta}(u_i, v_i)$ و $\text{Uniform}(0, s_i)$ تولید می‌کنیم.

۲. با توجه به مقادیر (a_2, b_2) ، پارامتر γ را از توزیع $G_{\gamma}(a_2, b_2 + \sum_{i=1}^n \ln(x_i))$ تولید می‌کنیم.

۳. با توجه به مقادیر (a_3, b_3) ، پارامتر p را از توزیع $B_p(a_3, b_3 + n)$ تولید می‌کنیم.

۴. با توجه به مقادیر (a_1, b_1) ، پارامتر α را از توزیع $G_{\alpha|\gamma}(a_1 + n, b_1)$ تولید می‌کنیم.

۵. با توجه به مقادیر (a_4, b_4) ، پارامتر γ در گام دوم و α در گام چهارم، پارامتر β را از توزیع $G_{\alpha|\gamma}(a_4 + n, b_4 + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma})$ تولید می‌کنیم.

این روند را Z مرتبه تکرار می‌کنیم. بنابراین برآوردهای E-بی‌زی پارامترهای α, γ, β و p تحت SEL مشابه رابطه (۸) به دست می‌آیند.

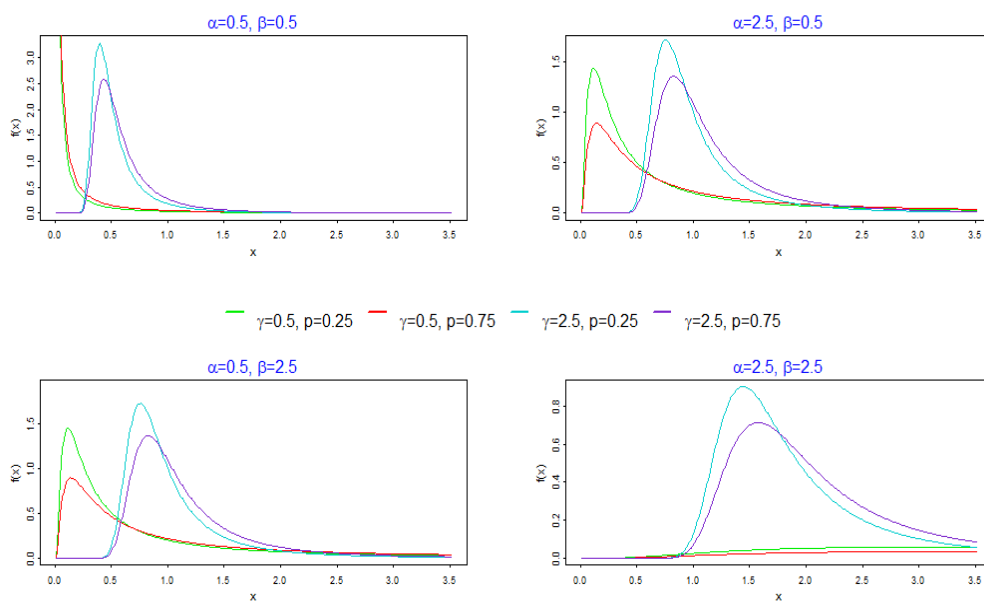
۲.۲.۵ برآورد تابع قابلیت اطمینان

توابع قابلیت و نرخ مخاطره توزیع PIW-L، به ترتیب به صورت زیر ارائه می‌شود

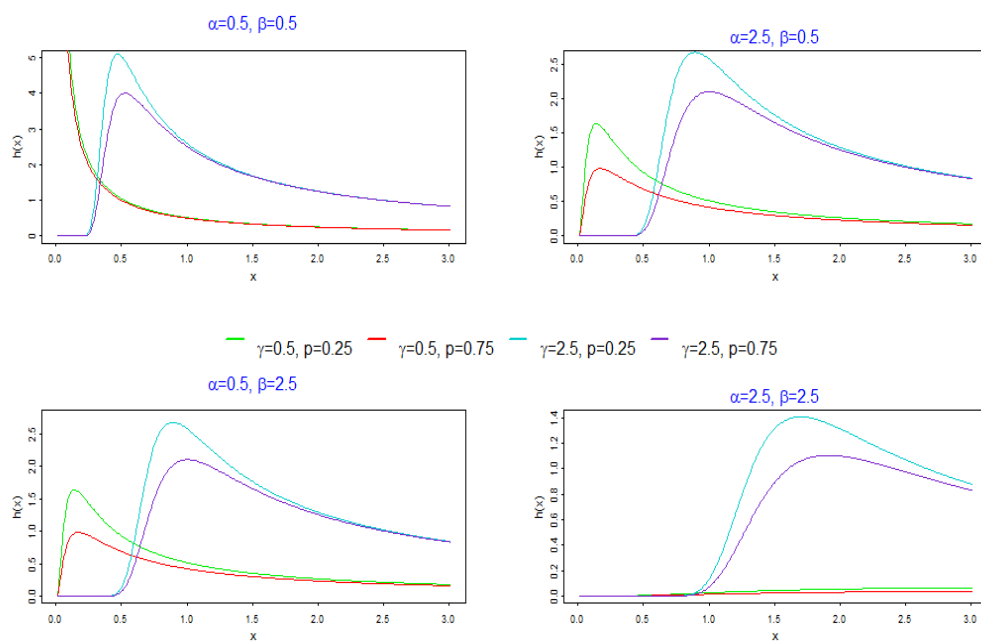
$$R(t, \theta) = \frac{\ln\left(1 - (1-p) \frac{1 - e^{-\alpha \beta t^{-\gamma}}}{1 + e^{-\alpha \beta t^{-\gamma}}}\right)}{\ln(p)},$$

$$h(t, \theta) =$$

در شکل ۳ و ۴، به ترتیب نمودارهای تابع PDF و نرخ مخاطره توزیع $PIW-L$ به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای توزیع نشان داده شده است. طبق شکل ۳، توزیع $PIW-L$ رفتار متفاوتی را برحسب انتخاب‌های گوناگون از پارامترها نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۴، تابع نرخ مخاطره توزیع $PIW-L$ تک مدی می‌باشد.



شکل ۳. نمودارهای مختلف تابع PDF توزیع PIW-L به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع.



شکل ۴. نمودارهای مختلف تابع نرخ مخاطره توزیع PIW-L به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع.

۶- مطالعات شبیه‌سازی شده

در این بخش، نتایج حاصل از مقایسه عملکرد روش‌های برآوردیابی گوناگون، بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده از خانواده G^*Q ارائه شده است. روش‌های ارائه شده در بخش تئوری (ماکزیمم درست‌نمایی، بیزی و E-بیزی) نیز در بخش کاربردی مقایسه می‌شوند. همچنین برآوردهای مختلف تابع قابلیت اطمینان با استفاده از سه رویکرد مذکور محاسبه و کارایی روش‌های برآورد براساس RMSE بررسی می‌شود. لازم به ذکر است در محاسبه برآوردهای E-بیزی از هر دو گروه توزیع‌های پیشین (۵) و (۶) استفاده شده است و برآوردهای حاصل از توزیع پیشین اول را با E -Bayes₁ و توزیع پیشین دوم را با E -Bayes₂ نشان می‌دهیم. در مطالعات شبیه‌سازی مونت کارلو نیز از دو زیرمدل $EIW-L$ و $PIW-L$ استفاده و همچنین ترکیب‌های مختلفی از پارامترهای مدل به صورت $(\alpha, \beta, \gamma, p) = (2, 3, 2/5, 0/4)$ برای توزیع $EIW-L$ و $(\alpha, \beta, \gamma, p) = (0/5, 1/5, 0/5, 0/7)$ برای توزیع $PIW-L$ با حجم نمونه متفاوت $n = (200, 500, 800, 1000)$ در نظر گرفته می‌شود. روش‌های برآورد مختلف، $H = 100$ مرتبه تکرار می‌شود و محاسبات عددی مقاله توسط نرم‌افزار آماری R به دست آمده است.

برای تولید نمونه تصادفی از توزیع‌های $EIW-L$ و $PIW-L$ از روش تبدیل معکوس استفاده شده است. برای توزیع $EIW-L$ و $n, \dots, 1$ از i

$$x_i = \left[\frac{-1}{\alpha} \ln \left[-\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1 - p^{1-u_i}}{1-p} \right) \right] \right]^{-\frac{1}{\gamma}},$$

و برای توزیع $PIW-L$ و $n, \dots, 1$ از i

$$x_i = \left[\frac{-1}{\alpha\beta} \ln \left[\frac{p - p^{1-u_i}}{p + p^{1-u} - 2} \right] \right]^{-\frac{1}{\gamma}},$$

استفاده می‌شود، به طوری که در آن نمونه تولیدشده از توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ می‌باشد.

جدول‌های ۱-۴ شامل نتایج روش‌های مختلف برآورد پارامترهای دو زیر مدل $EIW-L$ و $PIW-L$ می‌باشد.

در جدول ۱ برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی و بیزی و در جدول ۲ برآوردهای E-بیزی مدل $EIW-L$ نشان داده شده است. با توجه به نتایج حاصله در دو جدول مذکور، برآوردهای هر سه روش به مقدار واقعی پارامتر توزیع $EIW-L$ همگرا می‌باشند. علاوه بر این، با افزایش حجم نمونه، شاهد کاهش مقدار $RMSE$ برآوردها می‌باشیم.

در مقایسه روش‌های مختلف برآورد، ملاحظه می‌شود که مقدار $RMSE$ روش برآورد E-بیزی نسبت به سایر روش‌های برآورد، کمینه می‌باشد. لذا در میان روش‌های مختلف برآورد، روش برآورد E-بیزی، بهینه می‌باشد.

از سوی دیگر، در مقایسه دو برآورد E-بیزی حاصل از دو گروه توابع پیشین ابرپارامترها، گروه اول از توزیع‌های پیشین مناسب‌تر می‌باشد، زیرا از $RMSE$ کمتری برخوردار می‌باشد. در جدول ۳، برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی و بیزی و در جدول ۴ برآوردهای E-بیزی توزیع $PIW-L$ نشان داده شده است. نتایج جدول‌های توزیع $PIW-L$ ، نیز موید نتایج قبل می‌باشد.

برآورد تابع قابلیت اطمینان توزیع $EIW-L$ برای مقادیر مختلف $n = (200, 1000)$ ، $t = 1, 2, 3, 4, 5$

$$(\alpha, \beta, \gamma, p) = (4, 3, 2/5, 0/7)$$

در جدول ۵ ارائه شده است.

معیار $RMSE$ ، خطای برآورد را در یک نقطه خاص نشان می‌دهد، لذا نیاز است معیاری برای محاسبه ریسک کلی ارائه نماییم. بنابراین روش‌های برآورد تابع قابلیت اطمینان با استفاده از معیاری به نام میانگین مربعات خطای جمع‌بسته ($IMSE^1$) مقایسه می‌شوند و به صورت زیر محاسبه می‌شود

جدول ۱: نتایج برآوردهای روش ماکزیمم درستنمایی و بیز از خانواده EIW-L

$$(\alpha, \beta, \gamma, p) = (2, 3, 2/5, 1/4)$$

n	ML				Bayes			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}
۲۰۰	۲/۱۶۷۶	۳/۲۲۸۸	۲/۵۷۲۶	-۰/۳۷۴۲	۱/۹۳۵۲	۳/۱۴۵۶	۲/۴۶۳۲	-۰/۴۳۲۵
RMSE	(-۰/۴۴۶۲)	(-۰/۵۷۹۳)	(-۰/۳۶۸۹)	(-۰/۱۳۳۱)	(-۰/۳۸۰۵)	(-۰/۴۹۸۳)	(-۰/۳۳۱۸)	(-۰/۱۱۸۹)
۵۰۰	۲/۱۲۵۷	۲/۹۵۴۲	۲/۴۶۰۱	-۰/۳۸۴۱	۲/۰۸۶۸	۳/۰۶۵۶	۲/۵۲۴۲	-۰/۴۱۰۹
RMSE	(-۰/۳۹۵۳)	(-۰/۴۶۰۲)	(-۰/۳۱۵۱)	(-۰/۱۳۷۵)	(-۰/۳۶۸۹)	(-۰/۴۱۰۱)	(-۰/۲۸۲۲)	(-۰/۱۰۴۷)
۸۰۰	۲/۰۹۳۳	۲/۹۶۷۹	۲/۴۸۹۵	-۰/۳۹۰۱	۲/۰۶۹۹	۳/۰۲۸۸	۲/۵۱۸۶	-۰/۳۹۶۵
RMSE	(-۰/۳۲۸۴)	(-۰/۳۹۳۶)	(-۰/۲۸۲۶)	(-۰/۱۲۳۷)	(-۰/۳۰۹۴)	(-۰/۳۶۲۹)	(-۰/۲۴۷۳)	(-۰/۰۹۶۷)
۱۰۰۰	۲/۰۷۵۲	۳/۰۲۵۴	۲/۴۹۵۱	-۰/۳۹۲۵	۱/۹۷۹۴	۳/۰۱۷۵	۲/۵۰۷۶	-۰/۴۰۳۷
RMSE	(-۰/۲۶۹۷)	(-۰/۳۱۶۵)	(-۰/۲۳۶۴)	(-۰/۱۰۰۶)	(-۰/۲۴۳۱)	(-۰/۲۸۹۸)	(-۰/۱۹۱۷)	(-۰/۰۹۳۴)

جدول ۲: نتایج دو روش برآورد E-بیز با دو گروه مختلف از توزیع پیشین ابرپارامترها از خانواده EIW-L

$$(\alpha, \beta, \gamma, p) = (2, 3, 2/5, 1/4)$$

n	E-Bayes1				E-Bayes2			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}
۲۰۰	۱/۹۴۹۲	۳/۱۵۵۴	۲/۴۶۰۵	-۰/۴۲۸۶	۱/۹۳۷۴	۲/۹۱۲۸	۲/۵۳۰۲	-۰/۳۸۶۹
RMSE	(-۰/۳۲۱۱)	(-۰/۴۴۷۱)	(-۰/۲۶۶۷)	(-۰/۰۸۵۸)	(-۰/۳۶۸۴)	(-۰/۴۵۱۲)	(-۰/۲۹۷۳)	(-۰/۰۹۸۲)
۵۰۰	۱/۹۸۷۶	۳/۰۸۹۵	۲/۴۹۱۶	-۰/۴۱۷۳	۲/۰۶۵۲	۲/۹۶۷۳	۲/۵۲۹۲	-۰/۳۹۶۴
RMSE	(-۰/۲۸)	(-۰/۳۳۳۹)	(-۰/۲۰۸۳)	(-۰/۰۷۴۴)	(-۰/۳۰۸۷)	(-۰/۳۴۴۲)	(-۰/۲۳۳۵)	(-۰/۰۹۷۴)
۸۰۰	۲/۰۲۴۴	۳/۰۳۹۵	۲/۵۰۶۷	-۰/۳۹۲۵	۲/۰۳۳۸	۳/۰۲۲۲	۲/۴۸۰۲	-۰/۳۹۹۲
RMSE	(-۰/۲۱۴۸)	(-۰/۲۴)	(-۰/۱۴۹۹)	(-۰/۰۶۸)	(-۰/۲۲۹۱)	(-۰/۲۶۱۶)	(-۰/۱۷۱۳)	(-۰/۰۸۰۶)
۱۰۰۰	۱/۹۹۰۶	۲/۹۹۳۳	۲/۵۰۳۲	-۰/۴۰۰۶	۲/۰۲۸۴	۳/۰۱۵۵	۲/۴۹۲۴	-۰/۳۹۸۷
RMSE	(-۰/۱۷)	(-۰/۱۹۰۸)	(-۰/۱۰۸۱)	(-۰/۰۶۰۳)	(-۰/۱۸۳۴)	(-۰/۲۱۲۵)	(-۰/۱۲۶۹)	(-۰/۰۷۲۵)

جدول ۳: نتایج برآوردهای روش ماکزیمم درستنمایی و بیز از خانواده PIW-L

$$(\alpha, \beta, \gamma, p) = (1/5, 1/5, 1/5, 1/7)$$

n	ML				Bayes			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}
۲۰۰	-۰/۵۶۲۹	۱/۷۴۶۳	-۰/۴۸۴۱	-۰/۶۰۱۱	-۰/۵۵۰۱	۱/۷۴۴۱	-۰/۵۲۹۲	-۰/۶۲۱۴
RMSE	(-۰/۱۹۱۹)	(-۰/۴۹۰۱)	(-۰/۰۷۵۶)	(-۰/۴۳۱۶)	(-۰/۱۷۵۹)	(-۰/۴۵۱۸)	(-۰/۰۶۹۶)	(-۰/۴۳۰۳)
۵۰۰	-۰/۵۳۳۳	۱/۶۳۱۶	-۰/۴۸۲۶	-۰/۶۱۲۶	-۰/۵۲۲۵	۱/۵۹۵۷	-۰/۴۹۱۸	-۰/۶۵۱۴
RMSE	(-۰/۱۲۴۵)	(-۰/۲۳۶۱)	(-۰/۰۴۷۲)	(-۰/۳۷۳۷)	(-۰/۱۰۳۴)	(-۰/۲۲۱۵)	(-۰/۰۴۲۹)	(-۰/۳۴۴۱)
۸۰۰	-۰/۵۱۸۸	۱/۵۶۹۸	-۰/۴۹۳۸	-۰/۶۸۷۸	-۰/۴۹۵۳	۱/۵۵۹۸	-۰/۵۱۰۶	-۰/۷۳۸۷
RMSE	(-۰/۰۹۷۶)	(-۰/۱۸۳۴)	(-۰/۰۳۷۳)	(-۰/۳۱۵۰)	(-۰/۰۸۸۳)	(-۰/۱۵۷۲)	(-۰/۰۳۲۲)	(-۰/۳۰۸۲)
۱۰۰۰	-۰/۵۰۴۱	۱/۵۵۶۴	-۰/۴۹۵۱	-۰/۶۸۹۴	-۰/۴۹۸۵	۱/۵۳۷۲	-۰/۵۰۴۱	-۰/۷۱۴۸
RMSE	(-۰/۰۸۵۱)	(-۰/۱۵۱۶)	(-۰/۰۳۱۷)	(-۰/۲۹۵۶)	(-۰/۰۷۵۴)	(-۰/۱۴۴۷)	(-۰/۰۲۸۱)	(-۰/۲۶۰۷)

جدول ۴: نتایج دو روش برآورد E-بیز با دو گروه مختلف از توزیع پیشین ابرپارامترها از خانواده PIW-L

$$(\alpha, \beta, \gamma, p) = (0.5, 1/5, 0.5, 0.7)$$

n	E-Bayes ₁				E-Bayes ₂			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}
۲۰۰	۰/۴۷۲۲	۱/۶۶۱۴	۰/۵۲۶۴	۰/۶۷۱۱	۰/۵۴۶۲	۱/۶۹۰۴	۰/۵۳۱۹	۰/۷۳۴۶
RMSE	(۰/۱۴۵۱)	(۰/۲۹۳۴)	(۰/۰۴۲۹)	(۰/۳۲۶۷)	(۰/۱۵۸۱)	(۰/۳۱۷۹)	(۰/۰۵۶۸)	(۰/۳۵۶۹)
۵۰۰	۰/۴۸۶۳	۱/۵۷۴۱	۰/۵۱۱۶	۰/۶۸۹۴	۰/۵۱۲۹	۱/۵۸۳۷	۰/۵۱۳۱	۰/۶۸۴۷
RMSE	(۰/۰۸۷۸)	(۰/۱۸۰۷)	(۰/۰۰۲۶)	(۰/۲۵۹۴)	(۰/۰۹۵۵)	(۰/۲۰۶۶)	(۰/۰۴۱۵)	(۰/۳۱۰۹)
۸۰۰	۰/۵۱۰۴	۱/۴۶۳۱	۰/۵۰۷۱	۰/۶۸۷۱	۰/۴۹۶۳	۱/۵۳۹۷	۰/۴۹۰۸	۰/۶۹۱۱
RMSE	(۰/۰۵۳۴)	(۰/۱۲۵۵)	(۰/۰۲۰۷)	(۰/۱۶۸۲)	(۰/۰۷۹۳)	(۰/۱۳۰۵)	(۰/۰۲۹۹)	(۰/۲۴۸۱)
۱۰۰۰	۰/۴۹۸۹	۱/۴۸۱۱	۰/۵۰۱۸	۰/۶۹۱۲	۰/۴۹۷۲	۱/۵۲۲۸	۰/۴۹۷۵	۰/۶۹۳۴
RMSE	(۰/۰۴۸۶)	(۰/۰۹۳۹)	(۰/۰۱۳۷)	(۰/۱۴۸۸)	(۰/۰۶۰۱)	(۰/۱۱۹۵)	(۰/۰۱۷۴)	(۰/۱۷۹۳)

جدول ۵: نتایج برآورد تابع قابلیت اطمینان با روش‌های مختلف برآورد از خانواده EIW-L با مقادیر MSE در پرانتز.

n	t	R(t)	ML	Bayes	E-Bayes ₁	E-Bayes ₂
۱	۱	۰/۹۳۶۵	۰/۹۳۸۸	۰/۹۳۷۴	۰/۹۳۶۳	۰/۹۳۶۱
			(۱/۰۶۹۱e - ۷)	(۶/۳۷۸۱e - ۸)	(۳/۶۲۲۳e - ۸)	(۲/۰۴۴۸e - ۸)
۲	۱	۰/۱۹۸۵	۰/۱۷۸۲	۰/۱۸۱۵	۰/۱۹۵۳	۰/۱۸۷۶
			(۴/۱۱۹۱e - ۴)	(۲/۸۷۹۲e - ۴)	(۱/۰۰۹۵e - ۵)	(۱/۱۷۱۶e - ۴)
۲۰۰	۳	۰/۰۸۳۸	۰/۰۷۰۸	۰/۰۷۳۲	۰/۰۸۰۴	۰/۰۷۶۵
			(۱/۷۰۱۷e - ۴)	(۱/۱۷۳۸e - ۴)	(۱/۱۴۶۴e - ۵)	(۵/۲۲۲۷e - ۵)
۴	۳	۰/۰۶۰۲	۰/۰۴۹۸	۰/۰۵۱۶	۰/۰۵۷۱	۰/۰۵۴۳
			(۱/۰۹۳۴e - ۴)	(۷/۴۶۱۵e - ۵)	(۹/۳۷۷۱e - ۶)	(۳/۴۴۷۸e - ۵)
۵	۳	۰/۰۵۱۹	۰/۰۴۲۵	۰/۰۴۵۳	۰/۰۴۹۱	۰/۰۴۶۹
			(۸/۸۲۷۱e - ۵)	(۵/۹۹۳۲e - ۵)	(۸/۳۶۷۶e - ۶)	(۲/۸۱۹۳e - ۵)
IMSE			۰/۰۰۰۱۶	۰/۰۰۰۱۱	۷/۸۶۸۲e - ۶	۴/۶۵۲۷e - ۵
۱	۱	۰/۹۳۶۵	۰/۹۳۸۲	۰/۹۳۵۸	۰/۹۳۶۶	۰/۹۳۶۹
			(۶/۱۰۲۲e - ۶)	(۱/۹۰۳۸e - ۶)	(۹/۰۲۸۱e - ۸)	(۱/۱۲۲۳e - ۸)
۲	۱	۰/۱۹۸۵	۰/۱۷۹۹	۰/۱۸۵۲	۰/۱۹۹۴	۰/۱۹۲۷
			(۳/۴۳۸۸e - ۴)	(۱/۷۶۱۸e - ۴)	(۳/۰۴۷۳e - ۶)	(۳/۲۹۷۷e - ۵)
۱۰۰۰	۳	۰/۰۸۳۸	۰/۰۷۱۹	۰/۰۷۴۷	۰/۰۸۲۶	۰/۰۷۸۷
			(۱/۴۳۰۱e - ۴)	(۸/۱۹۵۴e - ۵)	(۵/۷۱۱۱e - ۷)	(۲/۵۴۴۱e - ۵)
۴	۳	۰/۰۶۰۲	۰/۰۵۰۶	۰/۰۵۲۸	۰/۰۶۰۵	۰/۰۵۵۹
			(۹/۰۸۵۸e - ۵)	(۵/۳۹۲۱e - ۵)	(۲/۶۴۷۳e - ۶)	(۱/۸۸۶۸e - ۵)
۵	۳	۰/۰۵۱۹	۰/۰۴۳۹	۰/۰۴۵۲	۰/۰۵۱۴	۰/۰۴۸۳
			(۷/۲۸۱۶e - ۵)	(۴/۵۳۵۷e - ۵)	(۱/۸۲۰۹e - ۶)	(۱/۶۱۰۹e - ۵)
IMSE			۰/۰۰۰۱۳	۷/۱۸۶۳e - ۵	۱/۶۳۵۴e - ۶	۱/۸۶۸۱e - ۵

در جدول ۶ برخی معیارهای آماری داده‌های مبتلایان سرطان نمایش داده شده است. با توجه به مقادیر ارائه شده در جدول، توزیع تجربی داده‌ها، چوله^۱ به راست و کشیده^۲ است.

مقادیر برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی، آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف (K-S) و p-مقدار متناظر آن در جدول ۷ ارائه شده است. طبق نتایج حاصل از این جدول، برازندگی توزیع EIW-L و PIW-L در مدل‌سازی داده‌های مبتلایان سرطان تأیید می‌گردد. از سوی دیگر با توجه به p-مقدار، توزیع EIW-L نسبت به PIW-L برازندگی بهتری دارد.

نمودار زمان کل آزمون (TTT^۳) برای داده‌های مبتلایان سرطان در شکل ۵ نشان داده شده است که دلالت بر کفایت توزیع EIW-L در برازش این داده‌ها دارد.

برخی مدل‌های آماری کلاسیک برای ارزیابی عملکرد توزیع EIW-L در مدل‌سازی داده‌های مبتلایان سرطان در نظر گرفته می‌شود. به منظور مقایسه کارایی انواع مدل‌ها از معیار نیکویی برازش ناحیه اطلاع آکائیک (AIC^۴) استفاده می‌شود و نتایج در جدول ۸ خلاصه شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، با توجه به کمینه بودن مقدار AIC برای توزیع EIW-L، لذا کفایت توزیع در برازش این داده‌ها تأیید می‌گردد.

$$\begin{aligned} IMSE(\hat{R}(t)) &= \\ &= \frac{1}{H} \sum_{j=1}^H \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} (\hat{R}_j(t_i) - R(t_i))^2 \\ &= \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} MSE(\hat{R}(t_i)) \end{aligned}$$

که در آن MSE میانگین مربعات خطا، H تعداد تکرار، n_t تعداد زمان و $t = 1, 2, 3, 4, 5$ می‌باشد.

با افزایش حجم نمونه n ، RMSE کاهش می‌یابد.

روش برآورد E-بیز نسبت به دو روش دیگر در برآورد تابع قابلیت اطمینان نیز برتری دارد و هم‌چنین گروه اول توزیع‌های پیشین نسبت به گروه دوم ترجیح داده می‌شود. هم‌چنین با افزایش حجم نمونه مقدار IMSE تابع قابلیت اطمینان کاهش می‌یابد.

۷- آنالیز داده‌های واقعی

در این بخش، کارایی خانواده G^*Q-L (با انتخاب دو زیرمدل خاص EIW-L و PIW-L) را در مدل‌سازی داده‌های واقعی نشان می‌دهیم.

داده‌های زمان بقای گروهی از بیماران مبتلا به سرطان سر و گردن که اولین بار توسط [۲۵] مطالعه شده است را در نظر می‌گیریم. این بیماران تحت درمان ترکیبی از پرتودرمانی و شیمی‌درمانی قرار گرفته‌اند. تعداد کل بیماران $n = 45$ می‌باشد.

جدول ۶: برخی آماره‌های توصیفی داده‌های مبتلایان سرطان

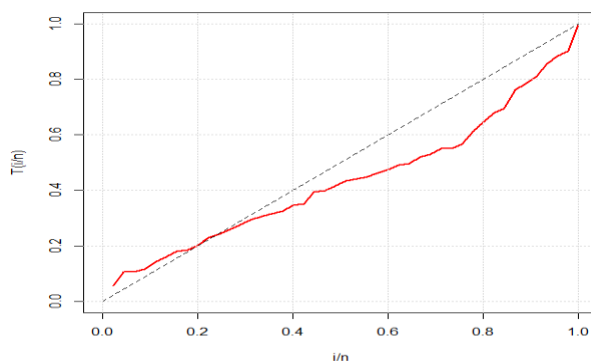
	کشیدگی	چولگی	واریانس	میانه	میانگین
داده مبتلایان سرطان	۱۶/۸۵	۳/۴۲	۹۱۸۹۲/۷۹	۱۲۷	۲۱۹/۴۵

^۴ Akaike Information Criterion

^۱ Skewed

^۲ Leptokurtic

^۳ Total Test Time



شکل ۵. نمودار TTT داده‌های مبتلایان سرطان

جدول ۷: نتایج آنالیز داده‌های مبتلایان سرطان

توزیع	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	\hat{p}	K-S	مقدار p
EIW-L	۲۰/۳۴	۲۶/۷۵	۰/۳۱۷۳	۰/۱۳۱۱	۰/۰۵۷۲	۰/۹۹۷۹
PIW-L	۱۸/۹۷	۳/۳۶	۰/۸۷۱۱	۰/۲۶۰۸	۰/۱۴۴۸	۰/۶۷۷۳

جدول ۸: برآورد پارامترهای توزیع‌های مختلف و مقدار آماره نیکویی برازش داده‌های مبتلایان سرطان

مدل	مقادیر برآورد	AIC
گاما	$\hat{\alpha} = ۱/۰۱۳۸, \hat{\beta} = ۰/۰۰۴۶$	۵۷۹/۱۹
وایبل	$\hat{\alpha} = ۰/۹۳۴۸, \hat{\beta} = ۲۱۱/۳۸$	۵۷۸/۷۸
پارتو	$\hat{\alpha} = ۱۰/۵۶, \hat{\theta} = ۲۵/۰۲$	۷۳۶/۶۷
گومپرتز	$\hat{k} = ۰/۰۰۰۳, \hat{\mu} = ۱/۱۲۳۱$	۷۲۵/۱۷
لیندلی	$\hat{\theta} = ۰/۰۰۹۱$	۵۹۳/۲۳
بور نوع XII	$\hat{c} = ۵/۳۳۲۳, \hat{k} = ۰/۰۳۸۸$	۶۶۹/۶۴
وایبل معکوس	$\hat{\beta} = ۸۲/۹۵, \hat{\theta} = ۱/۰۲۴۸$	۵۷۳/۰۱
مارشال-الکین وایبل	$\hat{\alpha} = ۱/۲۱۰۱, \hat{\beta} = ۰/۰۰۵۴, \hat{\theta} = ۰/۸۹۲۱$	۵۸۱/۳۳
وایبل نمایی شده	$\hat{\alpha} = ۲/۳۵۸۲, \hat{\lambda} = ۲/۴۶۶۷, \hat{k} = ۰/۲۱۳۳$	۶۵۳/۷۸
PIW-L	$\hat{\alpha} = ۱۸/۹۷, \hat{\beta} = ۳/۳۶, \hat{\gamma} = ۰/۸۷۱۱, \hat{p} = ۰/۲۶۰۸$	۵۷۳/۳۴
EIW-L	$\hat{\alpha} = ۲۰/۳۴, \hat{\beta} = ۲۶/۷۵, \hat{\gamma} = ۰/۳۱۷۳, \hat{p} = ۰/۱۳۱۱$	۵۶۲/۱۱

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، خانواده جدیدی از توزیع‌های طول عمر معرفی شده است که به عنوان حالت خاص، دو زیرمدل از آن به نام‌های توزیع وایبل معکوس نمایی-لگاریتمی و توزیع وایبل معکوس توانی-لگاریتمی را معرفی و پارامترهای توزیع‌ها برآورد شده است. یکی از ویژگی‌های کاربردی دو توزیع مذکور، نرخ مخاطره وان شکل وارون آن‌ها می‌باشد که در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی کاربرد دارد. رویکردهای مختلف برآورد شامل ماکزیمم درست‌نمایی، بیزی و E-بیزی برای خانواده جدید و دو زیرمدل آن بسط داده شده و با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، روش‌های برآورد مقایسه شده‌اند. نتایج مطالعات شبیه‌سازی حاکی از برتری آماری (برحسب کمترین مقدار RMSE) روش برآورد E-بیزی نسبت به سایر روش‌های برآورد می‌باشد. علاوه بر این، به مبحث تابع قابلیت اطمینان و برآورد آن با استفاده از روش‌های فوق، پرداخته شده است. در برآورد تابع قابلیت اطمینان نیز کارایی روش برآورد E-بیزی نسبت به دو روش دیگر تایید شده است. در برازش داده‌های واقعی، خانواده توزیع معرفی شده در مقایسه با بعضی از توزیع‌های کلاسیک مانند گاما، وایبل، پارتو، گومپرتز، لیندلی، بور نوع XII، وایبل معکوس، مارشال-الکین وایبل و وایبل نمایی شده، دارای کارایی بیشتری بوده است.

- فهرست منابع**
- [۸] J.T. Eghwerido, J.D. Ikwuoche, O.D. Adebisi, Inverse odd Weibull generated family of distribution, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research ۱۶ (۳) (۲۰۲۰) ۶۱۷–۶۳۳.
- [۹] M. Zichuan, S. Hussain, A. Iftikhar, M. Ilyas, Z. Ahmad, D.M. Khan, S. Manzoor, A new extended-X family of distributions: properties and applications, Computational and Mathematical Methods in Medicine (۲۰۲۰) Article ID ۴۶۵۰۵۲۰, ۱۳ pages.
- [۱۰] R. Tahmasbi, S. Rezaei, A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate, Computational Statistics and Data Analysis ۵۲ (۸) (۲۰۰۸) ۳۸۸۹–۳۹۰۱.
- [۱۱] M. Rahmouni, A. Orabi, A generalization of the exponential-logarithmic distribution for reliability and life data analysis, Life Cycle Reliability and Safety Engineering ν , (۲۰۱۸) ۱۵۹–۱۷۱.
- [۱۲] Y. Liu, M. Ilyas, S.K. Khosa, E. Muhmoudi, Z. Ahmad, D.M. Khan, G.G. Hamedani, A flexible reduced Logarithmic-X family of distributions with biomedical analysis, Computational and Mathematical Methods in Medicine (۲۰۲۰) Article ID ۴۳۷۳۵۹۵
- [۱۳] S. Dey, M. Nassar, D. Kumar, α Logarithmic transformed family of distributions with application. Annals Data Science ۴ (۲۰۱۷) ۴۵۷–۴۸۲.
- [۱۴] S.K. Maurya, A. Kaushik, R.K. Singh, S.K. Singh, U. Singh, A new method of
- [۱] M. Amini, S.M.T.K. Mir Mostafaei, J. Ahmadi, Log-gamma-generated families of distributions, *Statistics* ۴۸ (۴) (۲۰۱۴) ۹۱۳–۹۳۲.
- [۲] Z. Ahmad, M. Elgarhy, G.G. Hamedani, A new Weibull-X family of distributions: properties, characterizations and applications, Journal of Statistical Distributions and Applications ۵(۵) (۲۰۱۸) ۱–۱۸.
- [۳] H. Torabi, N.H. Montazari, The logistic-uniform distribution and its application, Communications in Statistics-Simulation and Computation ۴۳ (۲۰۱۴) ۲۵۵۱–۲۵۶۹.
- [۴] S.J. Almalki, J. Yuan, A new modified Weibull distribution, Reliability Engineering and System Safety ۱۱۱ (۲۰۱۳) ۱۶۴–۱۷۰.
- [۵] G.M. Cordeiro, E.M.M. Ortega, D.C.C. Cunha, The exponentiated generalized class of distributions, Journal of Data Science ۱۱ (۲۰۱۳) ۱–۲۷.
- [۶] X. Huo, S.K. Khosa, Z. Ahmad, Z. Almaspoor, M. Ilyas, M. Aamir, A new lifetime Exponential-X family of distributions with applications to reliability data, Mathematical Problems in Engineering (۲۰۲۰) Article ID ۱۳۱۶۳۴۵.
- [۷] M. Ijaz, W.K. Mashwani, S.B. Belhaouari, A novel family of lifetime distribution with applications to real and simulated data, *PloS One* (۲۰۲۰) ۱۵ (۱۰) e۰۲۳۸۱۷۴۴.

- distribution with decreasing and upside-down bathtub-shaped hazard rate function, *Statistica* ۷۹ (۴) (۲۰۱۹) ۳۹۹–۴۲۶.
- [۲۲] R.K. Maurya, Y.M. Tripathi, T. Sen, M.K. Rastogi, On progressively censored inverted exponentiated Rayleigh distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation* ۸۹ (۳) (۲۰۱۹) ۴۹۲–۵۱۸.
- [۲۳] M.H. Tahir, G.M. Cordeiro, Compounding of distributions: a survey and new generalized classes, *Journal of Statistical Distributions and Applications* ۳ (۱) (۲۰۱۶) ۱–۳۵.
- [۲۴] J.O. Berger, *Statistical decision theory and Bayesian analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York, (۱۹۸۵).
- [۲۵] B. Efron, Logistic regression, survival analysis, and the Kaplan–Meier curve. *Journal of American Statistical Association* ۸۳(۴۰۲) (۱۹۸۸) ۴۱۴–۴۲۵.
- proposing distribution and its application to real data, *Imperial Journal of Interdisciplinary Research*, ۲ (۶) (۲۰۱۶) ۱۳۳۱–۱۳۳۸.
- [۱۵] M. Aslam, C. Ley, Z. Hussain, S.F. Shah, Z. Asghar, A new generator for proposing flexible lifetime distributions and its properties, *PloS one* ۱۵ (۴) (۲۰۲۰) e۰۲۳۱۹۰۸.
- [۱۶] M. Khalid, M. Aslam, T.N. Sindhu, Bayesian analysis of ۳-components Kumaraswamy mixture model: Quadrature method vs. Importance sampling, *Alexandria Engineering Journal* ۵۹ (۴) (۲۰۲۰) ۲۷۵۳–۲۷۶۳.
- [۱۷] A. Rabie, J. Li, E-Bayesian estimation based on Burr-X generalized type-II hybrid censored data, *Symmetry* ۱۱ (۵) (۲۰۱۹) ۶۲۶.
- [۱۸] A. Algarni, A.M. Almarashi, H. Okasha, H.K.T. Ng, E-Bayesian estimation of Chen distribution based on type-I censoring scheme, *Entropy* ۲۲ (۲۰۲۰) ۶۳۶.
- [۱۹] H. Piriaei, G. Yari, R. Farnoosh, On E-Bayesian estimations for the cumulative hazard rate and mean residual life under generalized inverted exponential distribution and type-II censoring, *Journal of Applied Statistics* ۴۷ (۵) (۲۰۲۰) ۸۶۵–۸۸۹.
- [۲۰] V.K. Sharma, S.K. Singh, U. Singh, A new upside-down bathtub shaped hazard rate model for survival data analysis, *Applied Mathematics and Computation* ۲۳۹ (۲۰۱۴) ۲۴۲–۲۵۳.
- [۲۱] S. Dey, M. Nassar, D. Kumar, A. Alzaatreh, M.H. Tahir, A new lifetime

