

ارزیابی کارایی مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر اعداد فازی شهودی مثلثی و متغیرهای کمکی

نفیسه جواهریان^۱، علی حمزه‌ای^{۲*}، حسین صیادی توارانلو^۳، رضا سلیمانی دامنه^۴

^(۱و۲) گروه ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرمان، کرمان، ایران

^(۳) گروه مدیریت، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه میبد، میبد، ایران

^(۴) گروه مدیریت، دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه ولیعصر(ع) رفسنجان، رفسنجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۱۸

چکیده

یکی از بهترین ابزارها برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده، تحلیل پوششی داده‌ها است. تحلیل پوششی داده‌های سنتی در سنجش واحدهای کارا و ناکارا و ارزیابی عملکرد سیستم‌های شبکه‌ای به درستی عمل نمی‌کنند و مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها به ساختارهای درونی و مقادیر میانی توجهی ندارند. به همین علت در سال‌های اخیر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها معروف به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای معرفی شده‌اند، این مدل‌ها با لحاظ نمودن مقادیر میانی، این نقص را برطرف کردند. در این مقاله برای شناسایی کارایی واحدها از تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر متغیرهای کمکی شبکه‌ای بصورت دو مرحله‌ای و از داده‌های فازی شهودی مثلثی، استفاده شده است. به طوری که در ابتدا مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای معرفی می‌گردد و سپس مدل بر اساس ضرایب متغیرهای فازی شهودی تبدیل گردیده و سرانجام به کمک عملگرهای حسابی روی داده‌های فازی شهودی به ساختارهای دو مرحله‌ای قطعی تبدیل می‌شود. اهمیت این مدل اندازه‌گیری مقادیر متغیرهای کمبود و مازاد می‌باشد، که بر اساس مدل تون و تسوتسوی به بهینه‌سازی مقادیر میانی برای واحدهای ناکارا می‌پردازد و نهایتاً ناکارایی را بهتر نشان می‌دهد. سرانجام مقادیر بهینه شده میانی در مدل مطرح شده لحاظ گردیده و بدین طریق منجر به بهبود مقدار کارایی کل سیستم می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای فازی شهودی، اعداد مثلثی فازی شهودی، متغیرهای کمکی.

۱. مقدمه

حالی که در اکثر مواقع به واحدهایی برخورد می‌کنیم که تولید خروجی نهایی را طی یک مرحله انجام نمی‌دهد بلکه بعد از طی چند مرحله خروجی نهایی را تولید می‌کنند. اگر برای ارزیابی این چنین واحدهایی از مدل سنتی *DEA* استفاده شود نتایج مناسبی را به دست نمی‌دهد. زیرا در تحلیل سنتی ساختار داخلی *DMU* ها در محاسبه کارایی نادیده گرفته می‌شود. به همین دلیل محققان *DEA* در دو دهه اخیر برای محاسبه کارایی، *DMU* ها را با ساختار شبکه‌ای در نظر گرفتند.

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای^۳ (*NDEA*) اولین بار توسط فار و گراسگوف معرفی شدند [۹،۱۰]. این مدل‌ها کارایی *DMU* ها را با در نظر گرفتن ساختار درونی آنها محاسبه می‌کنند. از زمان معرفی *NDEA* تاکنون مدل‌های متفاوت آن توسط محققین ارائه شده است. سکستون و لوییس در سال ۲۰۰۳ در مقاله‌ای یک مدل شبکه‌ای دو مرحله‌ای را پیشنهاد کردند و در سال ۲۰۰۴ مدل خود را به صورت چند مرحله‌ای ارائه دادند [۱۱،۱۲]. پریو و زوفیو [۱۳] اندازه‌گیری کارایی شبکه‌ای را در قالب مدل ورودی-خروجی محور انجام دادند. آنها موفق به بهینه سازی تخصیص ورودی اولیه، محصول میانی و خروجی نهایی در تکنیک *DEA* شبکه‌ای شدند. یکی از معروفترین مدل‌های *NDEA*، محاسبه کارایی با اندازه‌گیری مبتنی بر متغیرهای کمکی^۴ (*SBM*) است که توسط تون [۱۴] معرفی شده است.

اشرفی و همکاران [۱۵] به منظور اندازه‌گیری کارایی به روش مبتنی بر متغیرهای کمکی در تحلیل پوششی دو مرحله‌ای داده‌های فازی، مدلی را ارائه کردند که با استفاده از آن می‌توان کارایی سیستم را به روش *SBM* و با استفاده از داده‌های فازی بدست آورد. گرامی [۱] با ارائه یک روش دو

تحلیل پوششی داده‌ها^۱ (*DEA*) که اولین بار توسط چارلز، کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ مطرح شد، شامل تکنیک‌هایی برای ارزیابی عملکرد و کارایی انواع مختلف سیستم‌ها و سنجش بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیری^۲ (*DMU*) با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه است [۵،۴،۳]. *DEA* اطلاعات بدست آمده از مشاهدات واحدهای تحت بررسی را با هم مقایسه کرده و به محاسبه اندازه کارایی و میزان پیشرف این واحدها می‌پردازد و در این راستا با توجه به نتایج اتخاذ شده راهکارهایی برای بهبود واحد تحت ارزیابی ارائه می‌دهد. *DEA* به عنوان یک روش تحقیق در عملیات، امروزه مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است و مقالات بسیاری از این علم در مینه‌های مختلف به چاپ رسیده است، برای مثال بزرگری نژاد و همکاران [۶] روشی را برای رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیری بر اساس نقاط ایده‌آل و ضد ایده‌آل در مجموعه امکان تولید با استفاده از مجموعه‌های اوزان مشترک ارائه کردند. حسین‌زاده‌لطفی و همکاران [۷] با ارائه ایده جدیدی به محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیری یک بازه زمانی در مجموعه امکان تولید پرداختند و در آخر روشی برای رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیری بدست آوردند. نیک فرجام و همکاران [۸] یک روش از *DEA* برای اندازه‌گیری راندمان کوتاه مدت و بلند مدت زنجیره تأمین پیشنهاد کردند. آنگاه دو رویکرد را به عنوان موارد ویژه مدل ترکیبی یکپارچه کرده و سپس استراتژی‌های کوتاه مدت و بلند مدت زنجیره تأمین را با هم مقایسه نمودند. تمامی مدل‌های سنتی *DEA* برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری، واحدها را بصورت جعبه سیاهی در نظر می‌گیرند که از ورودی‌های اولیه برای تولید خروجی‌های نهایی استفاده می‌کنند. در

³ Network Data Envelopment Analysis

⁴ Slacks based measure

¹ Data Envelopment Analysis

² Decision Making Units

مرحله‌ای در تحلیل پوششی داده‌ها، به ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری کارا برای تعیین الگوی مناسب کارایی در دبیرستان‌های دخترانه شیراز پرداخت. رستمی مال خلیفه و همکاران [۱۶] به ارزیابی عملکرد زنجیره تامین تحت مدل غیر شعاعی *SBM* شبکه‌ای پرداخته‌اند. خمسه [۱۷] به ارائه مدلی برای رتبه بندی واحدهای کارا در تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای با استفاده از روش وزن مشترک پرداخته است. تون و تسوتسوی [۱۸] تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای را برای مدل غیر شعاعی *SBM* توسعه دادند، تا ناکارایی را بهتر نشان دهند و تمایز بیشتری بین واحدها ایجاد کنند. آنها مدل پویای *SBM* را نیز معرفی کردند و در سال ۲۰۱۴ در مقاله‌ای از ترکیب این دو تحقیق مدل شبکه‌ای پویا *SBM* را به کار بستند. در این مقاله نوع ارتباطات بین بخش‌ها و همچنین محدودیت‌های متداوم فعالیت‌ها به صورت کامل معرفی گردیده است [۱۹،۲۰].

اصولا داده‌ها در مدل *NDEA* قطعی هستند، ولی با توجه به مسائل در دنیای واقعی و همچنین با در نظر گرفتن ماهیت داده‌ها، دیگر نمی‌توان به ریاضیات کلاسیک برای حل این مدل‌ها اکتفا کرد و برای حل این مشکل با در نظر گرفتن بعد خاکستری در منطق کلاسیک که همان منطق فازی است می‌توان نتایج به دست آمده در مدل‌ها را بهبود بخشید. تئوری مجموعه‌های فازی که در مقابل منطق قطعی است برای اولین بار توسط پروفیسور لطفی‌زاده [۲۱] مطرح شد که هدف اولیه او در آن زمان، توسعه مدلی کارآمدتر برای توصیف فرآیند پردازش زبان‌های طبیعی بود.

در این راستا برخی از محققان به استفاده از منطق فازی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها روی آوردند.

مقادیر کارایی یک *DMU* و زیر مجموعه‌های *DMU* آن پیشنهاد کردند. حاتمی ماریینی و همکاران [۲۳]، برای ارزیابی مراکز بهداشت از روش تحلیل پوششی با داده‌های فازی استفاده کردند. پیکانی و همکاران [۲۴] برای اندازه‌گیری کارایی ۳۸ بیمارستان ایالت متحده از یک مدل جدید تحلیل پوششی داده‌های فازی با استفاده از پارامترهای خوشبینانه و بدبینانه برای واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده کردند. پیکانی و همکاران [۲۵] مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی را تحت برنامه‌ریزی استوار امکانی بر اساس رویکرد امکان، الزام و اعتبار ارائه کردند. ناصری و همکاران [۲] رویکرد جدیدی از آلفا برش را برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی و خروجی‌های فازی تصادفی ارائه دادند. پیکانی و همکاران [۲۶] یک رویکرد جدید از مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی برای اندازه‌گیری کارایی سهام و اوراق بهادار تهران در حضور داده‌های منفی و نادقیق ارائه کردند. رحمانی و همکاران [۲۷]، به مفهوم محاسبات دانه‌ای یا گرانول که یک نظریه در حال ظهور است پرداخته‌اند، مفهوم دانه‌بندی اطلاعات فازی می‌تواند برای تبدیل مجموعه‌های فازی به مجموعه‌های قطعی مورد استفاده قرار گیرد؛ لذا آنها یک روش جدید برای غیرفازی‌سازی براساس مقدار میانگین توزیع بتا و الگوریتمی برای رتبه‌بندی اعداد فازی براساس سیستم رتبه‌بندی این اعداد ارائه دادند. ابراهیم‌نژاد [۲۸]، کائو و لیو [۲۹]، گئو و تاناکا [۳۰]، لرتوراسیریکال [۳۱]، ساعتی و همکاران [۳۲]، ساعتی و ایمانی [۳۳]، جهانشاهلو و همکاران [۳۴]، رستمی مال خلیفه و مولاییان [۳۵]، نمونه‌هایی دیگری از کارهای انجام شده در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که از داده‌های فازی استفاده کرده‌اند.

در ادامه توسعه منطق فازی، آتاناسو [۳۶] در سال ۱۹۸۶ با توسعه مجموعه فازی، مجموعه‌های فازی

برای مثال توانا و خلیلی دامغانی [۲۲] مدل فازی تحلیل پوششی دو مرحله‌ای کارا را برای تخصیص

مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر اعداد فازی شهودی مثلثی و متغیرهای کمکی با رویکرد تون و تسوتسوی مرور می‌گردد. بخش چهارم در قالب یک مثال عددی قابلیت رویکرد پیشنهادی به تصویر کشیده می‌شود. در نهایت، در بخش پنجم نتایج حاصل از رویکرد پیشنهادی بیان خواهد شد.

۲. مفاهیم مقدماتی:

۲-۱. مجموعه‌های فازی شهودی^۱ (IFS)

مجموعه فازی شهودی تعمیمی از یک مجموعه فازی [۲۱] است که اولین بار توسط آتاناسو [۳۶] معرفی شد.

آتاناسو مجموعه فازی شهودی در مجموعه مرجع X را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\tilde{A}^I = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x) \rangle, \forall x \in X \}$$

به طوری که:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) : X \rightarrow [0,1], \nu_{\tilde{A}^I}(x) : X \rightarrow [0,1]$$

با این شرط که:

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}^I}(x) + \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq 1, \forall x \in X$$

و اعداد $\mu_{\tilde{A}^I}(x)$ و $\nu_{\tilde{A}^I}(x)$ به ترتیب نشان دهنده درجه عضویت و درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ به مجموعه \tilde{A}^I می‌باشد.

آتاناسو همچنین برای یک مجموعه فازی شهودی مقدار π_x با رابطه:

$$\pi_x = 1 - \mu_{\tilde{A}^I}(x) - \nu_{\tilde{A}^I}(x), \forall x \in X$$

را به عنوان درجه تردید تعریف می‌کند.

۲-۱-۱. عدد فازی شهودی^۱ (IFN)

شهودی را با سه مشخصه درجه عضویت، درجه عدم عضویت و درجه تردید معرفی کرد. مجموعه‌های فازی شهودی در مقابل مجموعه‌های فازی، در تبادل با ابهام و عدم اطمینان از اثر بخشی بالاتری برخوردار است [۳۷،۳۸].

آریا و یاداو [۳۹] مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی شهودی و دوگان آنها را بر اساس آلفا برش‌ها توسعه دادند و رویکردی برای پیدا کردن ورودی‌ها و خروجی‌های فازی شهودی پیشنهاد دادند، که واحد تصمیم‌گیری ناکارا را به کارا در محیط فازی شهودی تبدیل می‌کند. پوری و یاداو [۴۰] تحلیل پوششی داده‌های فازی شهودی را بر اساس ورودی و خروجی با اعداد فازی شهودی مثلثی ارائه دادند. اوتای و همکاران [۴۱] برای ارزیابی و سنجش عملکرد موسسات و مراقبت‌های پزشکی استانبول از مجموعه‌های فازی شهودی استفاده کردند. دتولی و همکاران [۴۲] روش جدیدی برای ارزیابی عملکرد سیستم‌های مراقبتی در جنوب استرالیا در مواجهه با ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق و مبهم ارائه دادند. حاجی آقا و همکاران [۴۳] مدل‌های تجمعی وزنی برای ورودی و خروجی با مجموعه‌های فازی شهودی ارائه دادند. آریا و یاداو [۴۴] مدل SBM را که یک مدل غیر شعاعی در تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است، را برای ورودی‌ها و خروجی‌ها با داده‌های فازی شهودی پیشنهاد دادند.

با بررسی‌های صورت گرفته، مطالعه‌ای در خصوص تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر متغیرهای کمکی در محیط فازی شهودی مشاهده نگردید. این تحقیق درصدد توسعه مدل اندازه‌گیری کارایی مبتنی بر متغیرهای کمکی تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای تون و تسوتسوی [۱۸] در محیط فازی شهودی است.

در ادامه، در بخش دوم مفاهیم اصلی مجموعه‌ها و اعداد فازی شهودی ارائه می‌شود. در بخش سوم

¹ Intuitionistic fuzzy set

۲-۱-۲. اعداد فازی شهودی مثلثی^۲ (TIFN)

تعریف ۳: [۴۵] عدد فازی شهودی \tilde{A}^I یک عدد فازی شهودی مثلثی نام دارد، اگر تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}^I}$ و عدم عضویت $\nu_{\tilde{A}^I}$ آن در x به شرح روابط (۳) و (۴) باشند:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^1}{a^2-a^1}, & a^1 \leq x < a^2, \\ 1, & x = a^2, \\ \frac{x-a^3}{a^2-a^3}, & a^2 < x \leq a^3, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۳)$$

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^2}{a^1-a^2}, & a^1 \leq x < a^2, \\ 0, & x = a^2, \\ \frac{x-a^2}{a^3-a^3}, & a^2 < x \leq a^3, \\ 1, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۴)$$

به طوری که $a^1 \leq a^1 \leq a^2 \leq a^3 \leq a^3$. این عدد فازی شهودی مثلثی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\tilde{A}^I = (a^1, a^2, a^3; a^1, a^2, a^3)$$

۲-۱-۳. عملگرهای حسابی روی اعداد فازی شهودی مثلثی:

دو عدد فازی شهودی مثلثی مانند \tilde{A}^I, \tilde{B}^I را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}^I = (a^1, a^2, a^3; a^1, a^2, a^3), \tilde{B}^I = (b^1, b^2, b^3; b^1, b^2, b^3)$$

آنگاه روابط زیر برقرار هستند:

تعریف ۱: [۴۵] مجموعه فازی شهودی \tilde{A}^I را یک

عدد فازی شهودی گویند، هرگاه:

$$(۱) \quad \tilde{A}^I \text{ نرمال باشد یعنی:}$$

$$\forall x_0 \in R : \mu_{\tilde{A}^I}(x_0) = 1, \nu_{\tilde{A}^I}(x_0) = 0$$

(۲) $\mu_{\tilde{A}^I}(x)$ محدب باشد یعنی:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x_1), \mu_{\tilde{A}^I}(x_2)), \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$$

(۳) $\nu_{\tilde{A}^I}(x)$ مقعر باشد یعنی:

$$\nu_{\tilde{A}^I}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x_1), \nu_{\tilde{A}^I}(x_2)), \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$$

تعریف ۲: یک عدد فازی شهودی را می‌تواند به صورت زیر نشان داد:

$$(a^1, a^2, a^3, a^4; b^1, b^2, b^3, b^4)$$

به طوری که درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}^I}$ و درجه عدم عضویت $\nu_{\tilde{A}^I}$ آن در x به شرح روابط (۱) و (۲) هستند:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} f(x), & a^1 \leq x < a^2, \\ 1, & a^2 \leq x \leq a^3, \\ g(x), & a^3 < x \leq a^4, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} h(x), & b^1 \leq x < b^2, \\ 0, & b^2 \leq x \leq b^3, \\ k(x), & b^3 < x \leq b^4, \\ 1, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲)$$

که در آن f, k توابع صعودی و g, h توابع نزولی هستند.

² Triangular Intuitionistic Fuzzy Number

¹ Intuitionistic Fuzzy Numbe

$$EV(\tilde{A}^I) = \frac{a^1 + a^1 + 4a^2 + a^3 + a^3}{8} \quad (۹)$$

گزاره ۲: ارزش مورد انتظار یک رابطه خطی است، یعنی برای هر دو عدد فازی شهودی \tilde{A}^I, \tilde{B}^I رابطه (۱۰) برقرار است:

$$EV(\tilde{A}^I + \tilde{B}^I) = EV(\tilde{A}^I) + EV(\tilde{B}^I) \quad (۱۰)$$

۴-۱-۲. مدل اندازه‌گیری کارایی مبتنی بر

متغیر کمکی

بیشتر مدل‌های مطرح شده تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، از نوع شعاعی CCR یا BCC می‌باشند، بدین معنی که تغییر در ورودی‌ها و خروجی‌ها به یک نسبت صورت می‌پذیرد. در بیشتر مدل‌های دو مرحله‌ای نخست کارایی هر یک از قسمت‌ها محاسبه می‌گردد و سپس مقدار کارایی کل به دست می‌آید. کارایی کل همواره مقداری بین صفر و یک دارد.

استفاده از مدل‌های اندازه‌گیری مبتنی بر متغیرهای کمکی شبکه‌ای در چند سال اخیر به دلایل زیادی از جمله قابلیت‌های بسیار بالا در حوزه‌ی کاربردی، در مواردی که تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌ها به یک نسبت نمی‌باشد، مورد استفاده قرار گرفته است. تون و تسوتسوی [۱۸] مدلی مبتنی بر متغیرهای کمکی برای ساختارهای شبکه‌ای متوالی ارائه کردند. این مدل به صورت مدل (۱۱)، یک مدل خروجی محور برای ساختارهای دو مرحله‌ای را نشان می‌دهد. برای ساختن مدل فرض می‌شود که n واحد تصمیم‌گیرنده ($j = 1, \dots, n$) با ساختار دو مرحله‌ای موجود است. شکل ۱ نمونه‌ای از یک مدل دو مرحله‌ای را به نمایش می‌گذارد و جدول ۱، متغیرهای مدل (۱۱) را نشان می‌دهد. بر اساس داده‌های جدول ۱، با تعداد I ورودی و H خروجی

$$(i) \tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3; a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3) \\ (ii) \tilde{A}^I \otimes \tilde{B}^I \approx$$

$$(a^1 b^1, a^2 b^2, a^3 b^3; a^1 b^1, a^2 b^2, a^3 b^3) \quad (۵)$$

$$(iii) \forall k \in R; k \tilde{A}^I = \begin{cases} (ka^1, ka^2, ka^3; ka^1, ka^2, ka^3), & k > 0 \\ (ka^3, ka^2, ka^1; ka^3, ka^2, ka^1), & k < 0 \end{cases}$$

تعریف ۴: [۱۸] فرض کنید که

$$\tilde{A}^I = (a^1, a^2, a^3, a^4; b^1, b^2, b^3, b^4)$$

فازی شهودی باشد. آنگاه بازه مورد انتظار $^1(EI)$ آن بصورت رابطه (۶) تعریف و محاسبه می‌شود:

$$EI(\tilde{A}^I) = [E_L(\tilde{A}^I), E_R(\tilde{A}^I)] \quad (۶)$$

که در آن:

$$E_L(\tilde{A}^I) = \frac{b^1 + a^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{b^1} \int h(x) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{a^1} \int f(x) dx$$

$$E_R(\tilde{A}^I) = \frac{a^3 + b^4}{2} + \frac{1}{2} \frac{a^4}{a^3} \int g(x) - \frac{1}{2} \frac{b^4}{b^3} \int k(x) dx$$

همچنین ارزش مورد انتظار $^2(EV)$ بر اساس عدد فازی شهودی برابر است با:

$$EV(\tilde{A}^I) = \frac{(E_L(\tilde{A}^I) + E_R(\tilde{A}^I))}{2} \quad (۷)$$

گزاره ۱: فرض کنید که \tilde{A}^I یک عدد فازی شهودی مثلثی به صورت، $\tilde{A}^I = (a^1, a^2, a^3; a^1, a^2, a^3)$ باشد، آنگاه $EI(\tilde{A}^I)$ برابر است با:

$$EI(\tilde{A}^I) = \left[\frac{a^1 + 2a^2 + a^1}{4}, \frac{a^3 + 2a^2 + a^3}{4} \right] \quad (۸)$$

در ضمن ارزش مورد انتظار برای عدد فازی شهودی مثلثی \tilde{A}^I برابر است با:

¹ Expected Interval

² Expected Value

$$\theta = \text{Max } w_1 \left[1 + \frac{1}{H} \left(\sum_{h=1}^H \frac{s_{1h}^+}{l_{h0}} \right) \right] + w_2 \left[1 + \frac{1}{R} \left(\sum_{r=1}^R \frac{s_{2r}^+}{y_{r0}} \right) \right] \quad (11)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} x_{ij} + s_{1i}^- = x_{i0}, \quad i=1, \dots, I$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} l_{hj} - s_{1h}^+ = l_{h0}, \quad h=1, \dots, H$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} z_{dj} = \sum_{d=1}^D \lambda_{2j} z_{dj}, \quad d=1, \dots, D$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j} e_{fj} + s_{2f}^- = e_{f0}, \quad f=1, \dots, F$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j} y_{rj} - s_{2r}^+ = y_{r0}, \quad r=1, \dots, R$$

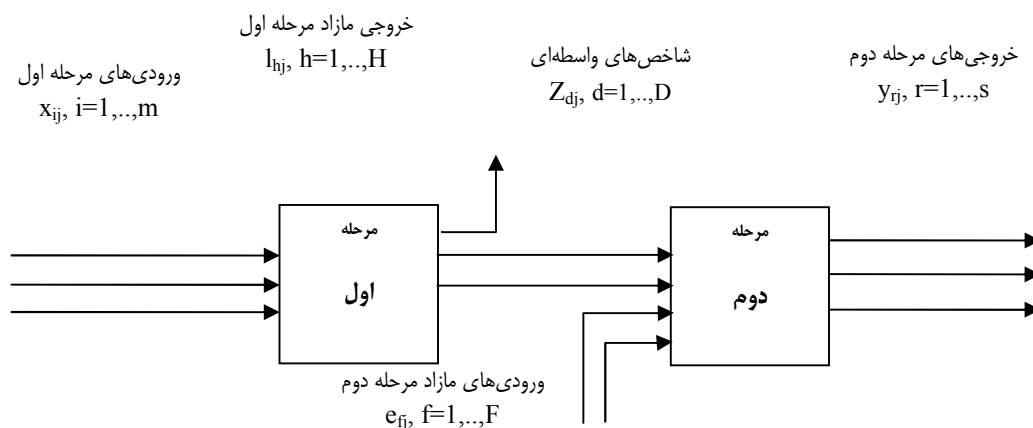
$$\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, s_{1i}^-, s_{1h}^+, s_{2f}^-, s_{2r}^+ \geq 0, \quad \forall j, i, h, f, r$$

مازاد مرحله اول و تعداد F ورودی مازاد و R خروجی مرحله دوم، بردارهای $s^- \in \mathfrak{R}^H, s^+ \in \mathfrak{R}^I$ به طور جداگانه، به ترتیب مازاد ورودی و کمبود خروجی مرحله اول را نشان می‌دهند و به همین منوال $s^- \in \mathfrak{R}^R, s^+ \in \mathfrak{R}^F$ به طور جداگانه، به ترتیب مازاد ورودی و کمبود خروجی مرحله دوم را نشان می‌دهند.

از آنجا که خروجی‌های مرحله اول یعنی $Z_{dj} (d=1, \dots, D)$ و ورودی‌های مرحله دوم می‌باشند،

قید $\sum_{d=1}^D \lambda_{1j} z_{dj} = \sum_{d=1}^D \lambda_{2j} z_{dj}$ در مدل (۱۱) ارتباط

دو مرحله را تضمین می‌کند.



شکل ۱: نمونه‌ای از مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای

جدول ۱: متغیرهای مدل خروجی محور با ساختار دو مرحله‌ای

متغیر	شرح
x_{ij}	ورودی i ام ($i = 1, \dots, I$) مرحله اول، واحد j ام ($j = 1, \dots, n$)
l_{hj}	خروجی مازاد h ام ($h = 1, \dots, H$) مرحله اول، واحد j ام ($j = 1, \dots, n$)
z_{dj}	متغیر میانی d ام ($d = 1, \dots, D$) مرحله اول، واحد j ام ($j = 1, \dots, n$)
e_{fj}	ورودی مازاد f ام ($f = 1, \dots, F$) مرحله دوم، واحد j ام ($j = 1, \dots, n$)
y_{rj}	خروجی r ام ($r = 1, \dots, R$) مرحله دوم، واحد j ام ($j = 1, \dots, n$)

مدل (۱۱) به صورت اعداد فازی شهودی باشند، آنگاه این مدل به صورت مدل (۱۲) بازنویسی می‌شود.

$$\text{Max } w_1 \left[1 + \frac{\bar{l}^I}{H} \left(\sum_{h=1}^H \frac{\bar{s}_{1h}^{I+}}{\bar{l}_{h0}^I} \right) \right] \oplus w_2 \left[1 + \frac{\bar{l}^I}{R} \left(\sum_{r=1}^R \frac{\bar{s}_{2r}^{I+}}{\bar{y}_{r0}^I} \right) \right] \quad (12)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{1j}^I \bar{x}_{ij}^I \ominus \bar{s}_{1i}^{I-} = \bar{x}_{i0}^I, \quad i=1, \dots, I$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{1j}^I \bar{l}_{hj}^I \ominus \bar{s}_{1h}^{I+} = \bar{l}_{h0}^I, \quad h=1, \dots, H$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{1j}^I \bar{z}_{dj}^I = \sum_{d=1}^D \bar{\lambda}_{2j}^I \bar{z}_{dj}^I, \quad d=1, \dots, D$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{2j}^I \bar{e}_{fj}^I \ominus \bar{s}_{2f}^{I-} = \bar{e}_{f0}^I, \quad f=1, \dots, F$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{2j}^I \bar{y}_{rj}^I \ominus \bar{s}_{2r}^{I+} = \bar{y}_{r0}^I, \quad r=1, \dots, R$$

$$\bar{\lambda}_{1j}^I, \bar{\lambda}_{2j}^I, \bar{s}_{1i}^{I-}, \bar{s}_{1h}^{I+}, \bar{s}_{2f}^{I-}, \bar{s}_{2r}^{I+} > \bar{0}^I, \quad \forall j, i, h, f, r$$

به طوری که در مدل اخیر $\bar{0}^I$ عدد فازی شهودی صفر است، یعنی:

$$\bar{0}^I = (0,0,0,0; 0,0,0,0)$$

در ادامه با معرفی و جایگزینی اعداد فازی شهودی مثلثی به جای متغیرها و ضرایب فازی شهودی مدل (۱۲) و روش ارائه شده در مقاله پوری و یاداو [۴۰]، مدل (۱۳) بدست می‌آید.

$$\text{Max } w_1 \left[1 + \frac{(1,1,1,1,1,1)}{H} \sum_{h=1}^H \left(\frac{\left(\bar{s}_{1h}^{I+}, \bar{s}_{1h}^{2+}, \bar{s}_{1h}^{3+}, \bar{s}_{1h}^{I+}, \bar{s}_{1h}^{2+}, \bar{s}_{1h}^{3+} \right)}{\left(\bar{l}_{h0}^I, \bar{l}_{h0}^{I^2}, \bar{l}_{h0}^{I^3}, \bar{l}_{h0}^{I^I}, \bar{l}_{h0}^{I^2}, \bar{l}_{h0}^{I^3} \right)} \right) \right] \oplus w_2 \left[1 + \frac{(1,1,1,1,1,1)}{R} \sum_{r=1}^R \left(\frac{\left(\bar{s}_{2r}^{I+}, \bar{s}_{2r}^{2+}, \bar{s}_{2r}^{3+}, \bar{s}_{2r}^{I+}, \bar{s}_{2r}^{2+}, \bar{s}_{2r}^{3+} \right)}{\left(\bar{y}_{r0}^I, \bar{y}_{r0}^{I^2}, \bar{y}_{r0}^{I^3}, \bar{y}_{r0}^{I^I}, \bar{y}_{r0}^{I^2}, \bar{y}_{r0}^{I^3} \right)} \right) \right]$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_{1j}^I, \bar{\lambda}_{1j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^3}; \bar{\lambda}_{1j}^{I^I}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^3}) \otimes (x_{ij}^1, x_{ij}^2, x_{ij}^3; x_{ij}^{I^I}, x_{ij}^{I^2}, x_{ij}^{I^3}) =$$

$$(x_{i0}^1, x_{i0}^2, x_{i0}^3; x_{i0}^{I^I}, x_{i0}^{I^2}, x_{i0}^{I^3}) \ominus (\bar{s}_{1i}^{I-}, \bar{s}_{1i}^{2-}, \bar{s}_{1i}^{3-}; \bar{s}_{1i}^{I-}, \bar{s}_{1i}^{2-}, \bar{s}_{1i}^{3-}), \quad i=1, \dots, I$$

$$\sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_{1j}^I, \bar{\lambda}_{1j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^3}; \bar{\lambda}_{1j}^{I^I}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^3}) \otimes (l_{hj}^1, l_{hj}^2, l_{hj}^3; l_{hj}^{I^I}, l_{hj}^{I^2}, l_{hj}^{I^3}) =$$

$$(l_{h0}^1, l_{h0}^2, l_{h0}^3; l_{h0}^{I^I}, l_{h0}^{I^2}, l_{h0}^{I^3}) \oplus (\bar{s}_{1h}^{I+}, \bar{s}_{1h}^{2+}, \bar{s}_{1h}^{3+}; \bar{s}_{1h}^{I+}, \bar{s}_{1h}^{2+}, \bar{s}_{1h}^{3+}), \quad h=1, \dots, H$$

$$\sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_{1j}^I, \bar{\lambda}_{1j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^3}; \bar{\lambda}_{1j}^{I^I}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{1j}^{I^3}) \otimes (z_{dj}^1, z_{dj}^2, z_{dj}^3; z_{dj}^{I^I}, z_{dj}^{I^2}, z_{dj}^{I^3}) =$$

$$\sum_{j=1}^n (\bar{\lambda}_{2j}^I, \bar{\lambda}_{2j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{2j}^{I^3}; \bar{\lambda}_{2j}^{I^I}, \bar{\lambda}_{2j}^{I^2}, \bar{\lambda}_{2j}^{I^3}) \otimes (z_{dj}^1, z_{dj}^2, z_{dj}^3; z_{dj}^{I^I}, z_{dj}^{I^2}, z_{dj}^{I^3}), \quad d=1, \dots, D$$

w_1 و w_2 که بین صفر تا یک هستند، به ترتیب وزن هر یک از مراحل است که مجموع آنها برابر با یک است. تابع هدف میانگین حسابی موزون کارایی دو مرحله است. قسمت اول تابع هدف، کارایی مرحله ۱ و قسمت دوم کارایی مرحله ۲ را نشان می‌دهد. این مدل بازده به مقیاس ثابت است.

نکته ۱: در مدل (۱۱)، کارایی مرحله اول و دوم به ترتیب به صورت زیر است:

$$\theta_2^* = w_2 \left[1 + \frac{1}{R} \left(\sum_{r=1}^R \frac{\bar{s}_{2r}^{I+}}{\bar{y}_{r0}^I} \right) \right] \quad \text{و} \quad \theta_1^* = w_1 \left[1 + \frac{1}{H} \left(\sum_{h=1}^H \frac{\bar{s}_{1h}^{I+}}{\bar{l}_{h0}^I} \right) \right]$$

برای محاسبه کارایی کل از فرمول میانگین هارمونیک وزن‌دار (وزنی) برای n داده x_i با وزن‌های w_i به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\mu_H = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}$$

در این مدل فرض شده است که: $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ و داده‌ها برابر است با θ_1^* و θ_2^* . لذا، کارایی کل با میانگین هارمونیک وزنی دو کارایی مرحله اول و دوم با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta^* = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\theta_1^*} + \frac{1}{\theta_2^*} \right)}$$

گزاره ۳: [۱۸] یک واحد تصمیم‌گیری کارایی کل دارد اگر و تنها اگر در هر دو مرحله کارا باشد.

۳. توسعه مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای در محیط فازی شهودی
همان‌طور که اشاره شد، هدف تحقیق حاضر توسعه مدل تحلیل پوششی داده‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی شبکه‌ای تون و تسوتسوی [۱۸] در محیط فازی شهودی است. در صورتی که متغیرها و ضرایب

همان طور که از ضرایب مدل (۱۴) مشاهده می‌شود، این مدل به صورت اعداد فازی شهودی (با ۶ مولفه) نشان داده شده است. برای تبدیل مدل مذکور به یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی از ارزش مورد انتظار اعداد فازی شهودی استفاده می‌گردد. لذا با گرفتن ارزش مورد انتظار از تابع هدف و قیود مدل (۱۴)، مدل (۱۵) به شرح ذیل بدست خواهد آمد.

$$Max EV \left(w_1 \left[1 + \frac{(1,1,1,1,1)}{H} \sum_{h=1}^H \left(\frac{s_{1h}^{1+} s_{1h}^{2+} s_{1h}^{3+}}{l_{1h}^3 l_{1h}^2 l_{1h}^1} ; \frac{s_{1h}^{1+} s_{1h}^{2+} s_{1h}^{3+}}{r_{1h}^3 r_{1h}^2 r_{1h}^1} \right) \right] + w_2 \left[1 + \frac{(1,1,1,1,1)}{R} \sum_{r=1}^R \left(\frac{s_{2r}^{1+} s_{2r}^{2+} s_{2r}^{3+}}{y_{2r}^3 y_{2r}^2 y_{2r}^1} ; \frac{s_{2r}^{1+} s_{2r}^{2+} s_{2r}^{3+}}{y_{2r}^3 y_{2r}^2 y_{2r}^1} \right) \right] \right)$$

s.t.

$$EV \left(\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 x_{ij}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 x_{ij}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 x_{ij}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 x_{ij}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 x_{ij}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 x_{ij}^3 \end{matrix} \right) \right) = EV \left(\left(\begin{matrix} x_{i0}^1 - s_{i0}^3, x_{i0}^2 - s_{i0}^2, x_{i0}^3 - s_{i0}^1 \\ x_{i0}^1 - s_{i0}^3, x_{i0}^2 - s_{i0}^2, x_{i0}^3 - s_{i0}^1 \end{matrix} \right) \right)$$

$$EV \left(\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 l_{hj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 l_{hj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 l_{hj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 l_{hj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 l_{hj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 l_{hj}^3 \end{matrix} \right) \right) = EV \left(\left(\begin{matrix} l_{h0}^1 + s_{1h}^1 + l_{h0}^2 + s_{1h}^2 + l_{h0}^3 + s_{1h}^3 \\ l_{h0}^1 + s_{1h}^1 + l_{h0}^2 + s_{1h}^2 + l_{h0}^3 + s_{1h}^3 \end{matrix} \right) \right)$$

$$EV \left(\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 z_{dj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 z_{dj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 z_{dj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 z_{dj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 z_{dj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 z_{dj}^3 \end{matrix} \right) \right) = EV \left(\left(\begin{matrix} z_{d0}^1 - s_{1d}^1, z_{d0}^2 - s_{1d}^2, z_{d0}^3 - s_{1d}^3 \\ z_{d0}^1 - s_{1d}^1, z_{d0}^2 - s_{1d}^2, z_{d0}^3 - s_{1d}^3 \end{matrix} \right) \right)$$

$$EV \left(\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 e_{fj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 e_{fj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 e_{fj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 e_{fj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 e_{fj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 e_{fj}^3 \end{matrix} \right) \right) = EV \left(\left(\begin{matrix} e_{f0}^1 - s_{2f}^1, e_{f0}^2 - s_{2f}^2, e_{f0}^3 - s_{2f}^3 \\ e_{f0}^1 - s_{2f}^1, e_{f0}^2 - s_{2f}^2, e_{f0}^3 - s_{2f}^3 \end{matrix} \right) \right)$$

$$EV \left(\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 y_{rj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_{rj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 y_{rj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 y_{rj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_{rj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 y_{rj}^3 \end{matrix} \right) \right) = EV \left(\left(\begin{matrix} y_{r0}^1 - s_{2r}^1, y_{r0}^2 - s_{2r}^2, y_{r0}^3 - s_{2r}^3 \\ y_{r0}^1 - s_{2r}^1, y_{r0}^2 - s_{2r}^2, y_{r0}^3 - s_{2r}^3 \end{matrix} \right) \right)$$

$$\lambda_{2j}^3 \geq \lambda_{2j}^2 \geq \lambda_{2j}^1 \geq \lambda_{2j}^0, \quad d=1, \dots, D$$

$$s_{1i}^3 - s_{1i}^2 \geq s_{1i}^2 - s_{1i}^1 \geq s_{1i}^1 - s_{1i}^0 > 0, \quad i=1, \dots, I$$

$$s_{1h}^3 + s_{1h}^2 \geq s_{1h}^2 + s_{1h}^1 \geq s_{1h}^1 + s_{1h}^0 > 0, \quad h=1, \dots, H$$

$$s_{2f}^3 - s_{2f}^2 \geq s_{2f}^2 - s_{2f}^1 \geq s_{2f}^1 - s_{2f}^0 > 0, \quad f=1, \dots, F$$

$$s_{2r}^3 + s_{2r}^2 \geq s_{2r}^2 + s_{2r}^1 \geq s_{2r}^1 + s_{2r}^0 > 0, \quad r=1, \dots, R$$

(۱۵)

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_{2j}^1, \lambda_{2j}^2, \lambda_{2j}^3) \otimes (e_{fj}^1, e_{fj}^2, e_{fj}^3) = \left(e_{f0}^1, e_{f0}^2, e_{f0}^3 \right) \otimes (s_{2f}^1, s_{2f}^2, s_{2f}^3), \quad f=1, \dots, F$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_{rj}^1, \lambda_{rj}^2, \lambda_{rj}^3) \otimes (y_{rj}^1, y_{rj}^2, y_{rj}^3) = \left(y_{r0}^1, y_{r0}^2, y_{r0}^3 \right) \otimes (s_{2r}^1, s_{2r}^2, s_{2r}^3), \quad r=1, \dots, R$$

$$(\lambda_{2j}^1, \lambda_{2j}^2, \lambda_{2j}^3) > 0, \quad d=1, \dots, D$$

$$(s_{1i}^1, s_{1i}^2, s_{1i}^3) > 0, \quad i=1, \dots, I$$

$$(s_{1h}^1, s_{1h}^2, s_{1h}^3) > 0, \quad h=1, \dots, H$$

$$(s_{2f}^1, s_{2f}^2, s_{2f}^3) > 0, \quad f=1, \dots, F$$

$$(s_{2r}^1, s_{2r}^2, s_{2r}^3) > 0, \quad r=1, \dots, R$$

(۱۳)

حال براساس عملگرهای حسابی مربوط اعداد فازی

شهودی مثلی در روابط (۵)، مدل (۱۳) به صورت

مدل (۱۴) بازنویسی خواهد شد.

$$Max w_1 \left[1 + \frac{(1,1,1,1,1)}{H} \sum_{h=1}^H \left(\frac{s_{1h}^{1+} s_{1h}^{2+} s_{1h}^{3+}}{l_{1h}^3 l_{1h}^2 l_{1h}^1} ; \frac{s_{1h}^{1+} s_{1h}^{2+} s_{1h}^{3+}}{r_{1h}^3 r_{1h}^2 r_{1h}^1} \right) \right] + w_2 \left[1 + \frac{(1,1,1,1,1)}{R} \sum_{r=1}^R \left(\frac{s_{2r}^{1+} s_{2r}^{2+} s_{2r}^{3+}}{y_{2r}^3 y_{2r}^2 y_{2r}^1} ; \frac{s_{2r}^{1+} s_{2r}^{2+} s_{2r}^{3+}}{y_{2r}^3 y_{2r}^2 y_{2r}^1} \right) \right]$$

s.t.

$$\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 x_{ij}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 x_{ij}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 x_{ij}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 x_{ij}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 x_{ij}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 x_{ij}^3 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} x_{i0}^1 - s_{i0}^3, x_{i0}^2 - s_{i0}^2, x_{i0}^3 - s_{i0}^1 \\ x_{i0}^1 - s_{i0}^3, x_{i0}^2 - s_{i0}^2, x_{i0}^3 - s_{i0}^1 \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 l_{hj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 l_{hj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 l_{hj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 l_{hj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 l_{hj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 l_{hj}^3 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} l_{h0}^1 + s_{1h}^1 + l_{h0}^2 + s_{1h}^2 + l_{h0}^3 + s_{1h}^3 \\ l_{h0}^1 + s_{1h}^1 + l_{h0}^2 + s_{1h}^2 + l_{h0}^3 + s_{1h}^3 \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 z_{dj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 z_{dj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 z_{dj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 z_{dj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 z_{dj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 z_{dj}^3 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} z_{d0}^1 - s_{1d}^1, z_{d0}^2 - s_{1d}^2, z_{d0}^3 - s_{1d}^3 \\ z_{d0}^1 - s_{1d}^1, z_{d0}^2 - s_{1d}^2, z_{d0}^3 - s_{1d}^3 \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 e_{fj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 e_{fj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 e_{fj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 e_{fj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 e_{fj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 e_{fj}^3 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} e_{f0}^1 - s_{2f}^1, e_{f0}^2 - s_{2f}^2, e_{f0}^3 - s_{2f}^3 \\ e_{f0}^1 - s_{2f}^1, e_{f0}^2 - s_{2f}^2, e_{f0}^3 - s_{2f}^3 \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 y_{rj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_{rj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 y_{rj}^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 y_{rj}^1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_{rj}^2, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 y_{rj}^3 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} y_{r0}^1 - s_{2r}^1, y_{r0}^2 - s_{2r}^2, y_{r0}^3 - s_{2r}^3 \\ y_{r0}^1 - s_{2r}^1, y_{r0}^2 - s_{2r}^2, y_{r0}^3 - s_{2r}^3 \end{matrix} \right)$$

$$\lambda_{2j}^3 \geq \lambda_{2j}^2 \geq \lambda_{2j}^1 \geq \lambda_{2j}^0, \quad d=1, \dots, D$$

$$s_{1i}^3 - s_{1i}^2 \geq s_{1i}^2 - s_{1i}^1 \geq s_{1i}^1 - s_{1i}^0 > 0, \quad i=1, \dots, I$$

$$s_{1h}^3 + s_{1h}^2 \geq s_{1h}^2 + s_{1h}^1 \geq s_{1h}^1 + s_{1h}^0 > 0, \quad h=1, \dots, H$$

$$s_{2f}^3 - s_{2f}^2 \geq s_{2f}^2 - s_{2f}^1 \geq s_{2f}^1 - s_{2f}^0 > 0, \quad f=1, \dots, F$$

$$s_{2r}^3 + s_{2r}^2 \geq s_{2r}^2 + s_{2r}^1 \geq s_{2r}^1 + s_{2r}^0 > 0, \quad r=1, \dots, R$$

(۱۴)

یکی از مشکلات اساسی در ارزیابی عملکرد سازمان‌ها اطمینان حاصل کردن از نتایج است، لذا به همین منظور در تحقیق حاضر بعد از طراحی مدل (۱۶) بر اساس متغیرهایی با ماهیت فازی شهودی، جهت اطمینان از اثر بخشی این مدل، در بخش ۴ به حل مدل (۱۶) با استفاده از نرم افزار لینگو در قالب یک مثال عددی پرداخته می‌شود.

۴. مثال عددی

در این بخش به حل و بررسی مدل پیشنهادی تحقیق در قالب یک مثال عددی پرداخته می‌شود. در این مثال ۱۲ واحد تصمیم‌گیری در نظر گرفته شده است، که دارای ۳ ورودی و ۱ خروجی مازاد در مرحله اول، ۲ میانی و ۲ ورودی مازاد و ۳ خروجی در مرحله دوم می‌باشند. مدل کلی این واحدهای تصمیم‌گیری مطابق شکل ۱ است.

داده‌های فازی شهودی مثلثی مرتبط با مثال مذکور در جدول‌های ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ نشان داده شده است. با حل مدل (۱۶) به ازای $n=12$ واحد تصمیم‌گیرنده، $I=3$ ورودی مرحله اول، $H=1$ خروجی مازاد مرحله اول، $D=2$ متغیر میانی، $F=2$ ورودی مازاد مرحله دوم و $R=3$ خروجی مرحله دوم با داده‌های جداول ۲ تا ۶ و با نرم‌افزار لینگو، مقادیر کارایی مراحل اول و دوم و کارایی کل و متغیرهای کمکی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از نکته ۱ به شرح جدول ۷ تعیین گردید.

در ادامه بر اساس رابطه (۹) برای محاسبه مقدار ارزش مورد انتظار اعداد فازی شهودی مثلثی و گزاره ۲، مدل (۱۵) به مدل برنامه‌ریزی خطی (۱۶) بازنویسی می‌گردد.

$$Max \frac{1}{8} \left[w_1 \left[\frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \left(\frac{s_{1h}^+}{l_{1h}^+} + \frac{s_{1h}^+}{l_{1h}^+} + 4 \frac{s_{1h}^{2+}}{l_{1h}^{2+}} + \frac{s_{1h}^{3+}}{l_{1h}^{3+}} + \frac{s_{1h}^{3+}}{l_{1h}^{3+}} \right) \right] + w_2 \left[\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left(\frac{s_{2r}^+}{y_{2r}^+} + \frac{s_{2r}^+}{y_{2r}^+} + 4 \frac{s_{2r}^{2+}}{y_{2r}^{2+}} + \frac{s_{2r}^{3+}}{y_{2r}^{3+}} + \frac{s_{2r}^{3+}}{y_{2r}^{3+}} \right) \right] \right]$$

st.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^+ x_{ij}^+ + \lambda_{ij}^+ x_{ij}^+ + 4 \lambda_{ij}^{2+} x_{ij}^{2+} + \lambda_{ij}^{3+} x_{ij}^{3+} + \lambda_{ij}^{3+} x_{ij}^{3+} \right) = \\ & \frac{1}{8} \left[x_{i0}^+ + x_{i0}^+ + 4 x_{i0}^{2+} + x_{i0}^{3+} + x_{i0}^{3+} \right] - \left(s_{1i}^+ + s_{1i}^+ + 4 s_{1i}^{2+} + s_{1i}^{3+} + s_{1i}^{3+} \right), \quad i=1..I \\ & \frac{1}{8} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{hj}^+ h_{hj}^+ + \lambda_{hj}^+ h_{hj}^+ + 4 \lambda_{hj}^{2+} h_{hj}^{2+} + \lambda_{hj}^{3+} h_{hj}^{3+} + \lambda_{hj}^{3+} h_{hj}^{3+} \right) = \\ & \frac{1}{8} \left[h_{h0}^+ + h_{h0}^+ + 4 h_{h0}^{2+} + h_{h0}^{3+} + h_{h0}^{3+} \right] + \left(s_{1h}^+ + s_{1h}^+ + 4 s_{1h}^{2+} + s_{1h}^{3+} + s_{1h}^{3+} \right), \quad h=1..H \\ & \frac{1}{8} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{dj}^+ d_{dj}^+ + \lambda_{dj}^+ d_{dj}^+ + 4 \lambda_{dj}^{2+} d_{dj}^{2+} + \lambda_{dj}^{3+} d_{dj}^{3+} + \lambda_{dj}^{3+} d_{dj}^{3+} \right) = \\ & \frac{1}{8} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{2dj}^+ d_{2dj}^+ + \lambda_{2dj}^+ d_{2dj}^+ + 4 \lambda_{2dj}^{2+} d_{2dj}^{2+} + \lambda_{2dj}^{3+} d_{2dj}^{3+} + \lambda_{2dj}^{3+} d_{2dj}^{3+} \right), \quad d=1..D \\ & \frac{1}{8} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{fj}^+ f_{fj}^+ + \lambda_{fj}^+ f_{fj}^+ + 4 \lambda_{fj}^{2+} f_{fj}^{2+} + \lambda_{fj}^{3+} f_{fj}^{3+} + \lambda_{fj}^{3+} f_{fj}^{3+} \right) = \\ & \frac{1}{8} \left[f_{f0}^+ + f_{f0}^+ + 4 f_{f0}^{2+} + f_{f0}^{3+} + f_{f0}^{3+} \right] - \left(s_{1f}^+ + s_{1f}^+ + 4 s_{1f}^{2+} + s_{1f}^{3+} + s_{1f}^{3+} \right), \quad f=1..F \\ & \frac{1}{8} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^+ r_{rj}^+ + \lambda_{rj}^+ r_{rj}^+ + 4 \lambda_{rj}^{2+} r_{rj}^{2+} + \lambda_{rj}^{3+} r_{rj}^{3+} + \lambda_{rj}^{3+} r_{rj}^{3+} \right) = \\ & \frac{1}{8} \left[r_{r0}^+ + r_{r0}^+ + 4 r_{r0}^{2+} + r_{r0}^{3+} + r_{r0}^{3+} \right] + \left(s_{1r}^+ + s_{1r}^+ + 4 s_{1r}^{2+} + s_{1r}^{3+} + s_{1r}^{3+} \right), \quad r=1..R \\ & \lambda_{2j}^+ \geq \lambda_{2j}^+ \geq \lambda_{2j}^+ \geq \lambda_{2j}^+ > 0, \quad d=1..D \\ & s_{1i}^+ \geq s_{1i}^+ \geq s_{1i}^+ \geq s_{1i}^+ > 0, \quad i=1..I \\ & s_{1h}^+ \geq s_{1h}^+ \geq s_{1h}^+ \geq s_{1h}^+ > 0, \quad h=1..H \\ & s_{1f}^+ \geq s_{1f}^+ \geq s_{1f}^+ \geq s_{1f}^+ > 0, \quad f=1..F \\ & s_{1r}^+ \geq s_{1r}^+ \geq s_{1r}^+ \geq s_{1r}^+ > 0, \quad r=1..R \end{aligned} \quad (16)$$

جدول ۲: داده‌های ورودی فازي شهودي مثلثي مرحله اول براي ۱۲ واحد تصميم گیرنده

Dmus	Input1	Input2	Input3
1	(6, 6.5, 7; 5.5, 6.5, 8)	(4.87, 5.37, 5.87; 4.37, 5.37, 6.87)	(5.6, 6.1, 6.6; 5.1, 6.1, 7.6)
2	(5.33, 5.83, 6.33; 4.83, 5.83, .33)	(4.88, 5.38, 5.88; 4.38, 5.38, 6.88)	(3.94, 4.44, 4.94; 3.44, 4.44, 5.94)
3	(5.31, 5.81, 6.31; 4.81, 5.81, .31)	(4.79, 5.29, 5.79; 4.29, 5.29, 6.79)	(5.37, 5.87, 6.37; 4.87, 5.87, 7.37)
4	(5.5, 6, 6.5; 5, 6, 7.5)	(4.81, 5.31, 5.81; 4.31, 5.31, 6.81)	(5.38, 5.88, 6.38; 4.88, 5.88, 7.38)
5	(4.65, 5.15, 5.65; 4.15, 5.15, 6.65)	(4.23, 4.73, 5.23; 3.73, 4.73, 6.23)	(4.45, 4.95, 5.45; 3.95, 4.95, 6.45)
6	(4.45, 4.95, 5.45; 3.95, 4.95, .45)	(4.51, 5.01, 5.51; 4.01, 5.01, 6.51)	(4.36, 4.86, 5.36; 3.86, 4.86, 6.36)
7	(4.35, 4.85, 5.35; 3.85, 4.85, .35)	(3.71, 4.21, 4.71; 3.21, 4.21, 5.71)	(4.78, 5.28, 5.78; 4.28, 5.28, 6.78)
8	(4.92, 5.42, 5.92; 4.42, 5.42, .92)	(4.14, 4.64, 5.14; 3.64, 4.64, 6.14)	(4.64, 5.14, 5.64; 4.14, 5.14, 6.64)
9	(4.85, 5.35, 5.85; 4.35, 5.35, .85)	(4.14, 4.64, 5.14; 3.64, 4.64, 6.14)	(4.64, 5.14, 5.64; 4.14, 5.14, 6.64)
10	(4.6, 5.1, 5.6; 4.1, 5.1, 6.6)	(4.05, 4.55, 5.05; 3.55, 4.55, 6.05)	(4.63, 5.13, 5.63; 4.13, 5.13, 6.63)
11	(3.48, 3.98, 4.48; 2.98, .98, 5.48)	(3.38, 3.88, 4.38; 2.88, 3.88, 5.38)	(3.71, 4.21, 4.71; 3.21, 4.21, 5.71)
12	(5.31, 5.81, 6.31; 4.81, 5.81, .31)	(4.41, 4.91, 5.41; 3.91, 4.91, 6.41)	(5.43, 5.93, 6.43; 4.93, 5.93, 7.43)

جدول ۳: داده‌های خروجی فازي شهودي مثلثي مرحله اول براي ۱۲ واحد تصميم گیرنده

Dmus	Output1	Dmus	Output1
1	(2.86, 3.46, 4.06; 1.86, 3.46, 5.06)	7	(2.66, 3.26, 3.86; 1.66, 3.26, 4.86)
2	(3.16, 3.76, 4.36; 2.16, 3.76, 5.36)	8	(2.85, 3.45, 4.05; 1.85, 3.45, 5.05)
3	(3.41, 4.01, 4.61; 2.41, 4.01, 5.61)	9	(2.52, 3.12, 3.72; 1.52, 3.12, 4.72)
4	(4.88, 5.48, 6.08; 3.88, 5.48, 7.08)	10	(2.85, 3.45, 4.05; 1.85, 3.45, 5.05)
5	(1.96, 2.56, 3.16; 0.96, 2.56, 4.16)	11	(1.85, 2.45, 3.05; 0.85, 2.45, 4.05)
6	(2.57, 3.17, 3.77; 1.57, 3.17, 4.77)	12	(2.62, 3.22, 3.82; 1.62, 3.22, 4.82)

جدول ۴: داده‌های میانی فازي شهودي مثلثي براي ۱۲ واحد تصميم گیرنده

Dmus	Intermediate1	Intermediate2
1	(2.65, 3.05, 3.45; 2.35, 3.05, 4.15)	(5.2, 5.7, 6.2; 4.7, 5.7, 7.2)
2	(2.66, 3.06, 3.46; 2.36, 3.06, 4.16)	(4.68, 5.18, 5.68; 4.18, 5.18, 6.68)
3	(4, 4.4, 4.8; 3.7, 4.4, 5.5)	(4.68, 5.18, 5.68; 4.18, 5.18, 6.68)
4	(4.44, 4.84, 5.24; 4.14, 4.84, 5.94)	(6.05, 6.55, 7.05; 5.55, 6.55, 8.05)
5	(2.05, 2.45, 2.85; 1.75, 2.45, 3.55)	(4.6, 5.1, 5.6; 4.1, 5.1, 6.6)
6	(2.68, 3.08, 3.48; 2.38, 3.08, 4.18)	(4.3, 4.8, 5.3; 3.8, 4.8, 6.3)
7	(2.57, 2.97, 3.37; 2.27, 2.97, 4.07)	(4.36, 4.86, 5.36; 3.86, 4.86, 6.36)
8	(2.92, 3.32, 3.72; 2.62, 3.32, 4.42)	(4.78, 5.28, 5.78; 4.28, 5.28, 6.78)
9	(2.92, 3.32, 3.72; 2.62, 3.32, 4.42)	(5.14, 5.64, 6.14; 4.64, 5.64, 7.14)
10	(2.66, 3.06, 3.46; 2.36, 3.06, 4.16)	(3.96, 4.46, 4.96; 3.46, 4.46, 5.96)
11	(1.42, 1.82, 2.22; 1.12, 1.82, 2.92)	(3.57, 4.07, 4.57; 3.07, 4.07, 5.57)
12	(2, 2.4, 2.8; 1.7, 2.4, 3.5)	(4.75, 5.25, 5.75; 4.25, 5.25, 6.75)

جدول ۵: داده‌های ورودی دوم مرحله فازي شهودي مثلثي براي ۱۲ واحد تصميم گیرنده

Dmus	Input1	Input2
1	(4.77, 5.17, 5.57; 4.47, 5.17, 6.27)	(3.7, 4.2, 4.7; 3.2, 4.2, 5.7)
2	(3.75, 4.15, 4.55; 3.45, 4.15, 5.25)	(3.88, 4.38, 4.88; 3.38, 4.38, 5.88)
3	(4.59, 4.99, 5.39; 4.29, 4.99, 6.09)	(3.75, 4.25, 4.75; 3.25, 4.25, 5.75)
4	(5.08, 5.48, 5.88; 4.78, 5.48, 6.58)	(4.77, 5.27, 5.77; 4.27, 5.27, 6.77)
5	(3.62, 4.02, 4.42; 3.32, 4.02, 5.12)	(2.55, 3.05, 3.55; 2.05, 3.05, 4.55)
6	(4.22, 4.62, 5.02; 3.92, 4.62, 5.72)	(3.59, 4.09, 4.59; 3.09, 4.09, 5.59)
7	(3.64, 4.04, 4.44; 3.34, 4.04, 5.14)	(2.57, 3.07, 3.57; 2.07, 3.07, 4.57)
8	(3.75, 4.15, 4.55; 3.45, 4.15, 5.25)	(3.64, 4.14, 4.64; 3.14, 4.14, 5.64)
9	(3.92, 4.32, 4.72; 3.62, 4.32, 5.42)	(3.21, 3.71, 4.21; 2.71, 3.71, 5.21)
10	(4, 4.4, 4.8; 3.7, 4.4, 5.5)	(3.79, 4.29, 4.79; 3.29, 4.29, 5.79)
11	(3.25, 3.65, 4.05; 2.95, 3.65, 4.75)	(2.92, 3.42, 3.92; 2.42, 3.42, 4.92)
12	(4.43, 4.83, 5.23; 4.13, 4.83, 5.93)	(3.68, 4.18, 4.68; 3.18, 4.18, 5.68)

جدول ۶: داده‌های خروجی فازی شهودی مثلثی مرحله دوم برای ۱۲ واحد تصمیم گیرنده

Dmus	Output1	Output2	Output3
1	(4, 4.5, 5; 3.5, 4.5, 6)	(4.18, 4.68, 5.18; 3.68, 4.68, 6.18)	(3.3, 3.8, 4.3; 2.8, 3.8, 5.3)
2	(3.53, 4.03, 4.53; 3.03, 4.03, 5.53)	(3.88, 4.38, 4.88; 3.38, 4.38, 5.88)	(3.36, 3.86, 4.36; 2.86, 3.86, 5.36)
3	(3.57, 4.07, 4.57; 3.07, 4.07, 5.57)	(3.88, 4.38, 4.88; 3.38, 4.38, 5.88)	(3.49, 3.99, 4.49; 2.99, 3.99, 5.49)
4	(5, 5.5, 6; 4.5, 5.5, 7)	(4.87, 5.37, 5.87; 4.37, 5.37, 6.87)	(4.62, 5.12, 5.62; 4.12, 5.12, 6.62)
5	(3.32, 3.82, 4.32; 2.82, 3.82, 5.32)	(3.03, 3.53, 4.03; 2.53, 3.53, 5.03)	(3.1, 3.6, 4.1; 2.6, 3.6, 5.1)
6	(3.38, 3.88, 4.38; 2.88, 3.88, 5.38)	(3.14, 3.64, 4.14; 2.64, 3.64, 5.14)	(3.39, 3.89, 4.39; 2.89, 3.89, 5.39)
7	(3.27, 3.77, 4.27; 2.77, 3.77, 5.27)	(3.47, 3.97, 4.47; 2.97, 3.97, 5.47)	(3.65, 4.15, 4.65; 3.15, 4.15, 5.65)
8	(4.78, 5.28, 5.78; 4.28, 5.28, 6.78)	(5.1, 5.6, 6.1; 4.6, 5.6, 7.1)	(5.19, 5.69, 6.19; 4.69, 5.69, 7.19)
9	(3.91, 4.41, 4.91; 3.41, 4.41, 5.91)	(3.89, 4.39, 4.89; 3.39, 4.39, 5.89)	(3.7, 4.2, 4.7; 3.2, 4.2, 5.7)
10	(3.78, 4.28, 4.78; 3.28, 4.28, 5.78)	(4.04, 4.54, 5.04; 3.54, 4.54, 6.04)	(3.77, 4.27, 4.77; 3.27, 4.27, 5.77)
11	(3.41, 3.91, 4.41; 2.91, 3.91, 5.41)	(3.45, 3.95, 4.45; 2.95, 3.95, 5.45)	(2.98, 3.48, 3.98; 2.48, 3.48, 4.98)
12	(3.6, 4.1, 4.6; 3.1, 4.1, 5.6)	(3.89, 4.39, 4.89; 3.39, 4.39, 5.89)	(3.9, 4.4, 4.9; 3.4, 4.4, 5.9)

جدول ۷: محاسبه مقادیر کارایی کل و کارایی مرحله اول و دوم

DMU	θ_1^*	θ_2^*	θ^*
1	1.8535	1.2707	0.6401
2	1.1371	1.3867	0.7924
3	1.2912	1.4675	0.7250
4	1.0305	1.1455	0.9191
5	2.0253	1.1388	0.6321
6	1.9491	1.3331	0.6093
7	1.2873	1.0052	0.8724
8	1.3719	1.0000	0.8432
9	1.7752	1.1049	0.6944
10	1.5981	1.2315	0.7068
11	2.5143	1.1047	0.5526
12	1.9915	1.2174	0.6233

هیچ DMU ای کارا نیست و در مرحله دوم فقط DMU واحد هشتم کاراست.

در ادامه همچنین می‌توان بیان کرد که علت نبود کارایی کل در واحدها با توجه به ماهیت فازی شهودی متغیرهای ورودی و مقادیر مازاد ورودی و کمبود خروجی، ضعف واحدها در تبدیل ورودی‌ها به خروجی‌ها می‌باشد. در نتیجه، چنانچه امتیاز کارایی واحدی برابر با یک باشد، واحد مربوطه کارا شناخته خواهد شد. این وضعیت، معادل با صفر بودن مقادیر مازاد ورودی و کمبود خروجی برای این واحد خواهد بود؛ و چنانچه کارایی غیر یک باشد، واحد ناکارا و حداقل یکی از مقادیر متغیرهای کمکی ورودی یا خروجی غیر صفر خواهد بود. در خصوص یکی از بهبودهای مهم در زمینه

قدرت تشخیص نتایج با به کارگیری مدل (۱۶) بهبود قابل ملاحظه ای یافته است. از سوی دیگر کاملاً مشخص می‌باشد که ممکن است هیچ واحد تصمیم‌گیرنده‌ای در همه زمینه‌ها دارای بهترین شیوه کار نباشد.

بنابراین هر واحد اهدافی خواهد داشت که برای رسیدن به آنها فعالیت می‌کند. با توجه به نتایج جدول ۷ و طبق گزاره ۳، در مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر متغیرهای کمکی، زمانی واحدی کارا شناخته می‌شود که مقدار کارایی آن یک باشد. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از متغیر میانی نقش موثر و مثبتی در مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر متغیرهای کمکی ایفا می‌کند. پس در مرحله اول

دانشور [۴۷] در مطالعه خود به ترکیب *DEA* و روش تصمیم‌گیری تاپسیس (*TOPSIS*) فازی شهودی جهت ارزیابی عملکرد پرداخت. اوتای و همکاران [۴۱] در مطالعه خود رویکرد تلفیقی *AHP* و *DEA* در محیط فازی شهودی برای ارزیابی و سنجش عملکرد مراکز درمانی ارائه دادند. اما مطالعه‌ای که اشاره به کاربرد تئوری فازی شهودی در *DEA* دو مرحله‌ای بپردازد، مشاهده نشد. البته از تئوری مجموعه‌های فازی در *DEA* دو مرحله‌ای استفاده شده است. برای نمونه کلیر و یوانگ [۴۸] یک مدل فازی دو مرحله‌ای ارائه دادند. آنها داده‌ها را به عنوان اعداد فازی مثلثی در نظر گرفتند.

هدف این مقاله ارزیابی و بررسی عملکرد شناسایی واحدهایی بود، که عملکرد ضعیفی دارند تا با شناسایی آنها بتوان با برنامه‌ریزی و تلاش مضاعف عملکرد آنها را بهبود بخشید؛ اما مسئله حائز اهمیت در مورد این واحدهای ناکارای دارای عملکرد ضعیف این است که منبع اصلی این ضعف در عملکرد، در کجا قرار دارد و چه عواملی این ناکارایی را به وجود می‌آورند.

در این مقاله با توجه به مدل تون و تسوتسوی [۱۸] مدل جدید تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر متغیرهای کمکی برای ارزیابی داده‌های فازی شهودی ارائه گردید. در واقع مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر اعداد فازی شهودی مثلثی و متغیرهای کمکی، تلفیق مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با مفاهیم فازی شهودی است تا بتواند رابطه‌ای از عملکرد بین کارایی دو مرحله و کارایی سیستم را توصیف کند. سپس با طراحی مدل (۱۶) و با استفاده از مقادیر متغیرهای ورودی و خروجی و میانی میزان کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده، مورد ارزیابی قرار گرفت.

شناسایی ناکارایی، می‌توان به مقاله توفالیس [۴۶] اشاره کرد، هنگامی که ایشان مدل *DEA* را برای محاسبه کارایی چهارده فرودگاه بکار برد، بیش از نیمی از آنها کارا بودند، در حالی که وقتی همان مدل بصورت روش پروفایل^۱ حل شد، هیچ کدام از فرودگاه‌ها از نظر تمام عوامل کاملاً کارا نبودند و این بیانگر بهبود قابل ملاحظه و تشخیص قوی به وسیله مدل وی و همچنین برتری و تفاوت مهم آن با دیگر مدل‌های سنتی *DEA* است. لذا با توجه به روش پروفایل و همچنین مدل ارائه شده در این مقاله، نتیجه می‌شود که هر واحد تصمیم‌گیرنده ممکن است در هر یک از زیر مراحل خود عملکرد قابل قبول داشته باشد، حال آنکه در ساختار کلی، دارای کارایی چشم‌گیری نباشد.

۵. نتیجه‌گیری

بسیاری از محققان روش‌های مختلف فازی را برای مواجهه با داده‌های مبهم و نادقیق در تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد نموده‌اند. در مسائل دنیای واقعی گاهی اوقات به داده‌هایی برخورد می‌شود که مبهم یا ناقص بوده و اندازه‌گیری دقیق آنها ممکن نیست. یکی از راه‌های مفید برای مدل نمودن این داده‌ها استفاده از اعداد فازی یا فازی شهودی است. بر این اساس در مقاله حاضر از تئوری مجموعه‌های فازی شهودی برای طراحی مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای مبتنی بر متغیرهای کمکی استفاده شده است. البته بررسی ادبیات تحقیق حاکی از این است که مطالعات اندکی به استفاده از تئوری مجموعه‌های فازی شهودی در تکنیک *DEA* پرداختند. برای مثال پوری و یاداو [۴۰] در مطالعه خود به ارائه مدل *DEA* مبتنی بر اعداد فازی شهودی جهت ارزیابی کارایی در صنعت بانکداری هند پرداختند.

^۱profiling approach

نتایج نشان داد در مدل جدید، واحدهای تصمیم‌گیرنده لزوماً دارای کارایی یک نیستند؛ زیرا طبق مدل جدید یک سیستم تنها زمانی دارای کارایی یک است که مرحله اول و مرحله دوم همکاری کاملی با یکدیگر داشته باشند و هر دو دارای کارایی یک باشند. همچنین در محاسبه کارایی سیستم، سیستمی که بین مراحل اول و دوم آن همکاری بهتری وجود داشته باشد، نسبت به سیستمی که تنها در یکی از مراحل آن نسبت به مرحله عملکرد خوبی وجود داشته باشد، دارای کارایی بهتر می‌باشد. در تحقیق حاضر از داده‌های فازی شهودی مثلثی جهت توسعه مدل تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شد، پیشنهاد می‌گردد در تحقیقات آتی به توسعه کاربرد سایر اعداد فازی شهودی یا مجموعه‌های فازی شهودی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته شود.

[8] H. Nikfarjam, M. Rostamy-Malkhalifeh, S. Mamizadeh-Chatghayeh, Measuring supply chain efficiency based on a hybrid approach, *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 39 (2015), 141-150.

[9] R. Fare, S. Grosskopf, *Intertemporal production frontiers, dynamic DEA*, Kluwer Academic, In collaboration Boston, (1996).

[10] R. Färe, S. Grosskopf, *Network DEA*, *Socio-Econ. Plan. Sci.*, 34 (2000), 35-49.

[11] H. F. Lewis, T. R. Sexton. *Network DEA: efficiency analysis of organizations with complex internal structure*. *Computers and Operations Research* 2004, 31: 1365-1410.

[12] T. R. Sexton, H. F. Lewis, *Two-stage DEA: An application to major league baseball*, *Journal of Productivity Analysis*, 19 (2003), 227-249.

[13] A. M Prieto, J. L. Zofio, *Network DEA efficiency in input-output models: with an application to OECD countries*, *European journal of operational research*, 178 (2007), 292-304.

[14] K. Tone, *A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis*, *European journal of operational research* 130 (2001), 498-509.

[15] A. Ashrafi, A. Jaafar, L. S Lee, A. Bakar, *Efficiency decomposition for two-process production systems with shared inputs in data envelopment analysis*, *Applied Mathematical Sciences*, 5 (2011), 2593-2602.

[16] M. Rostamy-Malkhalifeh, E. Mollaeian, S. Mamizadeh-Chatghayeh, *A new non-radial network DEA model for*

فهرست منابع

[۱] ج. گرامی، ارائه یک روش دو مرحله ای برای تعیین الگوی مناسب و بازده به مقیاس (مطالعه موردی: دبیرستان‌های دخترانه ناحیه یک شهرستان شیراز)، پژوهش‌های نوین در ریاضی، س. پنجم، ش. هجدهم، (۱۳۹۸)

[۲] س. ه. ناصری، ا. غلامی، ع. ابراهیم نژاد، م. فلاح جلودار، یک رویکرد جدید مبتنی بر آلفا برش‌ها برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی فازی، پژوهش‌های نوین در ریاضی، س. دوم، ش. پنجم، (۱۳۹۵)

[3] R. D. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper, *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*, *Management science*, 30 (1984), 1078-1092.

[4] A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, *European journal of operational research*, 2 (1978), 429-444.

[5] M. J. Farrell, *The measurement of productive efficiency*. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, 120 (1957), 253-281.

[6] A. Barzegarinegad G. R. Jahanshahloo, M. Rostamy-Malkhalifeh, *A full ranking for decision making units using ideal and anti-ideal points in DEA*, *The Scientific World Journal*, 2014 (2014), 1-8.

[7] F. Hosseinzadeh lotfi, M. Navabakhs, A. Tehranian, M. Rostamy-Malkhalifeh, R. Shahverdi, *Ranking bank branches with interval data the application of DEA*, *International Mathematical Forum*, 2 (9), (2007), 429-440.

- necessity and credibility-based approaches, *RAIRO-Operation*, 52 (2018) 1445–1463.
- [26] P. Peykani, E. Mohammadi, M. Rostamy-Malkhalifeh, F. Hosseinzadeh Lotfi, Fuzzy data envelopment analysis approach for ranking of stocks with an application to Tehran stock exchange, *Advances in Mathematical Finance and Applications* 4 (1), (2019), 31-43.
- [27] A. Rahmani, F. Hosseinzadeh lotfi, M. Rostamy-Malkhalifeh, T. Allahviranloo, A new method for defuzzification and ranking of fuzzy numbers based on the statistical beta distribution, *Advances in Fuzzy Systems*, 2016 (2016), 1-8.
- [28] A. Ebrahimnejad, Cost efficiency measures with trapezoidal fuzzy numbers in data envelopment analysis based on ranking functions: application in insurance organization and hospital, *International Journal of Fuzzy System Applications (IJFSA)* 2 (2012), 51-68.
- [29] C. Kao, S. T. Liu, Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis, *Fuzzy sets and systems*, 113 (2000), 427-437.
- [30] P. Guo, H. Tanaka, Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method, *Fuzzy sets and systems*, 119 (2001), 149-160.
- [31] S. Lertworasirikul, S. C. Fang, H. L. Nuttle, J. A. Joines, Fuzzy BCC model for data envelopment analysis, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2 (2003), 337-358.
- [32] S. Saati, A. Memariani, G. R. Jahanshahloo, Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1 (2002), 255-267.
- [33] S. Saati, N. Imani, Classifying evaluating performance supply chain, *Indian Journal of Science and Technology*, 6 (3), (2013), 4188-4192.
- [17] E. Khamseh, Ranking Efficient DMUs in Two-stage Network DEA with Common Weights method, *Journal of New Researches in Mathematics*, 3(2017), 5-18.
- [18] K. Tone, M. Tsutsui, Network DEA: A slacks-based measure approach, *European journal of operational research*, 197 (2009), 243-252.
- [19] K. Tone, M. Tsutsui, Dynamic DEA: A slacks-based measure approach. *Omega* 38 (2010), 145-156.
- [20] K. Tone, M. Tsutsui, Dynamic DEA with network structure. In, *Workshop on DNDEA 2013*, 2013, 1-10.
- [21] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and control* 8 (1965), 338-353.
- [22] M. Tavana, K. Khalili-Damghani, A new two-stage Stackelberg fuzzy data envelopment analysis model, *Measurement*, 53 (2014), 277-296.
- [23] A. Hatami-Marbini, M. Tavana, A. Emrouznejad, Productivity growth and efficiency measurements in fuzzy environments with an application to health care, *International Journal of Fuzzy System Applications(IJFSA)*2(2012),1-35.
- [24] P. Peykani, E. Mohammadi, A. Emrouznejad, M. S Pishvae, M. Rostamy-Malkhalifeh, Fuzzy data envelopment analysis: an adjustable approach, *Expert Systems with Applications*, 136 (2019), 439-452.
- [25] P. Peykani, E. Mohammadi, M. S Pishvae, M. Rostamy-Malkhalifeh, A. Jabbarzadeh, A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility,

- DEA methodology, Knowledge-Based Systems, 133 (2017), 90-106.
- [42] M. E. Dotoli, N. Falagario, M. Sciancalepore, A Cross-Efficiency Fuzzy Data Envelopment Analysis Technique For Performance Evaluation of Decision Making Units Under Uncertainty, Computers & Industrial Engineering, 79 (2015), 103-114.
- [43] S. H. R. Hajiagha, H. Akrami, E. Kazimieras Zavadskas, S. S. Hashemi, An intuitionistic fuzzy data envelopment analysis for efficiency evaluation under uncertainty: case of a finance and credit institution, (2013).
- [44] A. Arya, S. P. Yadav, Development of intuitionistic fuzzy super-efficiency slack based measure with an application to health sector, Computers and Industrial Engineering, 115 (2018), 368-380.
- [45] G. Mahapatra, T. Roy, Reliability evaluation using triangular intuitionistic fuzzy numbers arithmetic operations, World Academy of Science, Engineering and Technology, 50 (2009), 574-581.
- [46] C. Tofallis, Input efficiency profiling: an application to airlines, Computers and Operations Research, 24 (1997), 253-258.
- [47] B. Daneshvar Rouyendegh, The DEA and intuitionistic fuzzy TOPSIS approach to departments performances: a pilot study, Journal of Applied Mathematics (2011).
- [48] G. Klir, B. Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications, Upper Saddle River, (1995).
- Flexible Factors Using Fuzzy Concept, Journal of New Researches in Mathematics, 1(2), (2015), 36-46.
- [34] G. R. Jahanshahloo, M. Sanei, M. Rostamy-Malkhalifeh, H. Saleh, A comment on “A fuzzy DEA/AR approach to the selection of flexible manufacturing systems”, Computers and Industrial Engineering, 56 (4), (2009), 1713-1714
- [35] M. Rostamy-Malkhalifeh, E. Mollaeian, Evaluating performance supply chain by a new non-radial network DEA model with fuzzy data, Journal of Data Envelopment Analysis and Decision, 9 (2012), 1-9.
- [36] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, fuzzy sets and systems, 20 (1), (1986), 87-96.
- [37] E. Szmidt, J. Kacprzyk, Intuitionistic fuzzy sets in group decision making, Notes on IFS, 2 (1996).
- [38] X. Zhang, P. Liu, Method for aggregating triangular fuzzy intuitionistic fuzzy information and its application to decision making, Technological and economic development of economy 16 (2010), 280-290.
- [39] A. Arya, S. P. Yadav, Development of intuitionistic fuzzy data envelopment analysis models and intuitionistic fuzzy input-output targets, Soft Computing, (2018), 1-19.
- [40] J. Puri, S. P. Yadav, Intuitionistic fuzzy data envelopment analysis: An application to the banking sector in India, Expert Systems with Applications, 42 (2015), 4982-4998.
- [41] İ. Otay, B. Oztaysi, S. C. Onar, C. Kahraman, Multi-expert performance evaluation of healthcare institutions using an integrated intuitionistic fuzzy AHP and

