دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 588-2588X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

توصیف اشتقاق‌های مکعبی روی رده‌های مختلف جبرهای باناخ

فریبا فرجپور[1]، علی عبادیان[2*]، شهرام نجف‌زاده[3]

[(1و2)] گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران
[(2)] استاد گروه ریاضی دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/06/19 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/02/25

چکیده:
فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک باناخ A-دومدول باشد. نگاشت $D:A\to X$ را یک اشتقاق مکعبی نامند هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم $D(ab)=a^3\cdot D(b)+D(a)\cdot b^3$. نگاشت $D:A\to X$ را یک نگاشت همگن مکعبی نامند هرگاه برای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ داشته باشیم $D(\lambda a)=\lambda^3 D(a)$. در این مقاله نگاشت خطی-مکعبی و اشتقاق خطی-مکعبی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. نگاشت همگن مکعبی را یک نگاشت خطی-مکعبی گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$ و $\lambda\in\mathbb{C}$ داشته باشیم $D(\lambda a+b)=\lambda^3 D(a)+D(b)$ و علاوه براین اگر D یک اشتقاق مکعبی باشد آن را یک اشتقاق خطی-مکعبی نامیم. در این مقاله اشتقاق‌های خطی-مکعبی را روی رده‌های مختلفی از جبرهای باناخ شامل جبرهای باناخ حاصل از ضرب θ-لائو، جبرهای باناخ توسیع مدولی و جبرهای باناخ ملقمه‌ای توصیف می‌کنیم. برای توصیف، θ-اشتقاق مکعبی و نگاشت‌های مکعبی مدولی را تعریف می‌کنیم. برای جبرباناخ $A\times_\theta B$ که $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$ و A یکدار است، نشان می‌دهیم که $D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ اشتقاق خطی-مکعبی است اگروتنها اگر θ-اشتقاق مکعبی $D_{B,A}:B\to A$ و اشتقاق‌های خطی-مکعبی $D_A:A\to A$ و $D_B:B\to B$ موجود باشند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$، D به‌صورت $D(a,b)=(D_A(a)+D_{B,A},D_B(b))$ باشد و برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ در شرط $\theta(b)^3 D_A(a)=a^3 D_{B,A}(b)+a^3\theta(D_B(b))+D_A(a)\theta(b)^3$ صدق کند. نتایجی مشابه برای جبرهای باناخ توسیع مدولی و ملقمه‌ای بدست می‌آوریم.

واژه‌ی کلیدی: شتقاق خطی-مکعبی، اشتقاق مکعبی، ضرب θ-لائو، جبر باناخ توسیع مدولی، جبر باناخ ملقمه‌ای.

* عهده‌دار مکاتبات
E-mail: ebadian.ali@gmail.com

1- مقدمه

یکی از معادلات معروف که توسط پژوهش‌گران زیادی مورد بررسی قرار گرفته است معادله مکعبی تابعی زیر است:

$$f(2x+y)+f(2x-y)=2f(x+y)+2f(x-y)+12f(x) \qquad (0.1)$$

این معادله توسط جون و کیم $a\in A$ در [1] معرفی شد که جواب آن تابع مکعبی $f(x)=ax^3$ است. فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک باناخ A- دومدول باشد. نگاشت $D:A\to X$ را یک اشتقاق مکعبی نامند هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم:

$$D(ab)=a^3\cdot D(b)+D(a)\cdot b^3 \qquad (0.2)$$

این نوع اشتقاق توسط اسحاقی گرجی و همکاران در [2] معرفی و پایداری این نوع اشتقاق بررسی شد. نگاشت $D:A\to X$ را یک نگاشت همگن مکعبی نامند هرگاه برای هر $a\in A$ و $\lambda\in\mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$D(\lambda a)=\lambda^3 D(a) \qquad (3.0)$$

نگاشت همگن مکعبی $D:A\to X$ را یک اشتقاق مکعبی همگن نامند هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم:

$$D(ab)=a^3\cdot D(b)+D(a)\cdot b^3$$

اشتقاق مکعبی همگن توسط بداغی در [3] معرفی شد و پایداری آن بررسی شد. در زیر مثالی از اشتقاق‌های مکعبی همگن ارائه می‌دهیم، همچنین برای مثالی دیگر در رابطه با اشتقاق مکعبی همگن به مثال 1 از [3] مراجعه کنید.

مثال 1-1. الف) فرض کنید

$$N_2(\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}: a\in\mathbb{C}\right\}$$

و $M_2(\mathbb{C})$ جبر باناخ شامل تمام ماتریس‌های 2×2 با درایه‌هایی در $\mathbb{C}$ باشد. نگاشت $D:N_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & a^3\\ a^3 & 0\end{pmatrix}$$

آنگاه با بررسی ساده، D یک اشتقاق مکعبی همگن است.

ب) فرض کنید

$$T_2(\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}: a\in\mathbb{C}\right\}.$$

نگاشت $D:T_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D\left(\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & a^3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

آنگاه با بررسی ساده، D یک اشتقاق مکعبی همگن است.

ج) در قسمت‌های (الف) و (ب) اگر به‌جای $\mathbb{C}$ یک جبر باناخ جابجایی قرار دهیم آنگاه با تعاریف داده شده برای D، D باز اشتقاق مکعبی همگن خواهد بود.

د) فرض کنید A یک جبر باناخ باشد به‌طوری‌که برای هر $a,b\in A$، $ab=0$ (برای مثال $T_2(\mathbb{C})$ را می‌توان در نظر گرفت). حال جبر باناخ زیر را با ضرب و جمع ماتریس‌ها در نظر می‌گیریم:

$$\mathfrak{A}=\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}: a\in A\right\}$$

نگاشت $D:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D\left(\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & a^3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

آنگاه با بررسی ساده، D یک اشتقاق مکعبی همگن است.

تعریف 1-1: فرض کنیم A یک جبرباناخ و X

یک باتاخ A-دومدول باشد. نگاشت همگن مکعبی را یک نگاشت خطی-مکعبی گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$ و $\lambda\in\mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$D(\lambda a+b)=\lambda^3 D(a)+D(b). \qquad (4.0)$$

فضای تمام نگاشت‌های خطی-مکعبی پیوسته از A به توی X را با $LC(A,X)$ نمایش می‌دهیم و فضای تمام اشتقاق‌های خطی-مکعبی پیوسته D از A به‌توی X را با $Z_c^1(A,X)$ نمایش می‌دهیم. در این مقاله به توصیف اشتقاق‌های خطی-مکعبی همگن روی رده‌های مختلف از جبرهای باناخ می‌پردازیم.

2- جبرهای باناخ حاصل از ضرب θ-لائو

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. طیف جبرباناخ A را با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم که مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی ضربی (همریختی) پیوسته پوشا روی A است.

فرض کنید A و B دو جبر باناخ و $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$، آنگاه $A\times_\theta B$ با ضرب و نرم زیر تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود:

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=$$
$$(a_1a_2+\theta(b_2)a_1+\theta(b_1)a_2,b_1b_2),$$

و

$$\|(a,b)\|=\|a\|_A+\|b\|_B\,.$$

این نوع ضرب روی جبرهای باناخ برای اولین بار توسط لائو در [4] معرفی شد و نتایج اساسی روی این حاصل‌ضرب، توسط سنگانی منفرد در [5] ارائه شد و محققین متعددی روی این حاصل‌ضرب از جبرهای باناخ و توسیع آن توسط یک ریختی مدولی، پژوهش‌هایی را انجام داده‌اند که می‌توان به مقاله‌های [6]،[7]، [8]، [9]، [10]، [11]، [12] اشاره کرد.

تعریف 2-1: فرض کنیم A یک جبرباناخ، $\theta\in\sigma(A)\cup\{0\}$، X یک باتاخ A-دومدول و $D:A\to X$ یک نگاشت خطی-مکعبی باشد. دراین‌صورت D را یک θ-اشتقاق مکعبی گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم:

$$D(ab)=\theta(a)^3D(b)+D(a)\theta(b)^3.$$

فضای تمام θ-اشتقاق‌های مکعبی همگن پیوسته D از A به‌توی X را با $Z^1_{\theta,c}(A,X)$ نمایش می‌دهیم.

برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$(a,b)^3 = (a^3+3\theta(b)a^2+3\theta(b)^2a,b^3) \qquad (5.0)$$

نگاشت‌های کانونی $\iota_A:A\to A\times_\theta B$، $\iota_B:B\to A\times_\theta B$ و نگاشت‌های تصویری $\pi_A:A\times_\theta B\to A$، $\pi_B:A\times_\theta B\to B$ را در نظر می‌گیریم. اگر $D:A\to X$ یک نگاشت همگن خطی-مکعبی باشد، آنگاه نگاشت‌های $D_A:A\to A$، $D_B:B\to B$، $D_{A,B}:A\to B$ و $D_{B,A}:B\to A$ با ضابطه‌های زیر نگاشت‌های خطی-مکعبی هستند:

$$D_A:=\pi_A\circ D\circ\iota_A \qquad (6.0)$$
$$D_B:=\pi_B\circ D\circ\iota_B \qquad (7.0)$$
$$D_{A,B}:=\pi_B\circ D\circ\iota_A \qquad (8.0)$$
$$D_{B,A}:=\pi_A\circ D\circ\iota_B \qquad (9.0)$$

بنابراین با توجه به بحث انجام شده در بالا، لم زیر را داریم:

لم 2-1: فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند و $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$، آنگاه $D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ یک نگاشت خطی-مکعبی است اگر و تنها اگر

نگاشت‌های خطی-مکعبی $D_A : A \to A$، $D_B : B \to B$، $D_{A,B} : A \to B$ و $D_{B,A} : B \to A$ موجود باشند که برای هر $(a,b) \in A \times_\theta B$، D به-صورت زیر باشد:

$$D(a,b) = (D_A(a) + D_{B,A}, D_B(b) + D_{A,B}).$$

قضیه 2-1: فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند و $\theta \in \sigma(B) \cup \{0\}$، آنگاه $D : A \times_\theta B \to A \times_\theta B$ یک اشتقاق خطی-مکعبی است اگر و تنها اگر نگاشت‌های خطی-مکعبی $D_A : A \to A$، $D_{A,B} : A \to B$، θ-اشتقاق مکعبی $D_{B,A} : B \to A$ و اشتقاق خطی-مکعبی $D_B : B \to B$ موجود باشند که برای هر $(a,b) \in A \times_\theta B$، D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,b) = (D_A(a) + D_{B,A}, D_B(b) + D_{A,B}).$$

که برای هر $(a,b),(a',b') \in A \times_\theta B$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

1- $D_A(aa') = a^3 D_A(a') + a^3\theta\left(D_{A,B}(a')\right) + D_A(a)a'^3 + \theta\left(D_{A,B}(a)\right)a'^3$

2- $D_{A,B}(aa') = 0$.

3- $\theta(b')^3 D_A(a) = a^3 D_{B,A}(b') + a^3\theta(D_B(b')) + D_A(a)\theta(b')^3$

4- $\theta(b')D_{A,B}(a) = D_{A,B}(a)b'^3$.

برهان: فرض کنید $D : A \times_\theta B \to A \times_\theta B$ یک اشتقاق خطی-مکعبی باشد. دراین‌صورت بنابر لم 2-1، نگاشت‌های خطی-مکعبی $D_A \in LC(A,A)$، $D_B \in LC(B,B)$، $D_{A,B} \in LC(A,B)$ و $D_{B,A} \in LC(B,A)$ هستند که برای هر $(a,b) \in A \times_\theta B$، داریم:

$$D(a,b) = (D_A(a) + D_{B,A}, D_B(b) + D_{A,B}).$$

چون D یک اشتقاق خطی-مکعبی است، پس برای هر $(a,b),(a',b') \in A \times_\theta B$ داریم:

$$D((a,b)(a',b')) = D((aa' + \theta(b)a' + \theta(b')a, bb')) = (D_A(aa') + \theta(b)^3 D_A(a') + \theta(b')^3 D_A(a) + D_{B,A}(bb'), D_B(bb') + D_{A,B}(aa') + \theta(b)^3 D_{A,B}(a') + \theta(b')^3 D_{A,B}(a))(*)$$

از طرفی برای هر $(a,b),(a',b') \in A \times_\theta B$ با استفاده از (1.5) داریم:

$$\begin{aligned}
&(a,b)^3 D((a',b'))\\
&= (a^3 + 3\theta(b)a^2 + 3\theta(b)^2 a, b^3) D((a',b'))\\
&=(a^3 D_A(a') + a^3 D_{B,A}(b') + 3\theta(b)a^2 D_A(a')\\
&+3\theta(b)a^2 D_{B,A}(b') + 3\theta(b)^2 a D_A(a')\\
&+3\theta(b)^2 a D_{B,A}(b') + a^3\theta\left(D_B(b') + D_{A,B}(a')\right)\\
&+3\theta(b)a^2\theta\left(D_B(b') + D_{A,B}(a')\right)\\
&+3\theta(b)^2 a\theta\left(D_B(b') + D_{A,B}(a')\right)\\
&+\theta(b)^3 D_A(a') + \theta(b)^3 D_{B,A}(b'), b^3 D_B(b')\\
&+b^3 D_{A,B}(a')) \qquad (**)
\end{aligned}$$

و

$$D((a,b))(a'b')^3 = D((a,b))(a'^3 + 3\theta(b')a'^2 + 3\theta(b')^2 a', b'^3) = (D_A(a)a'^3 + 3D_A(a)3\theta(b')a'^2 + 3D_A(a)3\theta(b')^2 a' + D_{B,A}(b)a'^3 + 3D_{B,A}(b)\theta(b')a'^2 + D_{B,A}(b)\theta(b')^2 a' + D_A(a)\theta(b')^3 + D_{B,A}(b)\theta(b')^3 + \theta\left(D_B(b) + D_{A,B}(a)\right)(a^3 + 3\theta(b')a'^2 + 3\theta(b')^2 a'), D_B(b)b'^3 + D_{A,B}(a)b'^3)(***)$$

حال اگر در (*)، (**) و (***) قرار دهیم $a = a' = 0$، آنگاه برای هر $b,b' \in B$ داریم:

$$D_{B,A}(bb') = \theta(b)^3 D_{B,A}(b') + D_{B,A}(b)\theta(b')^3$$

و

$$D_B(bb') = b^3 D(b') + D(b)b'^3$$

حال اگر در (*)، (**) و (***) قرار دهیم $b = b' = 0$، آنگاه برای هر $a,a' \in B$ داریم:

$$D_A(aa') = a^3 D_A(a') + a^3\theta\left(D_{A,B}(a')\right) + D_A(a)a'^3 + \theta\left(D_{A,B}(a)\right)a'^3$$

و $D_{A,B}(aa')=0$. همچنین با فرض $a'=0$ و $b=0$، برای هر $a\in A$ و $b'\in B$ داریم:

$$\theta(b')^3D_A(a) = a^3D_{B,A}(b') + a^3\theta(D_B(b')) + D_A(a)\theta(b')^3$$

و

$$\theta(b')D_{A,B}(a)=D_{A,B}(a)b'^3$$

عکس قضیه بوضوح برقرار است.

نتیجه 2-1: فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند که A یکدار است و $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$، آنگاه $D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ یک اشتقاق خطی-مکعبی است اگروتنهااگر θ-اشتقاق مکعبی $D_{B,A}:B\to A$ و اشتقاق‌های خطی-مکعبی $D_A:A\to A$ و $D_B:B\to B$ موجود باشند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$، D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,b)=(D_A(a)+D_{B,A},D_B(b)).$$

که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ در شرط زیر را داریم:

$$\theta(b)^3D_A(a)=a^3D_{B,A}(b)+a^3\theta(D_B(b))$$
$$+D_A(a)\theta(b)^3$$

برهان: بنابر قضیه 2-1، نگاشت‌های خطی-مکعبی $D_A:A\to A$، $D_{A,B}:A\to B$، θ-اشتقاق مکعبی $D_{B,A}:B\to A$ و اشتقاق خطی-مکعبی $D_B:B\to B$ موجود باشند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$، D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,b)=(D_A(a)+D_{B,A},D_B(b)+D_{A,B}).$$

و در شرط‌های 1 تا 4 قضیه 1-2 صدق کند. بنابراین برای هر $a,a'\in A$ داریم $D_{A,B}(aa')=0$ چون A یکدار است پس برای هر $a\in A$ داریم $D_{A,B}(a)=0$. بنابراین بنابر قسمت 1 قضیه 2-1، D_A یک اشتقاق خطی-مکعبی است. بقیه برهان بنابر قضیه 2-1 برقرار است.

گزاره 2-1: فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند و $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$. اگر $D_B:B\to B$ یک اشتقاق خطی-مکعبی باشد، آنگاه

$$D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$$
$$D((a,b))=(0,D_B(b))$$

یک اشتقاق خطی-مکعبی است.

برهان: به طریق مستقیم حکم برقرار است.

3- جبر باناخ توسیع مدولی

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک باناخ A-دومدول باشد. منظور از جبر باناخ توسیع مدولی مرتبط با A و X ℓ^1-مجموع A و X است که با $A\oplus_1 X$ نمایش می‌دهیم و ضرب و نرم روی آن برای هر $(a,x),(a',x')\in A\oplus_1 X$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(a,x)(a',x')=(aa',a\cdot x'+x\cdot a')$$

و

$$\|(a,x)\|=\|a\|_A+\|x\|_X$$

این نوع جبر باناخ برای اولین بار توسط ژانگ در [13] مورد مطالعه قرار داد و برخی از خواص مانستگی و همانستگی، نتایج در رابطه با اشتقاق‌ها روی دوگان دوم این نوع از جبرهای باناخ در [14]، [15]، [16]، [17]، [18] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

برای هر $(a,x)\in A\oplus_1 X$ داریم:

$$(a,x)^3 = (a^3,a\cdot x\cdot a+x\cdot a^2+a^2\cdot x) \tag{10.0}$$

نگاشت‌های کانونی $\iota_A:A\to A\oplus_1 X$، $\iota_X:X\to A\oplus_1 X$ و نگاشت‌های تصویری $\pi_A:A\oplus_1 X\to A$، $\pi_X:A\oplus_1 X\to X$ را درنظر می‌گیریم. اگر $D:A\to X$ یک نگاشت همگن خطی-مکعبی باشد، آنگاه مشابه بخش قبلی، نگاشت‌های $D_A:A\to A$، $D_X:X\to X$،

$D_{A,X}: A \to X$ و $D_{X,A}: X \to A$ با ضابطه‌های زیر نگاشت‌های خطی-مکعبی هستند:

$$D_A := \pi_A \circ D \circ \iota_A \quad (11.0)$$

$$D_X := \pi_X \circ D \circ \iota_X \quad (12.0)$$

$$D_{A,X} := \pi_X \circ D \circ \iota_A \quad (13.0)$$

$$D_{X,A} := \pi_A \circ D \circ \iota_X \quad (14.0)$$

بنابراین با توجه به بحث انجام شده در بالا مشابه لم 1-2، لم زیر را داریم:

لم 3-1: جبر باناخ توسیع مدولی $A \oplus_1 X$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $D: A \oplus_1 X \to A \oplus_1 X$ یک نگاشت خطی-مکعبی است اگر و تنها اگر نگاشت‌های خطی-مکعبی $D_A: A \to A$ ، $D_X: X \to X$، $D_{A,X}: A \to X$ و $D_{X,A}: X \to A$ موجود باشند که برای هر $(a,x) \in A \oplus_1 X$، D به‌صورت زیر باشد:

$D(a,x) = (D_A(a) + D_{X,A}(x), D_X(x) + D_{A,X}(a))$.

تعریف 3-1: فرض کنید A یک جبر باناخ، X و Y دو باناخ A -دومدول باشند. نگاشت همگن $T: X \to Y$ را یک A-ریختی مکعبی چپ نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$T(a \cdot x) = a^3 \cdot T(x)$

به‌طور مشابه، A-ریختی مکعبی راست را برای هر $a \in A$ و $x \in X$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$T(x \cdot a) = T(x) \cdot a^3$

نگاشت $T: X \to Y$ را یک A-ریختی مکعبی نامیم هرگاه آن یک A-ریختی مکعبی چپ و راست باشد.

قضیه 3-1: جبر باناخ توسیع مدولی $A \oplus_1 X$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $D: A \oplus_1 X \to A \oplus_1 X$ یک اشتقاق مکعبی است اگروتنهااگر اشتقاق‌های مکعبی $D_A: A \to A$، $D_{A,X}: A \to X$ و A-ریختی‌های مکعبی $D_X: X \to X$ و $D_{X,A}: X \to A$ موجود باشند که برای هر $(a,x) \in A \oplus_1 X$، D به‌صورت زیر باشد:

$D(a,x) = (D_A(a) + D_{X,A}(x), D_X(x) + D_{A,X}(a))$.

برهان: فرض کنید $D: A \oplus_1 X \to A \oplus_1 X$ یک اشتقاق مکعبی باشد. در این‌صورت بنابر لم 3-1، نگاشت‌های خطی-مکعبی $D_A: A \to A$، $D_X: X \to X$، $D_{A,X}: A \to X$ و $D_{X,A}: X \to A$ موجود باشند که برای هر $(a,x) \in A \oplus_1 X$ ، D به‌صورت زیر باشد:

$D(a,b) = (D_A(a) + D_{X,A}, D_X(b) + D_{A,X})$.

با استفاده از فرمول بالا برای هر $(a,x),(a',x') \in A \oplus_1 X$ داریم:

$D((a,x)(a',x')) = (D_A(aa') + D_{X,A}(a \cdot x' + x \cdot a'), D_{A,X}(aa') + D_X(a \cdot x' + x \cdot a'))(\Delta)$

از طرفی بنابر (1.10) برای هر $(a,x),(a',x') \in A \oplus_1 X$ داریم:

$$\begin{aligned}
&(a,x)^3 D((a',x')) \\
&= (a^3, a \cdot x \cdot a + x \cdot a^2 + a^2 \cdot x) D((a',x')) \\
&= (a^3 D_A(a') + a^3 D_{X,A}(x'), a^3 \cdot D_X(x') \\
&+ a^3 \cdot D_{A,X}(a') + (a \cdot x \cdot a) \cdot D_A(a') \\
&+ (x \cdot a^2) \cdot D_{X,A}(x') + (x \cdot a^2) \cdot D_X(x') \\
&+ (x \cdot a^2) \cdot D_{A,X}(a') + (a^2 \cdot x) \cdot D_X(x') \\
&+ (a^2 \cdot x) \cdot D_{A,X}(a')) \qquad (\Delta\Delta)
\end{aligned}$$

و

$D((a,x))(a',x') = D((a,x))(a'^3, a'\cdot x'\cdot a' + x'\cdot a'^2 + a'^2\cdot x') = (D_A(a)\cdot a'^3 + D_{X,A}(x)\cdot a'^3, D_A(a)\cdot(a'\cdot x'\cdot a') + D_A(a)\cdot(x'\cdot a'^2) + D_A(a)\cdot(a'^2\cdot x') + D_{X,A}(x)\cdot(a'\cdot x'\cdot a') + D_{X,A}(x)\cdot(x'\cdot a'^2) + D_{X,A}(x)\cdot(a'^2\cdot x') + D_X(x)\cdot a'^3 + D_{A,X}(a)\cdot a'^3)(\Delta\Delta\Delta)$

حال با قرار دادن $x = x' = 0$ در رابطه‌های بالا برای هر $a,a'\in A$ داریم:

$$D_A(aa') = a^3 D(a') + D_A(a)a'^3$$

و

$$D_{A,X}(aa') = a^3\cdot D_{A,X}(a') + D_{A,X}(a)\cdot a'^3$$

اگر در رابطه‌های (Δ)، $(\Delta\Delta)$ و $(\Delta\Delta\Delta)$ قرار دهیم $x = 0$ و $a' = 0$ آنگاه داریم:

$$D_{X,A}(a\cdot x') = a^3 D_{X,A}(x')$$

و

$$D_X(a\cdot x') = a^3\cdot D_X(x')$$

به‌طور مشابه، اگر قرار دهیم $a = 0$ و $x' = 0$، آنگاه داریم:

$$D_{X,A}(x\cdot a') = D_{X,A}(x)a'^3$$

و

$$D_X(x\cdot a') = D_X(x)\cdot a'^3$$

4- جبرهای باناخ ملقمه‌ای

فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathfrak{A}$ دو جبرباناخ باشند که $\mathcal{A}$ یک باناخ $\mathfrak{A}$ -دومدول است. جبرباناخ ملقمه‌ای $\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$ با ضرب و نرم زیر تعریف می‌شود:

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab + \alpha\cdot b + a\cdot\beta, \alpha\beta)$$

و

$$\|(a,\alpha)\|_1 = \|a\|_{\mathcal{A}} + \|\alpha\|_{\mathfrak{A}}.$$

این جبرها توسط جوانشیری و نعمتی [19] در معرفی و مورد مطالعه قرار گرفتند و نتایجی در رابطه با انقباض‌پذیری، دوتصویری، میانگین‌پذیری و دوتختی آن‌ها توسط عبادیان و جباری در [20] مورد بررسی قرار گرفتند.

برای هر $(a,\alpha)\in\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$ داریم:

$$(a,\alpha) = (a^3 + a\cdot\alpha\cdot a + \alpha\cdot a^2 + \alpha^2\cdot a, \alpha^3) \quad (15.0)$$

لم 4-1: جبر باناخ ملقمه‌ای $\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$ را در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت $D: \mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}\to\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$ یک نگاشت خطی-مکعبی است اگر و تنها اگر نگاشت‌های خطی-مکعبی $D_A: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$، $D_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$، $D_{A,\mathfrak{A}}: \mathcal{A}\to\mathfrak{A}$ و $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}: \mathfrak{A}\to\mathcal{A}$ موجود باشند که برای هر $(a,\alpha)\in\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$، D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,\alpha) = (D_{\mathcal{A}}(a) + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha), D_{\mathfrak{A}}(\alpha) + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a)).$$

قضیه 4-1: جبر باناخ ملقمه‌ای $\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$ را در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت $D: \mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}\to\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$ یک اشتقاق خطی-مکعبی است اگروتنهااگر اشتقاق-های خطی-مکعبی $D_{\mathcal{A}}: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$، $D_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ و نگاشت‌های $D_{A,\mathfrak{A}}: \mathcal{A}\to\mathfrak{A}$ و $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}: \mathfrak{A}\to\mathcal{A}$ موجود باشند که برای هر $(a,\alpha)\in\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$، D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,\alpha) = (D_{\mathcal{A}}(a) + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha), D_{\mathfrak{A}}(\alpha) + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a))$$

به‌طوری‌که

1- $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(a\cdot\alpha) = a^3 D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)$، $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha\cdot a) = D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)a^3$ و $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha\alpha') = 0$.

2- $D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a\cdot\alpha) = D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a)\alpha^3$، $D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(\alpha\cdot a) = \alpha^3 D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a)$ و $D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(aa') = 0$.

برهان: بنابر لم 4-1 برای هر $(a,\alpha)\in\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$، D به‌صورت زیر است:

$$D(a,\alpha) = (D_{\mathcal{A}}(a) + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha), D_{\mathfrak{A}}(\alpha) + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a)).$$

برای هر $(a,\alpha), (a',\alpha')\in\mathcal{A}\rtimes\mathfrak{A}$ داریم:

$$D((a,\alpha)(a',\alpha')) = (D_{\mathcal{A}}(aa') + D_{\mathcal{A}}(a\cdot \alpha') + D_{\mathcal{A}}(\alpha\cdot a') + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha\alpha'), D_{\mathfrak{A}}(\alpha\alpha') + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(aa') + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a\cdot\alpha') + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(\alpha\cdot a'))$$

همچنین برای هر $(a,\alpha),(a',\alpha')\in \mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}$ و با استفاده از (1.15) داریم:

$$\begin{aligned}(a,\alpha)^3 D((a',\alpha')) &= (a^3 + a\cdot\alpha\cdot a + \alpha\cdot a^2 + \alpha^2\cdot a, \alpha^3)D((a',\alpha')) = (a^3 D_{\mathcal{A}}(a') + a^3 D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha') + (a\cdot\alpha\cdot a)D_{\mathcal{A}}(a') \\ &+ (a\cdot\alpha\cdot a)D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha') + (\alpha\cdot a^2)D_{\mathcal{A}}(a') + (\alpha\cdot a^2)D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha') + (\alpha^2\cdot a)D_{\mathcal{A}}(a') + (\alpha^2\cdot a)D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha'), \alpha^3 D_{\mathfrak{A}}(\alpha') + \alpha^3 D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a'))\end{aligned} \tag{16.0}$$

و

$$D((a,\alpha))(a',\alpha')^3 = D((a,\alpha))(a'^3 + a'\cdot\alpha'\cdot a' + \alpha'\cdot a'^2 + \alpha'^2\cdot a', \alpha'^3) = (D_{\mathcal{A}}(a)a'^3 + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)a'^3 + D_{\mathcal{A}}(a)(a'\cdot\alpha'\cdot a') + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)(a'\cdot\alpha'\cdot a') + D_{\mathcal{A}}(a)(\alpha'\cdot a'^2) + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)(\alpha'\cdot a'^2) + D_{\mathcal{A}}(a)(\alpha'^2\cdot a') + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)(\alpha'^2 a'), D_{\mathfrak{A}}(\alpha)\alpha'^3 + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a)\alpha'^3)$$

اگر در رابطه‌های بالا قرار دهیم $a=a'=0$، آنگاه داریم:

$$D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha\alpha') = 0$$

و

$$D_{\mathfrak{A}}(\alpha\alpha') = \alpha^3 D(\alpha') + D(\alpha)\alpha'^3$$

اگر قرار دهیم $\alpha=\alpha'=0$، آنگاه داریم:

$$D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(aa') = 0$$

و

$$D_{\mathcal{A}}(aa') = a^3 D(a') + D(a)a'^3$$

همچنین اگر فرض کنیم $\alpha'=0$ و $a=0$ آنگاه داریم:

$$D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha\cdot a') = D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)a'^3$$

و

$$D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(\alpha\cdot a') = \alpha^3 D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a')$$

به‌طور مشابه اگر فرض کنیم $\alpha=0$ و $a'=0$ آنگاه داریم:

$$D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(a\cdot\alpha') = a^3 D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha')$$

و

$$D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a\cdot\alpha') = D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a)\alpha'^3$$

برهان عکس بوضوح برقرار است.

نتیجه 4-1: جبر باناخ ملقمه‌ای $\mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\mathcal{A}$ و $\mathfrak{A}$ هر دو یکدار هستند. دراین‌صورت $D:\mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}\to\mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}$ یک اشتقاق خطی-مکعبی است اگروتنهااگر اشتقاق‌های خطی-مکعبی $D_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ و $D_{\mathfrak{A}}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ موجود باشند که برای هر $(a,\alpha)\in\mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}$ D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,\alpha) = (D_{\mathcal{A}}(a), D_{\mathfrak{A}}(\alpha))$$

برهان: بنابر قضیه 4-1 اگر $D:\mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}\to\mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}$ یک اشتقاق خطی-مکعبی باشد آنگاه اشتقاق‌های خطی-مکعبی $D_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ ، $D_{\mathfrak{A}}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ و نگاشت‌های $D_{A,\mathfrak{A}}:\mathcal{A}\to\mathfrak{A}$ و $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}:\mathfrak{A}\to\mathcal{A}$ وجود دارند که برای هر $(a,\alpha)\in\mathcal{A}\bowtie\mathfrak{A}$، D به-صورت زیر است:

$$D(a,\alpha) = (D_{\mathcal{A}}(a) + D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha), D_{\mathfrak{A}}(\alpha) + D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a))$$

و $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha\alpha')=0$ و $D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(aa')=0$. چون $\mathcal{A}$ و $\mathfrak{A}$ هر دو یکدار هستند، پس بنابر مطلب بالا، برای هر $\alpha\in\mathfrak{A}$ و $a\in\mathcal{A}$ نتیجه می‌گیریم که $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}(\alpha)=0$ و $D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}(a)=0$ بنابراین $D_{\mathfrak{A},\mathcal{A}}=0$ و $D_{\mathcal{A},\mathfrak{A}}=0$. این برهان را کامل می‌کند.

فهرست منابع

[1] A. M. Wazwaz. A first course in integral equations. World Scientific. Singapour (1997)

[2] A. M. Wazwaz. Linear and nonlinear integral equation: methods and applications. Higher Education Press and Springer Verlage (2011)

[3] M. H. Reihani, Z. Abadi. Rationalized Harr functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations. Journal of Computational and Applied Mathematics 12-20 (2007)

[4] J. Saberi-Nadjafi, M. Mehrabinezhad, T. Diogo. The Coiflet-Galerkin method for linear Volterra integral equations. Applied Mathematics and Computation 221:469-483(2013)

[5] J. Saberi-Nadjafi, M. Mehrabinezhad, H. Akbari. Solving Volterra integral equations of the second kind by Wavelet-Galerkin scheme. Computer and Mathematics with Applications 63:1536-1547(2012)

[6] Miggen Cui, Yingzhen Lin.Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space.Nova Science Publishers, Inc (2008)

[1] K. W. Jun and H. M. Kim, The generalized Hyers-Ulam-Rassias stability of a cubic functional equation. J. Math. Anal. Appl. 274(2): 267-278(2002)

[2] M. Eshaghi Gordji, S. Kaboli Gharetapeh, M. B. Savadkouhi, M. Aghaei and T. Karimi. On cubic derivations. Int. J. Math. Anal. 4(51): 2501–2514(2010)

[3] A. Bodaghi, Cubic derivations on Banach algebras. Acta Math. Vietnam. 38: 517–528(2013)

[4] A. T.-M. Lau. Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups. Fund. Math. 118: 161-175(1983)

[5] M. Sangani-Monfared. On certain products of Banach algebras with applications to harmonic analysis", Studia Math. 178(3): 277-294(2007)

[6] S. J. Bhatt and P. A. Dabhi. Arens regularity and amenability of Lau product of Banach algebras. Bull. Aust. Math. Soc. 87: 195–206(2013)

[7] P. A. Dabhi, A. Jabbari, and K. Haghnejad Azar. Some notes on amenability and weak amenability of Lau product of Banach algebras defined by a Banach algebra morphism. Acta Mathematica Sinica, English Series 31(9): 1461–1474(2015)

[8] Dabhi, P. A., and S. K. Patel. "Spectral properties of the Lau product of Banach algebras." Annals Funct. Anal. 9(2): 246-257(2018)

[9] E. Ghaderi, R. Nasr-Isfahani, and M. Nemati. Some notions of amenability for certain products of Banach algebras. Colloquium Math. 130(2): 147-157(2013)

[10] A. R. Khoddami and H. R. Ebrahimi Vishki. Biflatness and biprojectivity of Lau product of Banach algebras. Bull. Iran. Math. Soc. 39(3): 559-568(2013)

[11] H. Pourmahmood Agababa. Derivations and generalized semidirect products of Banach algebras. Banach J. Math. Anal. 10(3): 1735-8787(2016)

[12] S. Shams. Derivations on Lau product of Banach algebras. Journal of New Researches in Mathematics. in press.

[13] Y. Zhang. Weak amenability of module extensions of Banach algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 354: 4131-4151(2002)

[14] A. Bagheri Vakilabad, K. Haghnejad Azar and A. Jabbari. Arens regularity of module actions and weak amenability of Banach algebras, Period. Math. Hung. 71(2): 224-235(2015)

[15] M. Eshaghi Gordji, F. Habibian and A. Rejali. Module extension of dual Banach algebras, Bull. Korean Math. Soc. 47(4): 663-673(2010)

[16] A. R. Medghalchi and H. Pourmahmood-Aghababa. On module extension Banach algebras. Bull. Iran. Math. Soc. 37(4): 171-183(2011)

[17] R. Medghalchi and H. Pourmahmood-Aghababa, The first cohomology group of module extension Banach algebras, Rocky Mount. J. Math. 41(5): 1639-1651(2011)

[18] A. Jabbari and A. Ebadian, The first cohomology group of module extension Banach algebras, Rocky Mount. J. Math. to appear.

[19] H. Javanshiri and M. Nemati, Amalgamated duplication of the Banach algebra A along a A-bimodule $\mathcal{A}$, Journal of Algebra and its Applications. 17(9): 1850169(2018)

[20] A. Ebadian, A. Jabbari. Biprojectivity and biflatness of amalgamated duplication of Banach algebras. Journal of Algebra and its Applications. 19(7): 2050132(2020)