

یافتن مقادیر فرینه شاخص بی‌نظمی کامل زنجیرهای پولیومینو به روش انتقال

زهرا یاراحمدی*

استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خرم‌آباد، خرم‌آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۰۴

چکیده

فرض می‌کنیم G یک گراف ساده ی بدون جهت با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ است. یک یال مانند e به صورت $e = uv$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن $u, v \in V(G)$ و گوییم u و v در گراف رئوس G مجاورند. درجه رأس u از گراف G برابر تعداد یال‌هایی است که رأس u بر آن واقع است و آن را با $\deg_G u$ نشان می‌دهیم. یک شاخص توپولوژیک یک کمیت عددی است که به یک گراف نسبت داده می‌شود به طوری که تحت یکرختی گراف‌ها پایاست. فرض می‌کنیم $Top(G)$ یک شاخص توپولوژیک روی گراف G باشد، به ازای هر دو گراف یکرخت G و H داریم: $Top(G) = Top(H)$. اولین شاخص‌هایی که بر اساس درجه رئوس تعریف شده‌اند، شاخص‌های زاگرب نوع اول و دوم می‌باشند. در این مقاله روی نوع دیگری از این پایاهای گراف، به نام شاخص بی‌نظمی کامل مطالعاتی خواهیم داشت. شاخص بی‌نظمی کامل گراف G به صورت
$$irr_t(G) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} |\deg_G u - \deg_G v|$$
 تعریف می‌شود. در این مقاله ابتدا دو روش انتقال روی زنجیرهای پولیومینو معرفی کرده سپس با استفاده از این انتقال‌ها، کران بالا و پایین برای شاخص بی‌نظمی کامل به دست می‌آوریم. به‌علاوه ثابت می‌کنیم که زنجیر خطی و زنجیر زیگزاگ، فرینه‌های زنجیرهای پولیومینو تحت شاخص بی‌نظمی کامل می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: درجه رأس، انتقال، بی‌نظمی کامل، زنجیر پولیومینو، زنجیر خطی، زنجیر زیگزاگ.

۱- مقدمه

فرض می‌کنیم G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ است. یک یال مانند e به صورت $e = uv$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن $u, v \in V(G)$ ، در این صورت گوییم u و v در گراف G مجاورند. درجه رأس u از گراف G برابر تعداد یال‌هایی است که رأس u بر آن واقع است و آن را $\deg_G u$ با نشان می‌دهیم.

یک شاخص توپولوژیک یک کمیت عددی است که به یک گراف نسبت داده می‌شود، به طوری که تحت یکریختی گراف‌ها پایاست. تا کنون هزاران شاخص توپولوژیک تعریف شده است، این شاخص‌ها بر اساس پارامترهای مختلفی مانند، درجه‌ی رئوس، فاصله‌ی رئوس، فاصله‌ی یال‌ها و ... تعریف شده‌اند. اولین شاخص توپولوژیک در سال ۱۹۴۷ توسط شیمیدان آمریکایی به نام هارولد وینر تعریف شده است، [1]. این شاخص به صورت جمع تمامی فواصل بین رئوس گراف G تعریف می‌شود: فرض می‌کنیم G یک گراف همبند است، در این صورت شاخص وینر گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(G) = \sum_{\{u, v\} \subseteq V(G)} d_G(u, v).$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد شاخص‌های توپولوژیک مطالعه منابع مشخص شده توصیه می‌گردد، [2-4]. اولین شاخصی که بر اساس درجه رئوس تعریف شده، بیش از ۳۰ سال پیش توسط گوتمن و تریناجستیک به نام شاخص‌های زاگرب، ارائه شده است [5]. شاخص‌های زاگرب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} (\deg_G u)^2$$

$$M_2(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} \deg_G u \deg_G v$$

که به $M_1(G)$ شاخص زاگرب نوع اول و به $M_2(G)$ شاخص زاگرب نوع دوم گفته می‌شود. برای اطلاعات بیشتر در مورد شاخص‌های زاگرب نوع اول و دوم مطالعه منابع [6,7] توصیه می‌شود. آلبرستون با توجه به درجه رئوس یک گراف شاخص بی‌نظمی گراف G را در به صورت زیر تعریف کرده است، [8]:

$$irr(G) = \frac{1}{2} \sum_{e=uv \in E(G)} |\deg_G u - \deg_G v|.$$

پس از آن ابدو و همکارانش نسخه جدیدی از شاخص بی‌نظمی گراف به نام شاخص بی‌نظمی کامل معرفی کردند، که برای گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود، [9]:

$$irr_t(G) = \frac{1}{2} \sum_{\{u, v\} \subseteq V(G)} |\deg_G u - \deg_G v|.$$

و ثابت شده است که همه گراف‌های با بیشترین مقدار شاخص بی‌نظمی کامل تعیین شده و همچنین اثبات شده که از بین تمام درخت‌های از مرتبه یکسان، ستاره بیشترین مقدار بی‌نظمی کامل را داراست.

همچنین اثبات شده که برای یک گراف ساده n رأسی G نامساوی زیر برقرار است:

$$irr_t(G) \leq \begin{cases} \frac{1}{12}(2n^3 - 3n^2 - 2n + 3) & 2 \nmid n \\ \frac{1}{12}(2n^3 - 3n^2 - 2n) & 2 \mid n \end{cases}$$

مقادیر شاخص‌های بی‌نظمی و بی‌نظمی کامل هر دو صفرند اگر و تنها اگر گراف منظم باشد و $irr_t(G)$ یک کران بالا برای $irr(G)$ می‌باشد. مقایسه‌ای بین شاخص بی‌نظمی و بی‌نظمی کامل گراف‌ها صورت گرفته است، [10]. در این مرجع ثابت شده است که، برای هر گراف همبند G با n رأس $irr_t(G) \leq n^2 \frac{irr(G)}{4}$ ، به‌علاوه، اگر G درخت

هر مربع در یک زنجیر پولیومینو در مجاورت با یک یا دو مربع دیگر قرار دارد. اگر یک مربع، فقط با یک مربع دیگر مجاور باشد، آن مربع را، مربع پایانه و اگر یک مربع با دو مربع مجاور بوده و دارای یک رأس از درجه ۲ باشد، به آن گره می‌گویند. در شکل ۱، مربع‌های پایانه با حرف T و گره‌ها با حرف K نشان داده شده‌اند.

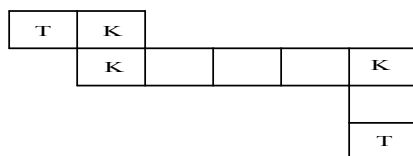
یک زنجیر پولیومینوی بدون گره را یک زنجیر خطی می‌نامیم و آن را با L_n نمایش می‌دهیم. (شکل ۲)

در یک زنجیر پولیومینو، به زنجیر خطی ماکسیمال که شامل مربع پایانه و (یا) گره باشد، یک بند گفته می‌شود. تعداد مربع‌های موجود در یک بند را طول بند می‌نامیم، طول بند S با $l(S)$ نشان داده می‌شود. برای هر بند S از یک زنجیر پولیومینو با $n \geq 2$ مربع داریم، $2 \leq l(S) \leq n$. در شکل ۳، بند های یک زنجیر پولیومینو با خطوط جهت دار نشان داده شده است.

باشد، آن گاه $irr_i(G) \leq (n-2) irr(G)$. برای اطلاعات بیشتر در مورد شاخص بی نظمی کامل مطالعه [11,12] توصیه می‌شود. در این مقاله به مطالعه شاخص بی‌نظمی کامل زنجیرهای پولیومینو می‌پردازیم.

در این قسمت به یادآوری برخی مفاهیم مرتبط با زنجیرهای پولیومینو می‌پردازیم که، در این مقاله از آن‌ها استفاده می‌شود. یک دستگاه پولیومینو یک گراف ۲-همبند متناهی مسطح است به طوری که هر وجه داخلی آن توسط یک مربع احاطه شده باشد. به عبارت دیگر وجوه داخلی توسط یک پیوند یالی به هم متصل می‌شوند. به یک دستگاه پولیومینو، یک زنجیر پولیومینو گفته می‌شود، هر گاه مرکز مربع‌های مجاور را به هم متصل کنیم دنباله‌ی، c_1, c_2, \dots, c_n ، که در آن c_i ، مرکز i امین مربع می‌باشد تشکیل یک مسیر دهد، [13].

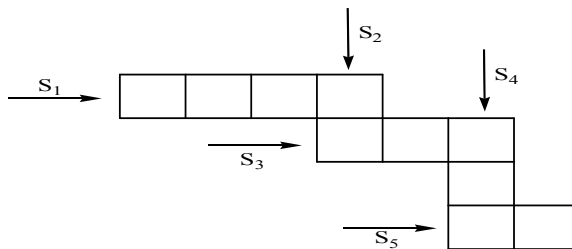
اگر B_n یک زنجیر پولیومینو با n مربع باشد، به وضوح $|E(B_n)| = 3n + 1$ و $|V(B_n)| = 2n + 2$.



شکل ۱: مربع‌های پایانه با حرف T و گره‌ها با حرف K نشان داده شده است.



شکل ۲: یک زنجیر خطی L_n .



شکل ۳: بندهای یک زنجیر پولیومینو.

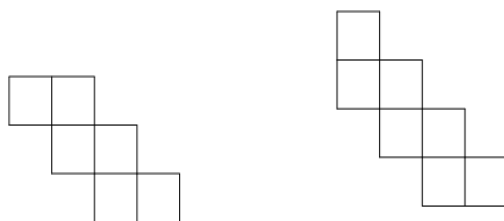
۲- نتایج اصلی

در این بخش هدف اصلی یافتن زنجیره‌های پولیومینوی فرینه بر اساس شاخص بی‌نظمی کامل می‌باشد. نتایج این بخش را با استفاده از روش انتقال به دست می‌آوریم. ابتدا دو نوع انتقال روی زنجیره‌های پولیومینو شرح می‌دهیم.

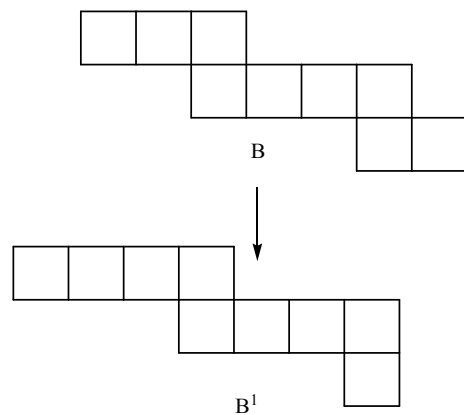
انتقال نوع اول: برای انجام انتقال نوع اول، از یک زنجیر پولیومینو B_n با n مربع، یک بند از B_n با بیشترین طول که حداقل شامل یک مربع پایانه باشد را انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم طول این بند برابر t باشد، بند انتخابی را L_t می‌نامیم. حال یک مربع پایانه (که روی L_t واقع نیست) را حذف کرده و به مربع پایانه L_t متصل می‌کنیم تا L_{t+1} ایجاد شود. این زنجیر پولیومینوی جدید را B_n^1 می‌نامیم. شکل ۵، انتقال نوع اول روی یک زنجیر پولیومینو B نمایش داده شده است.

یک زنجیر پولیومینو با n مربع که دارای $n-2$ گره باشد را یک زنجیر زیگزاگ می‌نامیم و آن را با Z_n نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر یک زنجیر پولیومینو را یک زنجیر زیگزاگ می‌نامیم اگر و تنها اگر هر بند آن دارای طول ۲ باشد. (شکل ۴)

زنگ و ژانگ، مطالعاتی روی فرینه‌های زنجیره‌های پولیومینو تحت k -تطابق و k -مجموعه مستقل داشته‌اند، [14]. ژو و چن نیز شاخص PI را روی زنجیره‌های پولیومینو مورد بررسی قرار دادند، [15]. پس از آن‌ها روند این سری مطالعات توسط چن و همکارانش ادامه یافت، [16]. نویسندگان حاضر این روند مطالعاتی را با محاسبه شاخص‌های زاگرب زنجیره‌های پولیومینو ادامه داد و فرینه‌های آن‌ها را به دست آورد، [17]. در این مقاله نیز قصد داریم، شاخص بی‌نظمی کامل را روی زنجیره‌های پولیومینو مورد بررسی قرار دهیم و زنجیره‌های پولیومینوی فرینه را تحت این شاخص به دست آوریم.



شکل ۴: زنجیره‌های زیگزاگ Z_6 و Z_7 .



شکل ۵: انتقال نوع اول.

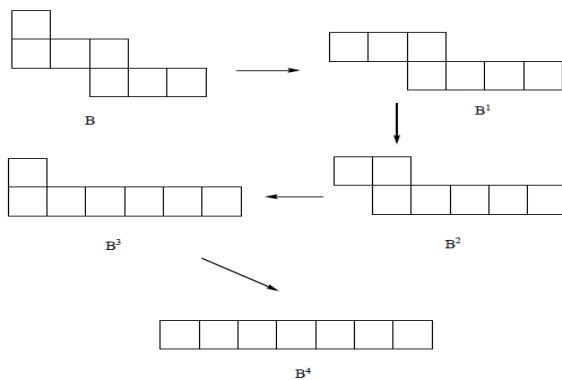
مربع پایانه B_n به طوری متصل می‌کنیم که به تدریج یک زنجیر زیگزاگ تشکیل شود. زنجیر ایجاد شده از زنجیر پولیومینوی B_n را با $B_n^{(1)}$ نمایش می‌دهیم. شکل ۷، انتقال نوع دوم روی یک زنجیر پولیومینو B نمایش داده شده است.

باید توجه داشت که در روش انتقال دوم نیز، ساخت $B_n^{(1)}$ ممکن است به شکل منحصر به فرد نباشد، ولی همواره با انجام تعداد متناهی از انتقال نوع دوم روی زنجیر پولیومینوی B_n به زنجیر زیگزاگ Z_n دست پیدا می‌کنیم. به وضوح اگر B_n یک زنجیر زیگزاگ باشد، آن‌گاه $B_n = B_n^{(1)}$. در شکل ۸، با انجام انتقال نوع دوم روی زنجیر پولیومینوی B ، به تعداد ۳ مرتبه، به ترتیب زنجیرهای $B^{(1)}$ ، $B^{(2)}$ و در آخر زنجیر $B^{(3)}$ که زنجیر زیگزاگ Z_7 است، به دست آمده است. (شکل ۸)

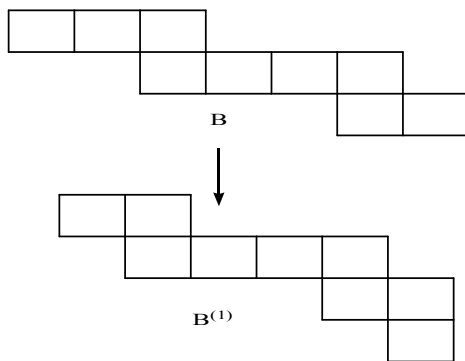
باید توجه داشت که در این روش انتقال، ساخت $B_n^{(1)}$ ممکن است به شکل منحصر به فرد نباشد، ولی همواره با انجام تعداد متناهی از انتقال نوع اول روی زنجیر B_n به زنجیر خطی L_n دست پیدا می‌کنیم. بدیهی است که اگر B_n یک زنجیر خطی باشد، آن‌گاه $B_n = B_n^{(1)}$.

به عنوان مثال شکل ۶، با انجام انتقال نوع اول روی زنجیر پولیومینوی B ، به تعداد ۴ مرتبه به ترتیب B^1 ، B^2 ، B^3 و نهایتاً B^4 که همان زنجیر خطی L_7 است، ایجاد می‌شود.

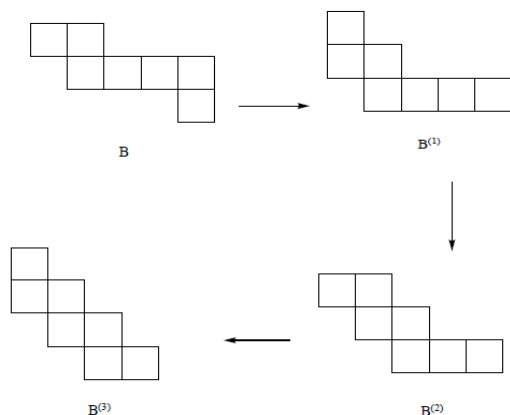
انتقال نوع دوم: برای انجام انتقال نوع دوم، از یک زنجیر پولیومینو B_n با n مربع، یک بند از B_n با بیشترین طول که حداقل شامل یک مربع پایانه باشد، انتخاب می‌کنیم و آن را L می‌نامیم. حال مربع پایانه بند L را حذف کرده و آن‌را به دیگر



شکل ۶: انتقال نوع اول، به تعداد ۴ مرتبه روی زنجیر پولیومینوی B برای دست یافتن به زنجیر خطی.



شکل ۷: انتقال نوع دوم.



شکل ۸: انتقال نوع دوم، به تعداد ۳ مرتبه روی زنجیر پولیومینوی B و ایجاد زنجیر زیگزاگ.

ترتیب n_2 ، n_3 و n_4 باشد. با توجه به تعریف شاخص بی‌نظمی کامل، داریم:

$$irr_t(G) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(B_n)} |\deg_{B_n} u - \deg_{B_n} v|.$$

با توجه به درجه رئوس در یک زنجیر پولیومینو برای هر دو رأس $\{u,v\} \subseteq V(B_n)$ ، همواره قدر مطلق تفاضل درجه رئوس مقادیر صفر، ۱ یا ۲ می‌باشد. در واقع $|\deg_{B_n} u - \deg_{B_n} v| = 0, 1, 2$. حال با توجه به این بحث و بنا بر تعریف شاخص بی‌نظمی کامل داریم:

$$irr_t(B_n) = \frac{1}{2} (n_2 n_3 + 2n_2 n_4 + n_3 n_4).$$

اگر با انتقال نوع اول B_n^1 را از B_n به دست آید، دو حالت وجود دارد. اگر تعداد بندهای B_n^1 و B_n مساوی باشد، پس تعداد رئوس از درجه ۲، ۳ و ۴ زنجیر B_n^1 نیز به ترتیب n_2 ، n_3 و n_4 باشد، بنابراین $irr_t(B_n^1) = irr_t(B_n)$. حال اگر پس از انجام انتقال تعداد بندها یکی کم شود، تعداد رئوس از درجه ۲، ۳ و ۴ در B_n^1 به ترتیب $n_2 - 1$ ، $n_3 + 2$ و $n_4 - 1$ می‌باشد و داریم:

در مقدمه اشاره شد که، شاخص بی‌نظمی کامل گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$irr_t(G) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} |\deg_G u - \deg_G v|,$$

که در آن $\deg_G u$ درجه رأس u در G است. به وضوح می‌توان دید که برای هر زنجیر پولیومینوی B_n داریم:

$$\{\deg_{B_n} u \mid u \in V(B_n)\} = \{2, 3, 4\}.$$

اگر تعداد رئوس از درجه ۲، ۳ و ۴ را به ترتیب n_2 ، n_3 و n_4 بنامیم، به وضوح، $n_2 \geq 4$ و $|V(G)| = n_2 + n_3 + n_4$.

قضیه ۲-۱: فرض می‌کنیم B_n یک زنجیر پولیومینو با n مربع به طوری که B_n^1 و $B_n^{(1)}$ به ترتیب، زنجیرهای پولیومینوی حاصل از انتقال‌های نوع اول و دوم باشد. در این صورت

$$irr_t(B_n^1) \leq irr_t(B_n) \leq irr_t(B_n^{(1)}).$$

اثبات: فرض می‌کنیم B_n یک زنجیر پولیومینو با n مربع بوده و تعداد رئوس درجه ۲، ۳ و ۴ به

ب) در زنجیر زیگزاگ Z_n ، تعداد رئوس درجه ۲، ۳ و ۴ به ترتیب $n+2$ ، 2 و $n-2$ است، به وضوح نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۲-۳: برای هر زنجیر پولیومینو B_n با n مربع، نامساوی

$$irr_t(L_n) \leq irr_t(B_n) \leq irr_t(Z_n)$$

برقرار است. در سمت راست (چپ) تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $B_n \cong Z_n$ ، $B_n \cong L_n$.

اثبات: فرض می‌کنیم با انتقال نوع اول B_n^{i+1} از B_n^i ، B_n^i از B_n^{i-1} ، ...، B_n^2 از B_n^1 و B_n^1 از B_n حاصل شود. با توجه به قضیه ۲-۱ داریم:

$$\dots \leq irr_t(B_n^i) \leq \dots \leq irr_t(B_n^1) \leq irr_t(B_n).$$

می‌توان دید که به ازای عدد طبیعی مانند k ، $B_n^k \cong L_n$.

بنابراین، $irr_t(L_n) = irr_t(B_n^k) \leq irr_t(B_n)$ به روش مشابه نامساوی سمت راست را با استفاده از انتقال نوع دوم اثبات می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به مطالعه روی شاخص بی‌نظمی زنجیرهای پولیومینو پرداخته‌ایم، روشی ابداعی ارائه نموده‌ایم که با استفاده از دو نوع انتقال می‌توان مقادیر فرینه شاخص بی‌نظمی کامل برای زنجیرهای پولیومینو را به دست آورد. این روش می‌تواند برای مسائل مشابه کارگشا باشد. به نظر می‌رسد، به عنوان مثال برای مطالعه روی سیستم‌های شش ضلعی، یا زنجیرهای $4k$ - دوری می‌توان از این انتقال‌ها برای یافتن شاخص‌های مختلف استفاده کرد.

$$irr_t(B_n^1) = \frac{1}{2}((n_2 - 1)(n_3 + 2) + 2(n_2 - 1)(n_4 - 1) + (n_3 + 2)(n_4 - 1)).$$

با محاسبه‌ی $irr_t(B_n^1) - irr_t(B_n) = -n_3 - 2 < 0$ نتیجه می‌شود، $irr_t(B_n^1) < irr_t(B_n)$ به روش مشابه انتقال نوع دوم را روی B_n اعمال می‌کنیم، اگر $B_n = Z_n$ ، آن‌گاه $B_n^{(1)} = B_n^1$ ، پس در این حالت $irr_t(B_n^{(1)}) = irr_t(B_n)$ حال فرض می‌کنیم $B_n \neq Z_n$ ، در این صورت تعداد رئوس از درجه ۲، ۳ و ۴ در $B_n^{(1)}$ به ترتیب $n_2 + 1$ ، $n_3 - 2$ و $n_4 + 1$ می‌باشد. با توجه به بحث فوق، می‌توان مشاهده کرد:

$$irr_t(B_n^{(1)}) = \frac{1}{2}((n_2 + 1)(n_3 - 2) + 2(n_2 + 1)(n_4 + 1) + (n_3 - 2)(n_4 + 1)).$$

به وضوح، $irr_t(B_n^{(1)}) - irr_t(B_n) = 2n_2 - 2 > 0$ و در نتیجه $irr_t(B_n) < irr_t(B_n^{(1)})$ و اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۲-۲: شاخص بی‌نظمی کامل زنجیر خطی و زنجیر زیگزاگ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{الف) } irr_t(L_n) = 4n - 4$$

$$\text{ب) } irr_t(Z_n) = n^2 + 2n - 4$$

اثبات: الف) در زنجیر خطی L_n ، تعداد رئوس درجه ۲، ۳ و ۴ به ترتیب ۴، $2n - 2$ و صفر می‌باشد. بنا بر قضیه ۲-۱ داریم:

$$irr_t(L_n) = 4n - 4.$$

graph, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 16 (2014), 201-206.

[10] D. Dimitrov, R. Škrekovski, Comparing the irregularity and the total irregularity of graphs, *Ars Mathematica Contemporanea* 9(2015) 45–50.

[11] A.R. Ashrafi, A. Ghalavand, Note on non-regular graphs with minimal total irregularity, *Applied Mathematics and Computation*, 369(2020), 124891.

[12] A. Ghalavand, A.R. Ashrafi, Ordering of c-cyclic graphs with respect to total irregularity, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 63(2020), 707–715.

[13] D. A. Klarner, Polyominoes, in: J.E. Goodman, J. O'Rourke (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press LLC, 1997, pp. 225 -242

[14] Y.Zeng and F. Zhang, Extremal Polyomino Chains on k-matchings and k-independent Sets, *Journal of Mathematical Chemistry*, 42(2)(2007), 125-140.

[15] L. Xu, S. Chen, The PI Index of polyomino chains, *Applied Mathematics Letters* 21(2008), 1101-1104.

[16] J. Yang, F. Xia and S. Chen, On the Randić Index of Polyomino Chains, *Applied Mathematical Sciences* 5(5)(2011), 255-260.

[17] Z. Yarahmadi, A.R. Ashrafi and S. Moradi, Extremal polyomino

فهرست منابع

[1] H. Wiener, Structural determination of the paraffin boiling points, *Journal of the American Chemical Society*, 69(1947), 17-20.

[2] M. Azari, Some results on vertex-edge Wiener polynomials and indices of graphs, *Journal of new research in mathematics* 4(15)(2018)149-162.

[3] F. Falahatinejad, some results on the forgotten index, *Journal of new research in mathematics*, in press.

[4] Sh. Sahebi, M. deldar, Calculating Different Topological Indices of Von Neumann Regular Graph of $Z_{(p^\alpha)}$, *Journal of new research in mathematics*, 6(23)(2020)47-52.

[5] I. Gutman, N. Trinajstić, Graph theory and molecular orbitals, Total π -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chemical Physics Letters*, 17(1972), 535-538.

[6] I. Gutman, K.C. Das, The first Zagreb index 30 years after, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 50(2004), 83-92.

[7] S. Nikolić, G. Kovacević, A. Milicević, N. Trinajstić, The Zagreb indices 30 years after, *Croatica Chemica Acta*, 76(2003), 113-124.

[8] M. Albertson, The irregularity of a graph, *Ars Combinatoria*, 46(1997), 219-225.

[9] H. Abdo, S. Brandt, and D. Dimitrov, The total irregularity of a

chains with respect to Zagreb indices,
Applied Mathematics Letters 25
(2012), 166-171.

