دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره پنجاهم، مهر و آبان ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

# توسیعی برای یک نامساوی شامل میانگین‌های حسابی و لگاریتمی با استفاده از نامساوی هرمیت-هادامارد تعمیم یافته

محسن رستمیان دلاور [*,1]، محسن کیان [2]

[(1و2)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۱۴  تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۱۲

**چکیده**

با استفاده از تعریف نگاشت حقیقی $\mathbf{L(t)}$ و استفاده از تحدب تابع مورد نظر، توسیعی برای نامساوی معروف هرمیت-هادامارد ارائه می‌شود. این نامساوی جدید دارای کاربردهای مختلف در بحث نامساوی‌های ریاضی است که در حالت خاص تعمیم‌دهنده یک نامساوی میانگینی است شامل میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم‌یافته که در مباحث مربوط به میانگین‌های ریاضی شناخته شده و دارای کاربردهای فراوان هستند. در واقع یک نامساوی کلاسیک در مورد میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم‌یافته در مباحث آنالیز ریاضی برای توان‌های طبیعی وجود دارد که با استفاده از نتایج این مقاله می‌توان آن را به توان‌های حقیقی و صورت‌های جدیدتر تعمیم داد. در ضمن برخی از خواص تابعی جدید مربوط به نگاشت $\mathbf{L(t)}$ را در این مقاله بررسی و اثبات می‌کنیم. در بخش پایانی شرط "$M$-لیپشیتس" بودن و شرط کرانداری تابع، جایگزین شرط تحدب تابع مورد نظر می‌شود تا با استفاده از آن نامساوی‌های جدیدتر و تعمیم‌یافته در رابطه با میانگین‌های عددی خاص بدست آید.

**واژه‌های کلیدی:** نامساوی هرمیت-هادامارد، میانگین عددی خاص، تابع "$M$-لیپشیتس"، تابع کراندار.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: m.rostamian@ub.ac.ir

**۱- معرفی و مقدمات**

در مطالعه توزیع یک جامعه آماری مقدار نماینده که اندازه‌ها در اطراف آن توزیع شده‌اند را مقدار مرکزی می‌نامند و هر معیار عددی را که معرف مرکز مجموعه داده‌ها باشد، معیار گرایش به مرکز می‌نامند. میانگین از متداول‌ترین معیارهای گرایش به مرکز است. در واقع میانگین یک تابع آماری است که به عنوان شاخص تمایل مرکزی داده‌ها مطرح می‌شود. از معروف‌ترین میانگین‌ها می‌توان به میانگین‌های حسابی، هندسی، هارمونیک (همساز)، لگاریتمی و لگاریتمی تعمیم‌یافته اشاره کرد. فرمول هر کدام از میانگین‌ها کاربرد معینی دارد. به عنوان مثال میانگین هندسی برای میانگین‌گیری از رشدها و نسبت‌ها مناسب است، میانگین هارمونیک برای محاسبه داده‌هایی که واحدهای آن ترکیبی است مورد استفاده قرار می‌گیرد و میانگین حسابی که در سایر موارد اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه به دو مورد از میانگین‌ها که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد اشاره می‌کنیم.

برای $a, b \in \mathbb{R}^+$ دو میانگین خاص زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A(ab) = \frac{a+b}{۲}, \qquad \text{میانگین حسابی}$$

$$L_n(a,b) = \left[\frac{b^{n+۱} - a^{n+۱}}{(n+۱)(b-a)}\right]^{\frac{۱}{n}}, \qquad \text{میانگین لگاریتمی تعمیم یافته}$$

جاییکه $a < b$ و $n \in N$.

نتیجه کلاسیک زیر در مورد ارتباط بین میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم یافته برای توان‌های طبیعی برقرار است:

قضیه ۱ ([۱]): برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ با شرط $۰ \leq a < b$ و $n \in N$، نامساوی زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{A^n(a,b) \leq L_n^n(a,b) \leq A(a^n, b^n).} \qquad (\mathbf{1.1})$$

نکته اصلی در مورد نامساوی (۱.۱) این است که با استفاده از نامساوی معروف هرمیت-هادامارد می‌توان توان‌های نامساوی فوق را از اعداد طبیعی به بازه حقیقی $[۱, +\infty)$ تعمیم داد که در ادامه به عنوان یک نتیجه جزئیات آن بیان می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که یک تابع محدب $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ، تابعی است که در شرایط زیر صدق کند:

$$f(tx + (۱-t)y) \leq tf(x) + (۱-t)f(y),$$

برای هر $x, y \in [a,b]$ و $t \in [۰,۱]$.

قابل ذکر است که برای اولین بار ینسن (Jensen) تابع با شرایط فوق را محدب نامید و خواص جدید و جالبی را برای آن ارائه کرد([۲،۳]).

نامساوی زیر در متون ریاضی معروف به نامساوی هرمیت-هادامارد است، که در آن $f$ یک تابع محدب روی $[a,b]$ می‌باشد.

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leq \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}. \qquad (۱.۲)$$

نامساوی هرمیت هادامارد بدون اغراق اولین نتیجه بنیادی برای توابع محدب است با کاربردهای فراوان بخصوص در زمینه میانگین‌های خاص عددی نظیر میانگین‌های حسابی، هندسی و لگاریتمی. این نامساوی در ابتدا بنام هادامارد (Hadamard) نام‌گذاری شد، ریاضیدانی که در سال ۱۸۹۳ میلادی آن را ارائه و اثباتی برای آن بیان کرد. اما بعدها مشخص شد که قبلا در سال ۱۸۸۱ میلادی ریاضیدانی دیگر بنام هرمیت (Hermite) در نامه‌ای به

مجله Mathesis این نامساوی را ارائه کرده است و نتایجی را در مورد کران بالا و پایین تابع لگاریتم از آن به صورت زیر استخراج نموده است:

$$x - \frac{x^۲}{x+۲} < log(x+۱) < x - \frac{x^۲}{۲(x+۱)} \quad (x > ۰),$$

امروزه نامساوی (۱.۲) را بنام هرمیت-هادامارد می‌شناسیم ([٤] را ببینید). تعمیم‌ها و کاربردهای زیادی برای توابع محدب و نامساوی هرمیت-هادامارد در طول ۱۲۰ سال اخیر ارائه شده است که خواننده علاقمند را به مطالعه مراجع [۱،٤-۱۰] دعوت می‌کنیم.

همانطور که بیان کردیم از جمله کاربردهای نامساوی هرمیت-هادامارد (۱.۲)، تعمیم رابطه (۱.۱) از حالت توان-های طبیعی به توان‌های حقیقی است، به این ترتیب که در نامساوی هرمیت-هادامارد به ازای $r \in [۱,+\infty)$ و $x \in [a,b]$ کافیست قرار دهیم $f(x) = x^r$. بنابراین با کمی محاسبات انتگرال مقدماتی خواهیم داشت:

$$A^r(a,b) \le L_r^r(a,b) \le A(a^r,b^r), \qquad (۱.۳)$$

برای هر $a,b \in \mathbb{R}$ با شرط $۰ \le a < b$ و $r \in [۱,+\infty)$.

برای مطالعه بیشتر در باره نامساوی‌های میانگینی، خوانندگان علاقمند را به مطالعه مراجع [۱،۵] دعوت می‌کنیم.

از سوی دیگر در [۱۱]، نگاشت حقیقی $L(t): [۰,۱] \to \mathbb{R}$ برای اولین بار برای تابع انتگرالپذیر $f$ بر $[a,b]$ بصورت زیر معرفی شد:

$$\boldsymbol{L(t) := \frac{1}{2(b-a)} \times \int_a^b \big[f(ta+(1-t)x) + f\big((1-t)x+tb\big)\big]dx,} \qquad (\mathbf{1.4})$$

برای هر $t \in [۰,۱]$ و خواص مقدماتی زیر برای آن ارائه و اثبات شد.

قضیه ۲ ([۱۱]): فرض کنید $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ یک نگاشت محدب باشد. آنگاه

نگاشت $L$ روی $[۰,۱]$ محدب است.

نامساوی زیر برقرار است:

$$L(t) \le \frac{۱-t}{b-a}\int_a^b f(x)dx + t.\frac{f(a)+f(b)}{۲} \le \frac{f(a)+f(b)}{۲},$$

برای هر $t \in [۰,۱]$.

تساوی زیر برقرار است:

$$\sup_{۰\le t\le ۱} L(t) = \frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

برای مطالعه جدیدترین نتایج در رابطه با نگاشت فوق خوانندگان را به [۱۲] ارجاع می‌دهیم.

با توجه به نتایج و نامساوی‌های بیان شده‌ی فوق، در این مقاله ما با استفاده از نگاشت حقیقی $L(t)$ تعمیمی برای نامساوی هرمیت-هادامارد (۱.۲) و در نتیجه تعمیمی برای نامساوی میانگینی (۱.۳) ارائه خواهیم کرد.

در بخش پایانی شرط "$M$-لیپشیتس" (M-Lipschitz) بودن تابع و شرط کرانداری تابع مورد نظر جایگزین شرط تحدب (شرط اساسی در نامساوی هرمیت-هادامارد) می‌شود تا نتایج و نامساوی‌های جدیدی در رابطه با نامساوی هرمیت-هادامارد و میانگین‌های عددی خاص بدست آید.

۲- نتایج اصلی

در این بخش به عنوان نتایج اصلی با استفاده از تعریف نگاشت $L(t)$ تظریف و تعمیمی برای نامساوی (۱.۲) و در نتیجه تظریف و تعمیمی برای نامساوی (۱.۳) ارائه خواهیم کرد. همچنین در یک گزاره برخی از خواص تابعی، مربوط به $L(t)$ را بررسی و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد، آنگاه

برای هر $t\in[۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$، داریم:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \le \frac{۱-t}{\left|\frac{۱}{۲}-t\right|}L(t)-\frac{۱}{(b-a)|۱-۲t|}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(ta+(۱-t)b)+f(tb+(۱-t)a)}{۲}. \quad (۲.۱)$$

بعلاوه اگر $t=\frac{۱}{۲}$ آنگاه

$$L\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx.$$

اثبات: اگر $t=۱$، آنگاه نتیجه

$$L(۱)=\frac{f(a)+f(b)}{۲},$$

که از تعریف $L(t)$ در (۱.۴) بدست می‌آید دستاورد جدیدی بجز نامساوی هرمیت-هادامارد ارائه نمی‌کند. بنابراین گیریم $t\neq ۱$ باشد. با استفاده از دو تغییر متغیر $u=ta+(۱-t)x$ و $u=(۱-t)x+tb$ در (۱،٤)، به تساوی زیر می‌رسیم (جزئیات را بیان نمی‌کنیم):

$$L(t)=\frac{۱}{۲(۱-t)(b-a)} \times\left[\int_a^{ta+(1-t)b} f(u)du+\int_{tb+(1-t)a}^{b} f(u)du\right]. \quad (۲.۲)$$

اکنون با کمی محاسبات و فرض

$$M(t)=Max\{ta+(۱-t)b,tb+(۱-t)a\}$$

و

$$m(t)=Min\{ta+(۱-t)b,tb+(۱-t)a\},$$

برای هر $t\in[۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$ از رابطه فوق بدست می آوریم:

$$\boldsymbol{2(1-t)(b-a)L(t)} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(u)du}+\int_{\boldsymbol{tb+(1-t)a}}^{\boldsymbol{ta+(1-t)b}} \boldsymbol{f(u)du}, & \boldsymbol{0\le t<\frac{1}{2}}; \\ \displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(u)du}+\int_{\boldsymbol{ta+(1-t)b}}^{\boldsymbol{tb+(1-t)a}} \boldsymbol{f(u)du}, & \boldsymbol{\frac{1}{2}<t<1}. \end{cases}$$

$$=\int_a^b f(u)du+\int_{Min\{ta+(1-t)b,tb+(1-t)a\}}^{Max\{ta+(1-t)b,tb+(1-t)a\}} f(u)du$$

$$= \int_a^b f(u)du + \int_{m(t)}^{M(t)} f(u)du.$$

از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{۱}{(b-a)|۱-۲t|}\int_{m(t)}^{M(t)} f(u)du \qquad (۲.۳)$$
$$= \frac{۱-t}{\left|\frac{۱}{۲}-t\right|}L(t) - \frac{۱}{(b-a)|۱-۲t|}\int_a^b f(x)dx.$$

همچنین بدون ارائه اثبات، دو تساوی زیر را برای هر $t \in [۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$ در نظر می‌گیریم :

$$M(t) - m(t) = |۱-۲t|(b-a)$$

و

$$\frac{M(t)+m(t)}{۲} = \frac{a+b}{۲},$$

که در کنار نامساوی هرمیت-هادامارد (۱.۲) برای تابع محدب $f$ و خواص انتگرال معین برای هر $t \in [۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$ نتیجه می‌دهند:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) = f\left(\frac{ta+(۱-t)b+tb+(۱-t)a}{۲}\right)$$
$$= f\left(\frac{M(t)+m(t)}{۲}\right) \le \frac{۱}{M(t)-m(t)}\int_{m(t)}^{M(t)} f(u)du$$
$$= \frac{۱}{(b-a)|۱-۲t|}\int_{m(t)}^{M(t)} f(u)du \le \frac{f\big(M(t)\big)+f\big(m(t)\big)}{۲}$$
$$= \frac{f(ta+(۱-t)b)+f(tb+(۱-t)a)}{۲}. \quad (۲.۴)$$

حال با توجه به روابط (۲.۳)، (۲.۴) و انجام محاسبات مربوطه، به نامساوی مورد نظر دست پیدا خواهیم کرد.
بعلاوه برای $t = \frac{۱}{۲}$ داریم:

$$L\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲(b-a)}\int_a^b \left[f\left(\frac{x+a}{۲}\right) + f\left(\frac{x+b}{۲}\right)\right]dx$$
$$= \frac{۱}{(b-a)}\left[\int_a^{\frac{a+b}{۲}} f(u)du + \int_{\frac{a+b}{۲}}^b f(v)dv\right] = \frac{۱}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx.$$

این تساوی نتیجه مورد نظر را بدست می‌دهد. ■

در گزاره زیر برخی از خواص تابعی جدید مربوط به $L(t)$ را بررسی و اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱: تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

به ازای $p>۱$ و $t\in[۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$

$$|L(t)|\le[(۱-t)(b-a)]^{-\frac{۱}{p}}\|f\|_p$$

در حالت خاص برای $t=\frac{۱}{۲}$،

$$\left|L\left(\frac{۱}{۲}\right)\right|\le(b-a)^{-\frac{۱}{p}}\|f\|_p$$

در ضمن

$$L(t)\le\|f\|_\infty$$

اگر $f$ یک تابع محدب روی $[a,b]$ باشد، آنگاه تظریف (refinement) زیر از نامساوی هرمیت-هادامارد برقرار می‌شود:

$$\boldsymbol{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{1}{2(b-a)}\times\left[\int_0^1\int_a^b f(ta+(1-t)b)dxdt+\int_0^1\int_a^b f(tb+(1-t)x)dxdt\right]\le\frac{f(a)+f(b)}{2}}.$$

فرض کنید $f$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد. نتیجه زیر برقرار است:

$$\lim_{t\to۱}L(t)=\frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

فرض کنید $f$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد. حداقل یک $t_۰\in(۰,\frac{۱}{۲})$ موجود است که

$$L(t_۰)=\frac{f(t_۰a+(۱-t_۰)b)+f(t_۰b+(۱-t_۰)a)}{۲}.$$

اثبات:

عدد $q>۱$ را طوری انتخاب کنید که $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=۱$. اکنون با استفاده از (۲.۲) و نامساوی هولدر (Hölder) داریم:

$$|L(t)|\le\frac{\|f\|_p}{۲(۱-t)(b-a)}\times\left[\left(\int_a^{ta+(۱-t)b}du\right)^{\frac{۱}{q}}+\left(\int_{tb+(۱-t)a}^b du\right)^{\frac{۱}{q}}\right]=\frac{[(۱-t)(b-a)]^{\frac{۱}{q}}}{(۱-t)(b-a)}\|f\|_p=[(۱-t)(b-a)]^{-\frac{۱}{p}}\|f\|_p$$

اگر $f$ بر $[a,b]$ محدب باشد، آنگاه طبق قسمت (۱) در قضیه ۲، نگاشت $L(t)$ بر $[۰,۱]$ محدب است و طبق نامساوی کلاسیک هرمیت-هادامارد داریم:

$$L\left(\frac{۱}{۲}\right)\le\int_۰^۱L(t)dt\le\frac{L(۰)+L(۱)}{۲}=\frac{\frac{f(a)+f(b)}{۲}+\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx}{۲}.$$

حال چون تابع $f$ بر $[a,b]$ محدب است با استفاده مجدد از نامساوی هرمیت-هادامارد داریم:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leq L\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

و

$$\frac{\frac{f(a)+f(b)}{۲}+\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx}{۲} \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

این نامساوی‌ها نتیجه مورد نظر را بدست می‌دهند.

با استفاده از قاعده هوپیتال (L'Hôpital) و قضیه لایبنیتز(Leibniz) (مشتقگیری از انتگرال) در (۲.۲) نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

از آنجا که $L(۰) = L(\frac{۱}{۲})$ و نگاشت $L$ پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر $(a,b)$ است آنگاه طبق قضیه رل (Rolle)، یک $t_۰ \in (۰,\frac{۱}{۲})$ موجود است بطوریکه $L'(t_۰) = ۰$. در نتیجه

$$-۲(۱-t_۰)(b-a)^۲ \times [\,f(t_۰a+(۱-t_۰)b)+f(t_۰b+(۱-t_۰)a)]$$
$$+۲(b-a)\left[\int_a^{t_۰a+(۱-t_۰)b} f(u)du+\int_{t_۰a+(۱-t_۰)b}^{b} f(u)du\right]=۰.$$

بنابراین

$$\frac{۱}{(۱-t_۰)(b-a)}\left[\int_a^{t_۰a+(۱-t_۰)b} f(u)du+\int_{t_۰a+(۱-t_۰)b}^{b} f(u)du\right]$$
$$= f(t_۰a+(۱-t_۰)b)+f(t_۰b+(۱-t_۰)a)$$

این معادل است با اینکه

$$۲L(t_۰) = f(t_۰a+(۱-t_۰)b)+f(t_۰b+(۱-t_۰)a).$$

■

نکته: برای مشاهده قاعده هوپیتال ، قضیه لایبنیتز و قضیه رل به ([۱۳]) مراجعه کنید.

چند نتیجه زیر از قضیه ۳ حاصل می‌شود که نتیجه اول در مورد نامساوی کلاسیک هرمیت-هادامارد است و نتیجه دوم تعمیمی از یک نامساوی کلاسیک بین میانگین‌های عددی خاص است.

نتیجه ۱: قضیه ۳، توسیعی از نامساوی هرمیت-هادامارد ارائه می‌کند زیرا نتیجه بدست آمده برای هر $t \in [۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$ معتبر است و در حالت خاص برای تابع محدب $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ، به ازای $t = ۰$ بدست می‌آوریم:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leq \frac{۱}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲},$$

که همان نامساوی کلاسیک هرمیت-هادامارد است.

نتیجه ۲: با توجه به روند اثبات قضیه ۳، اگر قرار دهیم $f(x) = x^r\ ;\ r \in [۱,\infty)$ ، آنگاه برای $۰ \leq a < b$ و $t \in [۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$ خواهیم داشت:

$$L(t)=\frac{(ta+(1-t)b)^{r+1}-(tb+(1-t)a)^{r+1}+b^{r+1}-a^{r+1}}{2(b-a)(1-t)(r+1)}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{1-t}{\left|\frac{1}{2}-t\right|}L(t)=\frac{(M(t))^{r+1}-(L(t))^{r+1}+b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)|1-2t|(r+1)}.$$

از طرفی دیگر واضح است که

$$\frac{1}{(b-a)|1-2t|}\int_a^b f(x)dx=\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)|1-2t|(r+1)}.$$

در نهایت با استفاده از دو تساوی فوق و کمی محاسبه بدست خواهیم آورد:

$$\frac{1-t}{\frac{1}{2}-t}L(t)-\frac{1}{(b-a)|1-2t|}\int_a^b f(x)dx=\frac{\left(M(t)\right)^{r+1}-\left(m(t)\right)^{r+1}}{(b-a)|1-2t|(r+1)}$$
$$=l_r^r\left(M(t),m(t)\right),$$

برای هر $t\in[0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$. اکنون با جایگزینی روابط فوق در (۲.۱) به نامساوی‌های زیر دست خواهیم یافت:

$$A^r(a,b)=A^r(ta+(1-t)b,tb+(1-t)a) \qquad (2.3)$$
$$=A^r\left(m(t),M(t)\right)\le L_r^r\left(m(t),M(t)\right)\le A\left(m^r(t),M^r(t)\right)$$
$$=A((ta+(1-t)b)^r,(tb+(1-t)a)^r),$$

برای هر $t\in[0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$.

نتیجه ۳: اگر در نتیجه (۵) رابطه (۲.۳)، در حالت خاص قرار دهیم $t=0$، آنگاه برای $0\le a<b$ و $r\in[1,\infty)$ به نامساوی میانگینی زیر می‌رسیم:

$$A^r(a,b)\le L_r^r(a,b)\le A(a^r,b^r),$$

که نشان می‌دهد رابطه (۲.۳) تظریف و تعمیمی جدید از رابطه (۱.۳) بدست می‌دهد که پیشتر در بخش مقدمات به آن اشاره شده است. بعلاوه در خاص ترین حالت اگر فرض کنیم $r=n\in N$ آنگاه به نامساوی کلاسیک (۱.۱) در بخش مقدمات می‌رسیم.

## ۳-توابع "$\boldsymbol{M}$-لیپشیتس" و کراندار

در آنالیز ریاضی برای هر نامساوی، یکی از رایج‌ترین مسائل بررسی و تخمین تفاضل دو سمت نامساوی است که البته اگر این نامساوی از نوع تابعی یا انتگرالی باشد آنگاه بر حسب خواص تابع مورد بحث، میزان تخمین متفاوت خواهد بود. در این بخش سعی داریم با استفاده از تعریف نگاشت $L(t)$، تخمینی جدید را برای تفاضل میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم‌یافته در (۱.۳) بدست آوریم. برای انجام اینکار شرط تحدب تابع را برداشته و فرض می‌کنیم که تابع مورد نظر در یک شرط "$M$-لیپشیتس" و یا همچنین در شرط کرانداری صدق کند. دلیل انتخاب این دو رده از توابع بجای توابع محدب قضیه زیر است:

قضیه ۴ ([۱٤]): اگر $f$ بر $[a,b]$ محدب باشد، آنگاه روی $[a,b]$، "$M$-لیپشیتس" و کراندار است.

در این بخش ابتدا نتایج و نامساوی‌هایی در مورد توابع "$M$-لیپشیتس" بیان می‌کنیم و سپس به توابع کراندار و نتایج مربوط به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱ ([۱۴]): $I$ را یک بازه حقیقی در نظر بگیرید. تابع $f: I \to \mathbb{R}$ را "$M$-لیپشیتس" روی $I$ می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی $M \geq ۰$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

قضیه زیر بیانگر برخی خواص نگاشت $L(t)$ در رابطه با توابع "$M$-لیپشیتس" است:

قضیه ۵: فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$، تابع "$M$-لیپشیتس" روی $I$ باشد. برای هر $a, b \in I$ با شرط $a < b$ آنگاه:

$L(t)$ یک نگاشت $\frac{M(b-a)}{۲}$-لیپشیتس است.

برای هر $۰ \leq t \leq ۱$،

$$\left|L(t) - \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{Mt(b-a)}{۲}.$$

برای هر $۰ \leq t \leq ۱$،

$$\left|L(t) - \frac{f(a)+f(b)}{۲}\right| \leq \frac{M(۱-t)(b-a)}{۲}.$$

نامساوی زیر برقرار است:

$$\left|L\left(\frac{۱}{۲}\right) - f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right| \leq \frac{M(b-a)}{۴}.$$

برای هر $۰ \leq t \leq ۱$،

$$\left|L(t) - t\frac{f(a)+f(b)}{۲} - (۱-t)\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq Mt(۱-t)(b-a).$$

اثبات:

دو نقطه $t_۱$ و $t_۲$ در $[۰,۱]$ را در نظر بگیرید. برای این دو نقطه داریم:

$$\begin{aligned}
&|L(t_2) - L(t_1)| \\
&\leq \frac{۱}{۲(b-a)}\int_a^b \Big[\big|f(t_۲a + (۱-t_۲)x) + f\big((۱-t_۲)x + t_۲b\big) \\
&- f(t_۱a + (۱-t_۱)x) - f\big((۱-t_۱)x + t_۱b\big)\big|\Big]\,dx \\
&\leq \frac{۱}{۲(b-a)}\int_a^b [|f(t_۲a + (۱-t_۲)x) - f(t_۱a + (۱-t_۱)x)| \\
&+ \big|f\big((۱-t_۲)x + t_۲b\big) - f\big((۱-t_۱)x + t_۱b\big)\big|]dx \\
&\leq \frac{M}{۲(b-a)}\int_a^b (|(t_۲-t_۱)a + (t_۱-t_۲)x| \\
&+ |(t_۱-t_۲)x + (t_۲-t_۱)b)|)dx \\
&= \frac{M}{۲(b-a)}\int_a^b (|t_۲-t_۱|\,|a-x| + |t_۲-t_۱||b-x|)dx \\
&= \frac{M}{۲(b-a)}|t_۲-t_۱|\int_a^b (x-a+b-x)dx \\
&= \frac{M(b-a)}{۲}|t_۲-t_۱|, \qquad (۳.۱)
\end{aligned}$$

که نشان می دهد $L(t)$ یک نگاشت $\frac{M(b-a)}{۲}$-لیپشیتس است.

اگر در رابطه (۳.۱) قرار دهیم $t_۲ = t$ و $t_۱ = ۰$ آنگاه خواهیم داشت:

$$|L(t) - L(۰)| \leq \frac{M(b-a)}{۲}|t|,$$

که نتیجه می‌دهد :

$$\left|L(t) - \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{Mt(b-a)}{۲},$$

برای هر $۰ \leq t \leq ۱$.

کافیست در رابطه (۳.۱) قرار دهیم $t_۲ = t$ و $t_۱ = ۱$.

برای $t = \frac{۱}{۲}$ ، از تعریف نگاشت $L(t)$ و اینکه تابع $f$ "$M$-لیپشیتس" روی $[a,b]$ است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\left|L\left(\frac{۱}{۲}\right) - f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right| &\leq \\ &\leq \frac{۱}{۲(b-a)}\int_a^b \left|f\left(\frac{a+x}{۲}\right) - f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right| dx \\ &+ \frac{۱}{۲(b-a)}\int_a^b \left|f\left(\frac{x+b}{۲}\right) - f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right| dx \\ &\leq \frac{M}{۲(b-a)}\int_a^b \left|\frac{a+x-(a+b)}{۲}\right| dx \\ &+ \frac{M}{۲(b-a)}\int_a^b \left|\frac{b+x-(a+b)}{۲}\right| dx \\ &= \frac{M}{۴(b-a)}\int_a^b (|x-b| + |x-a|)dx = \frac{M(b-a)}{۴}.\end{aligned}$$

چون به ازای هر $t \in [۰,۱]$ می‌توان در نظر گرفت که $L(t) = tL(t) + (۱-t)L(t)$، بنابراین

$$\begin{aligned}&\left|L(t) - t\frac{f(a)+f(b)}{2} - (1-t)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ &\leq t\left|L(t) - \frac{f(a)+f(b)}{۲}\right| + (۱-t)\left|L(t) - \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ &\leq \frac{Mt(۱-t)(b-a)}{۲} + \frac{Mt(۱-t)(b-a)}{۲} \leq Mt(۱-t)(b-a),\end{aligned}$$

که نامساوی مورد نظر را نتیجه خواهد داد.■

نتیجه ۴: $I$ را یک بازه حقیقی در نظر بگیرید. فرض کنید نگاشت $f: I \to \mathbb{R}$ ، محدب و دیفرانسیل‌پذیر روی $I$ باشد با شروط $a,b \in I$ ، $a < b$ و $M = sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| < \infty$. آنگاه تمام نامساوی‌های موجود در صورت قضیه ۸، مجددا برقرار می‌شوند.

اثبات: طبق قضیه لاگرانژ (Lagrange)[۱۴] برای هر $x,y \in [a,b]$ یک $z$ در بین آنها موجود است بطوریکه

$$|f(x) - f(y)| = |x-y||f'(z)| \leq sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| = M|x-y|.$$

این نامساوی نشان می‌دهد که $f$ بر $[a,b]$ یک تابع "$M$-لیپشیتس" است و در نتیجه تمام روابط موجود در صورت قضیه ۸، مجددا اتفاق می‌افتند. ■

مثال ۱: اگر در قضیه (۸) قسمت (۲) قرار دهیم

$f(x) = x^r \; ; \; r \in [۱, \infty)$، آنگاه برای $۰ \leq a < b$ داریم:

$$\left|l_r^r\big((ta + (۱ - t)b), (tb + (۱ - t)a)\big) - l_r^r(a, b)\right| \leq \left|\frac{t(۱ - t)}{۱ - ۲t}\right| rb^{r-۱}(b - a),$$

برای هر $t \in [۰,۱] \backslash \{\frac{۱}{۲}\}$. همچنین با همین فرضیات از قسمت (۳) قضیه (۸) داریم:

$$\begin{aligned}&\left|(1 - 2t)l_r^r\big((ta + (1 - t)b), (tb + (1 - t)a)\big) + l_r^r(a, b) - 2(1 - t)A(a^r, b^r)\right| \\ &\qquad \leq (۱ - t)^۲ rb^{r-۱}(b - a),\end{aligned}$$

برای هر $t \in [۰,۱]$.

در حالت خاص اگر در نامساوی قبل قرار دهیم $t = \frac{۱}{۲}$ آنگاه:

$$|l_r^r(a, b) - A(a^r, b^r)| \leq \frac{rb^{r-۱}(b - a)}{۴}.$$

قابل ذکر است که نامساوی اول بدست آمده در مثال فوق یک نامساوی جدید از نوع میانگین لگاریتمی تعمیم یافته است و نامساوی دوم تعمیمی جدید از اولین نامساوی بدست آمده در نتیجه (۲.۳) از مرجع [۱۵] است که به تخمینی جدید برای تفاضل میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم‌یافته می‌پردازد. در ضمن با فرض $f(x) = \frac{۱}{x}$ ، $f(x) = e^x$ و $f(x) = -lnx$ که همگی توابعی محدب روی بازه $[a, b]$ هستند (البته با این شرط که $۰ \leq a < b$)، می‌توان نامساوی‌های جدید دیگری که در نتیجه (۲.۳) از [۱۵] وجود دارند را تعمیم داد که در اینجا به آنها نخواهیم پرداخت اما خواننده علاقمند را تشویق به تحقیق در این زمینه می‌کنیم.

برای مطالعات بیشتر در مورد ارتباط نامساوی هرمیت-هادامارد با توابع "$M$-لیپشیتس"، مراجع [۱۵،۱۶] را مطالعه نمایید.

در قضیه زیر با اعمال شرط کرانداری بر تابع مورد نظر و با استفاده از تعریف نگاشت $L(t)$، تخمین دیگری را برای تفاضل میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم‌یافته در (۱.۳) بدست می‌آوریم.

قضیه ۶: اگر $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ کراندار باشد، یعنی برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $m \leq f(x) \leq M$ ، آنگاه:

$m \leq L(t) \leq M$.

$|\mathrm{L}(\mathrm{t}) - \frac{m+M}{۲}| \leq \frac{M-m}{۲}$ ،

برای هر $t \in [۰,۱]$.

اثبات:

با انتگرال‌گیری از اجزای نامساوی $m \leq f(x) \leq M$ نسبت به متغیر $x$ روی بازه $[a, b]$، اثبات واضح است.

با استفاده از نامساوی $m \leq L(t) \leq M$، که در قسمت (۱) بدست آمده است می توان نوشت:

$$m - \frac{m + M}{۲} \leq L(t) - \frac{m + M}{۲} \leq M - \frac{m + M}{۲},$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{m - M}{۲} \leq L(t) - \frac{m + M}{۲} \leq \frac{M - m}{۲}.$$

■

چون هر تابع محدب، کران دار است ( [۱۰] را ببینید)

بلافاصله از قضیه ۱۱ می توان به نتیجه زیر دست یافت.

نتیجه ۵: فرض کنید نگاشت $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ، محدب باشد. اعداد حقیقی $m$ و $M$ موجودند بطوریکه

$$m \leq L(t) \leq M$$

$|\mathrm{L}(\mathrm{t}) - \frac{m+M}{۲}| \leq \frac{M-m}{۲}$ ، برای هر $t \in [۰,۱]$.

مثال ۲: اگر در قضیه (۱۱) قرار دهیم

$f(x) = x^r \; ; \; r \in [۱, \infty)$ ، آنگاه برای $۰ \leq a < b$ داریم:

$$\left|(1-2t)l_r^r\big((ta+(1-t)b),(tb+(1-t)a)\big)+l_r^r(a,b)-2(1-t)A(a^r,b^r)\right| \leq (b^r-a^r)(۱-t).$$

در حالت خاص اگر $t = \frac{۱}{۲}$ در نظر گرفته شود آنگاه

$$|l_r^r(a,b) - A(a^r,b^r)| \leq \frac{b^r-a^r}{۲},$$

که تقریبی جدید از تفاضل میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم‌یافته ارائه می‌کند. ذکر این نکته لازم است که در حالت کلاسیک (با استفاده از توابع محدب) تخمین برای تفاضل میانگین حسابی و میانگین لگاریتمی تعمیم‌یافته بصورت زیر در [۸] ارائه شده است:

$$|A(a^n,b^n) - l_n^n(a,b)| \leq \frac{n(b-a)}{۴} A(|a|^{n-۱},|b|^{n-۱}),$$

برای $n \in N$ و $n \geq ۲$. البته در [۱۷] و [۱۸] تعمیم‌های جدیدی از نامساوی فوق بصورت زیر بدست آمده است:

$$|A(a^r,b^r) - l_r^r(a,b)| \leq \frac{r(b-a)}{(k+۱)(k+۲)} A(|a|^{r-۱},|b|^{r-۱}) \left[\frac{۱}{۲^k}+k\right],$$

که در آن $r \in (-\infty,-۱) \cup (-۱,۰) \cup (۱,\infty)$، $k \leq ۱$ و $k \neq -۲,-۱$.

نکته: در نهایت قابل ذکر است که برای توابع محدب $f(x) = \frac{۱}{x}$ ، $f(x) = e^x$ و $f(x) = -lnx$ و غیره می‌توان نامساوی‌های غیرمیانگینی اما جالبی را بدست آورد که خواننده علاقمند را تشویق به تحقیق در این زمینه می‌کنیم.

**فهرست منابع**

[۱] S.S. Dragomir, C.E.M. Pearce, "Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and Applications", RGMIA Monographs, Victoria University, ۲۰۰۰.

[۲] J.L.W.V. Jensen, "On konvexe funktioner og uligheder mellem middlvaerdier", Nyt. Tidsskr. Math. B., ۱٦ (۱۹۰٥), ٤۹-٦۹.

[۳] J.L.W.V., Jensen, "Sur les fonctions convexes et les ińegalit́es entre les voleurs mogernmes", Acta Mathematica, ۳۰ (۱۹۰٦), ۱۷٥-۱۹۳.

[٤] D.S. Mitrinović, I.B. Lacković, "Hermite and convexity", Aequationes Mathematicae, ۲۸ (۱۹۸٥) ۲۲۹-۲۳۲.

[٥] J. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, "Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications", Academic Press, Inc., ۱۹۹۲.

[٦] M. Rostamian Delavar, M. De La Sen, "Some generalizations of Hermite-Hadamard type inequalities", SpringerPlus, ٥:۱٦٦۱ (۲۰۱٦).

[۷] M. Rostamian Delavar, S.S. Dragomir , "On η–convexity", Mathematical Inequalities and Applications, ۲۰ (۲۰۱۷) ۲۰۳-۲۱٦.

[۸] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, "Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula", Applied Mathematics Letters, ۱۱ (۱۹۹۸), ۹۱-۹٥.

[۹] U. S. Kirmaci, "Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula", Applied Mathematics and Computations, ۱٤۷(۱) (۲۰۰٤) ۱۳۷-۱٤٦.

[۱۰] C. E. M. Pearce, J. Pečarić, "Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formula", Applied Mathematics Letters, ۱۳ (۲۰۰۰) ٥۱-٥٥.

[۱۱] S.S. Dragomir, D.M. Milošević, J. Sándor, "On some refinements of Hadamard's inequalities and applications", Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., ٤ (۱۹۹۳) ۳-۱۰.

[۱۲] K.-L. Tseng, H. Shiow-Ru, S.S Dragomir, "Fejer-Type Inequalities (II)", Mathematica Slovaca, ٦۷ (۲۰۱۷) ۱۰۹-۱۲۰.

[۱۳] R. A. Silverman, "Calculus With Analytic Geometry", Pearson College Div, ۱۹۸٥.

[۱۴] Robert A.W., Varberg D.E., "Convex functions", Academic Press, New York, ۱۹۷۳.

[۱۵] S.S. Dragomir, YJ. Cho, S.S. Kim, "Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings and their applications", Journal of Mathematical Analysis and Applications, ۲٤٥ (۲۰۰۰) ٤۸۹-٥۰۱.

[۱۶] G-S. Yang, K-L. Tseng, "Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings", Journal of Mathematical Analysis and Applications, ۲٦۰ (۲۰۰۱) ۲۳۰-۲۳۸.

[۱۷] M. Rostamian Delavar and S. S. Dragomir, "Weighted trapezoidal inequalities related to the area balance of a function with applications", Applied Mathematics and Computations, ۳٤۰ (۲۰۱۹), ٥-۱٤.

[۱۸] M. Rostamian Delavar, S. S. Dragomir, "Trapezoidal type inequalities related to *h*-convex functions with applications", Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (RACSAM), ۱۱۳ (۲۰۱۹) ۱٤۸۷-۱٤۹۸.