

برآورد پارامترهای فازی از طریق شبکه‌های عصبی فازی با استفاده از داده‌های دوزنقه‌ای

راضیه نادرخانی^۱، محمدحسن بهزادی^۱، طاهره رزاق نیا^{۲*}، رحمان فرنوش^۳

^(۱) گروه آمار، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^(۲) گروه آمار، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^(۳) دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۹

چکیده

رگرسیون فازی یک مدل رگرسیونی تعمیم یافته است، که نشان دهنده ارتباط متغیرهای مستقل و وابسته در محیط فازی می‌باشد. تجزیه و تحلیل رگرسیون خطی فازی تعمیم مدل‌های رگرسیونی است، که با استفاده از تمامی داده‌ها بر اساس یک معیار خاص مناسب می‌باشد. در این مقاله یک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی (انفیس) برای تجزیه و تحلیل و پیش بینی یک تابع رگرسیون فازی غیرپارامتری با ورودی‌های غیرفازی و خروجی‌های فازی دوزنقه‌ای متقارن استفاده می‌شود. بدین منظور، یک الگوریتم جدید هیبریدی پیشنهاد می‌شود که در آن حداقل مربعات فازی و برنامه‌نویسی خطی برای بهینه‌سازی وزن‌های ثانویه مورد استفاده قرار می‌گیرند. الگوریتم‌ها به روش اعتبارسنجی چند لایه برای تأیید اعتبار مدل‌ها اعمال می‌شود. به طور دقیق‌تر، دقت الگوریتم‌ها با شبیه‌سازی‌ها به طور کامل تأیید می‌شود. در نهایت برای بررسی کارایی مدل از دو مثال شبیه‌سازی استفاده شده است، که در آن داده‌ها به صورت اعداد دوزنقه‌ای تعریف شده‌اند و با آموزش آنها و مشخص کردن تعداد قوانین استفاده شده، پارامترهای مجهول برآورد شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: رگرسیون فازی ناپارامتری، اعداد فازی دوزنقه‌ای، سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی (انفیس)، کمترین مربعات خطا.

۱. مقدمه

رگرسیون یک روش بسیار قدرتمند برای تعیین رابطه بین متغیر وابسته و مستقل است. تئوری مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور لطفعلی عسگرزاده [۱] معرفی شد و رگرسیون خطی فازی اولین بار در سال ۱۹۸۲ توسط تاناکا و همکارانش مطرح شد [۲]. آنها مدل‌های رگرسیون خطی با پارامترهای فازی، ورودی غیر فازی و خروجی فازی را به صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی ترسیم کردند. دیاموند [۳] نیز روش کمترین مربع فازی را برای تعیین پارامترهای فازی با تعیین یک متر بین دو عدد فازی پیشنهاد کرد. با این حال بسیاری از مقالات، برای برآورد پارامترها در تحلیل رگرسیون فازی از برنامه‌نویسی خطی [۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹] استفاده می‌کنند. رگرسیون فازی، یک اصطلاح ساده رگرسیون است که برای محاسبه رابطه تابعی بین متغیر وابسته و متغیرهای مستقل در یک محیط فازی استفاده می‌شود. عبارت "مدل رگرسیون خطی" به مواردی اشاره دارد، که در آن توابع عضویت فازی برای توصیف رفتارهای پارامترها به جای توابع توزیع احتمال استفاده می‌شوند. این مفهوم پس از آن توسط محققان دیگر شناخته شد. به عنوان مثال، روش‌های رگرسیون فازی توسط ایشی بوشی [۱۰ و ۱۱]، روش کمترین مربع توسط دیاموند [۳]، چانگ [۱۲]، هان و همکاران، یانگ و همکاران [۱۳، ۱۴] و سایر پژوهشگران [۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹] ارایه شد. همچنین رگرسیون ناپارامتری [۲۰، ۲۱] توسط برخی پژوهشگران [۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸] به روش‌های رگرسیون فازی و شبکه‌های عصبی اضافه شد و مدل‌های ارایه شده، کارایی رگرسیون ناپارامتری را افزایش داد. امروزه استفاده از شبکه‌های عصبی [۲۴] در پیش‌بینی مدل‌های رگرسیونی فازی مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان مثال، ایشی بوشی و تاناکا [۲۹، ۱۰]، چنگ و لی [۳۰، ۳۱] چندین روش

رگرسیون فازی با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشنهاد کردند. در تحقیقات آنها تحلیل رگرسیون فازی بر اساس شبکه‌های عصبی با داده‌های فازی انجام شده است. آنها نشان دادند که منطق فازی به کار گرفته شده کارایی شبکه عصبی را بهبود می‌بخشد و توانایی یادگیری آن را نیز افزایش می‌دهد. کارتاکاپولوس [۳۲] در سال ۱۹۹۶ نشان داد که سیستم‌های عصبی فازی، به عنوان مثال، ادغام شبکه‌های عصبی و منطق فازی، دارای قابلیت‌های بسیار فراتر از هر یک از سیستم‌های جداگانه است.

رزاق‌نیا و همکاران [۳۳، ۳۴] از روش‌های ترکیبی در رگرسیون ناپارامتری با داده‌های فازی مثلثی استفاده نمودند. همچنین، رزاق‌نیا [۳۵] شبکه عصبی را در رگرسیون خطی فازی برای جلوگیری از اثر پرت‌ها بکاربرد. اسکرچانس [۳۶] بر روی تکامل مدل‌های مبتنی بر مدل فازی و شبکه‌های عصبی- فازی برای خوشه بندی، طبقه‌بندی و رگرسیون و شناسایی سیستم، در محیط‌های آنلاین و زمان واقعی مطالعه نمود. جون هونگ و همکاران [۳۷] مدل رگرسیون فازی جدیدی را براساس تعداد فازی ذوزنقه‌ای و حداقل روش انحراف مطلق ارائه دادند. دنگ و ژائو [۳۸] از پارامترهای کنترل تطبیقی برای ایجاد توزیع نسبتاً یکنواخت استفاده کردند و تناقض بین گسترش جستجو و یافتن راه حل بهینه را بررسی کردند. خسروی و شهابی [۳۹] سه روش تجزیه و تحلیل چند معیاره (MCDM) را به همراه دو روش یادگیری ماشین ارائه دادند. لیو و همکاران [۴۰] الگوریتم جدیدی ارائه دادند که در مقایسه با برخی از الگوریتم‌های یادگیری معمول مانند دستگاه بردار پشتیبانی، نزدیکترین همسایگی و الگوریتم‌های ترکیبی دیگر استفاده می‌شود. ما از داده‌های فازی ذوزنقه‌ای در شبکه عصبی برای کاهش مبهم بودن سیستم استفاده می‌کنیم. مزایای مطالعه حاضر با توجه به بسیاری از کارهای قبلی را

می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:
 یکی از مزایای این کار استفاده از داده‌های دوزنقه‌ای است. در این مقاله، ما اعداد فازی مثلثی را به اعداد فازی دوزنقه‌ای گسترش دادیم تا از ابهام غیرضروری مدل فازی خطی در انفیس جلوگیری کنیم. در فازی، وقتی از داده‌های دوزنقه‌ای به جای داده‌های مثلثی استفاده می‌کنیم ابهام مدل رگرسیونی کاهش می‌یابد و برآورد با خطای کمتری خواهیم داشت. مزیت دیگر استفاده از تکنیک اعتبارسنجی متقابل برای آموزش شبکه انفیس است. در روش پیشنهادی هنگامی که تعداد مشاهده افزایش می‌یابد، دقت مدل افزایش می‌یابد.

در این مقاله، سیستم استنتاج عصبی فازی تطبیقی با داده‌های دوزنقه‌ای برای پیش بینی عملکرد رگرسیون غیرپارامتری فازی به دلیل کاهش اثر نقاط مرزی برآورد عملکرد رگرسیون اساسی پیشنهاد شده است. مزایای این روش دقیق‌تر، پیچیدگی کمتر و سازگارتر از سایر روش‌ها است

در این مقاله، یک الگوریتم رگرسیون فازی بر اساس انفیس پیشنهاد می‌شود که هدف آن پیش بینی مدل رگرسیون ناپارامتری فازی با ورودی غیرفازی و خروجی فازی است. در این الگوریتم از روش شیب کاهشی برای محاسبه پارامترهای اولیه و از روش حداقل مربعات و برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه پارامترهای ثانویه استفاده می‌شود. در بخش دوم مفاهیم مورد نیاز، در بخش سوم روش انفیس و در بخش پنجم تئوری مربوط به محاسبه روش پیشنهادی و پارامترهای ثانویه ارائه گردیده و سپس در بخش ششم دو مثال عددی و شبیه سازی این پارامترها با روش‌های ارائه شده، در بخش قبل محاسبه گردیده است. بخش هفتم نتیجه‌گیری حاصل ارائه گردیده است.

تعریف ۱: یک عدد فازی متقارن با \tilde{A} نشان داده می‌شود که $\tilde{A} = (\alpha, c)_L$ بصورت $\tilde{A}(x) = L\left(\frac{x-\alpha}{c}\right)$ $c > 0$ که α و c به ترتیب مرکز و پهنا \tilde{A} و $L(x)$ یک تابع از اعداد فازی است به طوریکه [۴۱]:

$$\begin{aligned} L(x) &= L(-x) \bullet \\ L(0) &= 1, \quad L(1) = 0 \bullet \\ L &\text{ در } [0, \infty) \text{ نزولی است.} \bullet \\ L &\text{ ر بازه } [0, 1] \text{ معکوس‌پذیر است.} \bullet \end{aligned}$$

مجموعه تمام اعداد فازی متقارن با $F_L(R)$ نشان داده می‌شود اگر $|x| \leq 1$ $L(x) = 1$ آنگاه عدد فازی یک عدد فازی مثلثی متقارن است.

تعریف ۲: (عدد فازی دوزنقه‌ای) یک عدد فازی دوزنقه‌ای توسط چهار مقدار مشخص می‌شود. $\tilde{A} = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$ که $a^{(1)}$ و $a^{(4)}$ به ترتیب نقاط چپ و راست انتهایی و $a^{(2)}$ و $a^{(3)}$ نقاط چپ و راست میانی می‌باشند. عدد فازی \tilde{A} با تابع زیر متناظر می‌شود [۳۵].

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a^{(2)}-x}{a^{(2)}-a^{(1)}}\right); & x < a^{(2)}. \\ 1; & a^{(2)} \leq x \leq a^{(3)}. \\ R\left(\frac{x-a^{(3)}}{a^{(4)}-a^{(3)}}\right); & x > a^{(3)}. \end{cases} \quad (1)$$

اگر $a^{(1)} = a^{(2)}$ $a^{(3)} = a^{(4)}$ باشد، عدد فازی دوزنقه‌ای \tilde{A} ، یک عدد فازی متقارن نامیده می‌شود.

تعریف ۳: (فاصله دپاموند) [۳] برای دو عدد فازی و $\tilde{A} = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$

۲. مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش، نکات اصلی مورد استفاده در مقاله،

$$Y_j = f(X_j) \{+\} \varepsilon_j = (a^{(1)}(x_j) \cdot a^{(2)}(x_j) \cdot a^{(3)}(x_j) \cdot a^{(4)}(x_j)) \{+\} \varepsilon_j. \\ j = 1. \dots n \quad (۴)$$

در این مدل \tilde{Y}_j ، Z امین متغیر پاسخ و دارای ساختار فازی است. همچنین ε_j جمله خطا است که یک متغیر تصادفی با میانگین صفر در نظر گرفته می‌شود. $\{+\}$ یک عملگر است که تعریف آن وابسته به اعداد فازی است. \tilde{Y}_j می‌تواند به صورت عدد فازی دوزنقه‌ای نمایش داده شود. که مجموعه‌ای از اعداد فازی دوزنقه‌ای را با نماد LR بدین صورت نمایش می‌دهیم:

$$LR = \{ \tilde{Y}_j: \tilde{Y}_j = (l_{\tilde{y}_j} \cdot c_{1\tilde{y}_j} \cdot c_{2\tilde{y}_j} \cdot r_{\tilde{y}_j})_{LR} \}$$

که $l_{\tilde{y}_j}$ ، $c_{1\tilde{y}_j}$ ، $c_{2\tilde{y}_j}$ و $r_{\tilde{y}_j}$ به ترتیب مقادیر پهنای چپ، مرکز چپ، مرکز راست و پهنای راست \tilde{Y}_j مقدار مشاهده شده یعنی عدد فازی دوزنقه‌ای \tilde{Y}_j می‌باشد. مجموعه‌ای از اعداد فازی دوزنقه‌ای متقارن می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$L = \{ \tilde{Y}_j: \tilde{Y}_j = (c_{1\tilde{y}_j} \cdot c_{2\tilde{y}_j} \cdot \beta_{\tilde{y}_j})_L \}$$

در بسیاری موقعیت‌های عملی رابطه بین متغیر ورودی و خروجی نامعلوم می‌باشد بنابراین رگرسیون ناپارامتری فازی $f(x)$ که شکل تابعی آن مشخص نمی‌باشد لازم به نظر می‌رسد و $f(x)$ یک نگاشت از D به LR است. بنابراین این مقاله یک مدل رگرسیون ناپارامتری فازی با ورودی‌های غیرفازی و خروجی‌های فازی دوزنقه‌ای در نظر گرفته شده است.

۳. سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی (انفیس)

انفیس (ANFIS) یک واژه اختصاری از حروف اول Adaptive Neural Fuzzy Inference System

\tilde{A} و $\tilde{B} = (b^{(1)} \cdot b^{(2)} \cdot b^{(3)} \cdot b^{(4)})$ فاصله دیاموند \tilde{B} بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = (a^{(1)} \quad b^{(1)})^2 + (a^{(2)} \quad b^{(2)})^2 + (a^{(3)} \quad b^{(3)})^2 + (a^{(4)} \quad b^{(4)})^2 \quad (۲)$$

فاصله دیاموند میزان نزدیکی توابع عضویت دو عدد فازی را اندازه می‌گیرد این فاصله در سه رابطه زیر صدق می‌کند.

- $d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0$,
- $d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0. \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$ (i.e., $a^{(1)} = b^{(1)}, a^{(2)} = b^{(2)}, a^{(3)} = b^{(3)}, a^{(4)} = b^{(4)}$),
- $d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq d^2(\tilde{A}, \tilde{C}) + d^2(\tilde{C}, \tilde{B})$,

تعریف ۴: (ارزیابی مدل) یک اندازه برای اختلاف

بین تابع رگرسیون فازی $\hat{Y}_i = (Y_i^{(1)} \cdot Y_i^{(2)} \cdot Y_i^{(3)} \cdot Y_i^{(4)})$ و برآوردش $\hat{\tilde{Y}}_i = (\hat{Y}_i^{(1)} \cdot \hat{Y}_i^{(2)} \cdot \hat{Y}_i^{(3)} \cdot \hat{Y}_i^{(4)})$ است که براساس فاصله دیاموند خطاها بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$ERROR = L = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{Y}_i, \hat{\tilde{Y}}_i) = \sum_{i=1}^n ((Y_i^{(1)} \quad \hat{Y}_i^{(1)})^2 + (Y_i^{(2)} \quad \hat{Y}_i^{(2)})^2 + (Y_i^{(3)} \quad \hat{Y}_i^{(3)})^2 + (Y_i^{(4)} \quad \hat{Y}_i^{(4)})^2) \quad (۳)$$

تعریف ۵: (مدل رگرسیون فازی) [۶] فرض کنید

$\tilde{A} = (a^{(1)} \cdot a^{(2)} \cdot a^{(3)} \cdot a^{(4)})$ یک عدد فازی دوزنقه‌ای که $a^{(1)}$ و $a^{(4)}$ به ترتیب نقاط چپ و راست انتهایی و $a^{(2)}$ و $a^{(3)}$ نقاط چپ و راست میانی باشند. تابع $f(x_j)$ یک نگاشت از x_j به \tilde{Y}_j بوده به طوری که $x_j = (1 \cdot x_{j1} \cdot x_{j2} \cdot \dots \cdot x_{jp})$ و $j = 1. \dots n$ همچنین x_j یک بردار متغیرهای مستقل P بعدی از ورودی‌ها است که متعلق به $D \subseteq R^P$ است. حال مدل رگرسیون ناپارامتری فازی برای این داده‌ها به صورت زیر را در نظر بگیرید:

مجموعه فازی در \tilde{A}_4 باشد آنگاه $f_2 = q_0^2 + q_1^2 x_1 + q_2^2 x_2$.

اگر x_1 یک مجموعه فازی در \tilde{A}_2 و x_2 یک مجموعه فازی در \tilde{A}_3 باشد آنگاه $f_3 = q_0^3 + q_1^3 x_1 + q_2^3 x_2$.

اگر x_1 یک مجموعه فازی در \tilde{A}_2 و x_2 یک مجموعه فازی در \tilde{A}_4 باشد آنگاه

$$f_4 = q_0^4 + q_1^4 x_1 + q_2^4 x_2 \quad (۵)$$

لایه سوم: گره‌های متوسط

$$w_i = \mu_{\tilde{A}_i}(x_1) \cdot \mu_{\tilde{A}_i}(x_2) \quad i = 1.2.3.4$$

$$o_{3,i} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} \quad i = 1.2.3.4 \quad (۶)$$

لایه چهارم: گره‌های نتیجه

$$o_{4,i} = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i (q_0^i + q_1^i x_1 + q_2^i x_2)$$

$$i = 1.2.3. \quad (۷)$$

لایه پنجم: گره‌های خروجی

$$\hat{Y}_j = o_{5,i} = \sum_{i=1}^4 \bar{w}_i f_i =$$

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} f_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} f_2 +$$

$$\frac{w_3}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} f_3 + \frac{w_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} f_4 =$$

$$\bar{w}_1 f_1 + \bar{w}_2 f_2 + \bar{w}_3 f_3 + \bar{w}_4 f_4$$

$$= \bar{w}_1 (q_0^1 + q_1^1 x_1 + q_2^1 x_2) +$$

$$\bar{w}_2 (q_0^2 + q_1^2 x_1 + q_2^2 x_2) + \bar{w}_3 (q_0^3 +$$

$$q_1^3 x_1 + q_2^3 x_2) + \bar{w}_4 (q_0^4 + q_1^4 x_1 +$$

$$q_2^4 x_2) = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=0}^2 q_i^k \bar{w}_k x_i \quad (۸)$$

در روش انفیس، وروری و خروجی می‌توانند غیر فازی باشند. در این مقاله پارامترهای $q_0^i \cdot q_1^i \cdot q_2^i$ فازی هستند، بنابراین خروجی نیز فازی خواهد بود. مقادیر پارامترهای اولیه با روش انفیس آموزش داده و محاسبه می‌شود و پارامترهای ثانویه از روش کمترین مربعات بدست آورده می‌شود. [۳۵]

می‌باشد. سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی، برای اولین بار توسط چانگ [۱۲] در سال ۱۹۹۶ مطرح شد. این سیستم به کمک مجموعه‌ای از داده‌های ورودی و خروجی یک سیستم استنتاج فازی ایجاد می‌کند که قابلیت آموزش نیز دارد. تکنیک عصبی و منطق فازی به منظور طراحی نگاشت غیرخطی بین فضای ورودی و خروجی استفاده می‌شود و قابلیت خوبی در آموزش، ساخت و طبقه‌بندی دارد. همچنین دارای این مزیت است که اجازه استخراج قوانین فازی را از اطلاعات عددی یا دانش متخصص می‌دهد و به طور تطبیقی یک قاعده-بنیاد می‌سازد. پارامترهای توابع عضویت آن از طریق الگوریتم پس انتشار یا ترکیب آن با روش حداقل مربعات تنظیم می‌شوند. انفیس نیاز به محاسبات پیچیده ندارد. این شبکه شامل پنج لایه است که به ترتیب شامل گره‌های ورودی، گره‌های قواعد، گره‌های متوسط، گره‌های نتیجه و گره‌های خروجی می‌باشند و به طور مستقیم با هم ارتباط دارند. هر گره دارای تابعی با پارامترهای قابل تنظیم یا ثابت است. شکل ۱ نشان دهنده ساختار استنتاج فازی عصبی تطبیقی می‌باشد.

لایه اول: گره‌های ورودی

$$x_j = (1, x_{j1}, x_{j2}) \quad \text{و} \quad j = 1, \dots, n$$

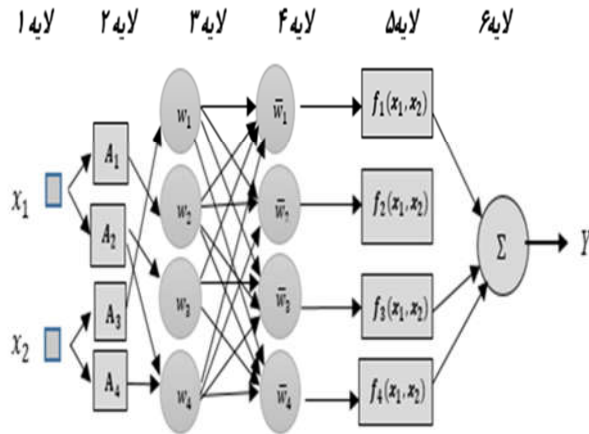
$$\mu_{\tilde{A}_i}(x_1) = \exp \left[-\frac{(x_1 - \tau_i)^2}{2\sigma_i} \right], \quad i = 1.2 \quad \text{و}$$

$$\mu_{\tilde{A}_i}(x_2) = \exp \left[-\frac{(x_2 - \tau_i)^2}{2\sigma_i} \right], \quad i = 3.4$$

لایه دوم: گره‌های قواعد

اگر x_1 یک مجموعه فازی در \tilde{A}_1 و x_2 یک مجموعه فازی در \tilde{A}_3 باشد آنگاه $f_1 = q_0^1 + q_1^1 x_1 + q_2^1 x_2$.

اگر x_1 یک مجموعه فازی در \tilde{A}_1 و x_2 یک



شکل ۱: ساختار انفیس

رگرسیون فازی و روش استنتاج فازی عصبی تطبیقی

فرض کنید \tilde{Y}_j (خروجی مشاهده شده)، \hat{Y}_j (خروجی برآورد شده) و q_k^i (پارامترهای ثانویه) در رابطه (۸) اعداد فازی دوزنقه‌ای باشند که به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

$$q_k^i = (a_k^i, b_k^i, \alpha_k^i),$$

$$k = 0, \dots, p, i = 1, \dots, m.$$

$$\tilde{Y}_j = (c_{1\tilde{y}_j}, c_{2\tilde{y}_j}, \beta_{\tilde{y}_j})_{LR},$$

$$\hat{Y}_j = (c_{1\hat{y}_j}, c_{2\hat{y}_j}, \hat{\beta}_{\hat{y}_j})_{LR}, j = 1, \dots, n.$$

n ، تعداد زوج داده‌های مشاهده شده می‌باشند.

در الگوریتم هیبریدی پیشنهادی از تکنیک‌های پس از انتشار و پیش انتشار استفاده می‌شود. ابتدا از روش حداقل مربعات فازی برای بهینه‌سازی پارامترهای ثانویه استفاده می‌شود. در مرحله دوم، هنگامی که پارامترهای ثانویه به دست می‌آید، پارامترهای اولیه با استفاده از الگوریتم کشویی شیب بهینه می‌شوند. در اینجا، ما از نرم افزاری MATLAB برای پیاده سازی الگوریتم‌ها استفاده کرده‌ایم. مراحل پیش بینی به صورت شکل ۲ است.

۴. روش پیشنهادی



شکل ۲: الگوریتم روش پیشنهادی

$$\widehat{Y}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p a_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p b_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \alpha_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk}. \quad (12)$$

بنابراین، روابط زیر برقرارند:

$$c_{1\bar{y}_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk}, \quad (13)$$

$$c_{2\bar{y}_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk}$$

$$\hat{\beta}_{\bar{y}_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \alpha_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk}.$$

در الگوریتم هیبرید پیشنهادی، روش پیش انتشار و پس انتشار با هم ترکیب می‌شوند. پارامترهای ثانویه را با استفاده از روش‌های مختلف می‌توان برآورد کرد. در این مقاله، روش حداقل مربعات فازی بر پایه فاصله دیاموند برای به دست آوردن پارامترهای ثانویه به کار برده می‌شود.

بنابراین، در ادامه ابتدا طریقه بدست آوردن پارامترهای ثانویه با استفاده از روش حداقل مربعات فازی بر پایه فاصله دیاموند و سپس بهینه سازی پارامترهای اولیه با استفاده از روش چانگ [۱۲] توضیح داده می‌شود. پیاده‌سازی الگوریتم‌های پیشنهادی با استفاده از برنامه‌نویسی در محیط متلب صورت می‌پذیرد.

۵. پارامترهای ثانویه

فرض کنید $\bar{Y}_j = (l_{\bar{y}_j}, c_{1\bar{y}_j}, c_{2\bar{y}_j}, r_{\bar{y}_j})$ [آمین مقدار مشاهده شده و $\widehat{Y}_j = (\hat{l}_{\bar{y}_j}, c_{1\bar{y}_j}, c_{2\bar{y}_j}, r_{\bar{y}_j})$ مقدار برآورد شده باشند که $j = 1, 2, \dots, n$ ، $l_{\bar{y}_j}$ ، $c_{1\bar{y}_j}$ ، $c_{2\bar{y}_j}$ و $r_{\bar{y}_j}$ به ترتیب مقادیر پهنای چپ، مرکز چپ، مرکز راست و پهنای راست [آمین مقدار مشاهده شده و $\hat{l}_{\bar{y}_j}$ ، $c_{1\bar{y}_j}$ ، $c_{2\bar{y}_j}$ و $r_{\bar{y}_j}$ به ترتیب مقادیر پهنای چپ، مرکز چپ، مرکز راست و پهنای راست [آمین مقدار برآورد برای دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشد، در این صورت براساس فاصله

با استفاده از تعاریف بالا، عملگرهای فازی و جایگزین کردن q_k^i در رابطه (۸)، خروجی \widehat{Y}_j برای دو ورودی x_1 و x_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_j = & \bar{w}_1 f_1 + \bar{w}_2 f_2 + \bar{w}_3 f_3 + \bar{w}_4 f_4 = \quad (10) \\ & (a_0^1 \cdot b_0^1 \cdot \alpha_0^1) \bar{w}_1 + (a_1^1 \cdot b_1^1 \cdot \alpha_1^1) \bar{w}_2 x_{j1} + \\ & (a_2^1 \cdot b_2^1 \cdot \alpha_2^1) \bar{w}_1 x_{j2} + (a_0^2 \cdot b_0^2 \cdot \alpha_0^2) \bar{w}_2 + \\ & (a_2^2 \cdot b_1^2 \cdot \alpha_1^2) \bar{w}_2 x_{j1} + (a_2^2 \cdot b_2^2 \cdot \alpha_2^2) \bar{w}_2 x_{j2} + \\ & (a_0^3 \cdot b_0^3 \cdot \alpha_0^3) \bar{w}_3 + (a_1^3 \cdot b_1^3 \cdot \alpha_1^3) \bar{w}_3 x_{j1} + \\ & (a_2^3 \cdot b_2^3 \cdot \alpha_2^3) \bar{w}_3 x_{j2} + (a_0^4 \cdot b_0^4 \cdot \alpha_0^4) \bar{w}_4 + \\ & (a_1^4 \cdot b_1^4 \cdot \alpha_1^4) \bar{w}_4 x_{j1} + (a_2^4 \cdot b_2^4 \cdot \alpha_2^4) \bar{w}_4 x_{j2} = \quad (14) \\ & \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{k=0}^2 a_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{k=0}^2 b_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} \right) \\ & \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{k=0}^2 \alpha_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} \right) \end{aligned}$$

که \bar{w}_{ji} ها معلوم می‌باشند.

مدل رگرسیون ناپارامتری فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \bar{Y}_j = & f(x_j) \{+\} \varepsilon_j = \quad (11) \\ & \left(l(x_j), a(x_j), r(x_j) \right)_{LR} \{+\} \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

فرض کنید $x_j = (1, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp})$ یک بردار P بعدی از متغیرهای مستقل در J آمین مشاهده $Q = (q_0, q_1, \dots, q_p)$ ، یک بردار P بعدی از پارامترهای نامعلوم فازی و \bar{Y}_j ، J آمین مقدار مشاهده شده متغیرهای وابسته و ε_j خطا با میانگین شرطی صفر و واریانس $\sigma^2(x)$ به شرط x است. Q را می‌توان به صورت بردار $Q = \{a, b, \alpha\}$ نمایش داد به طوری که

$$\begin{aligned} a = & (a_0^i, a_1^i, \dots, a_p^i), b = (b_0^i, b_1^i, \dots, b_p^i) \\ \alpha = & (\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_p^i), i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

و a_k^i ، b_k^i و α_k^i به ترتیب مقادیر مرکز چپ و مرکز راست و پهنای عدد فازی برای $k = 0, \dots, p$ می‌باشند. با استفاده از تعاریف بالا، عملگرهای فازی و جایگزین کردن q_k در معادله (۱۰)، خروجی \widehat{Y}_j برابر است با:

را در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

$$L = \sum_{j=1}^n \left(2 \left(c_{1\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right)^2 + 2 \left(c_{2\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right)^2 + 2 \left(\beta_{\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right)^2 \right) \left(\left(c_{1\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right) \left(c_{2\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right) \right) \quad (18)$$

با فرض $p = 1$ تابع خطای L به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L = \sum_{j=1}^n \left(2 \left(c_{1\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right)^2 + 2 \left(c_{2\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right)^2 + 2 \left(\beta_{\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right)^2 \right) \left(\left(c_{1\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right) \left(c_{2\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \right) \right) \quad (19)$$

در ادامه از رابطه (۱۹) نسبت به پارامترهای نامعلوم a_k^i ، b_k^i و α_k^i مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial L}{\partial a_0^1} = \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{j1} x_{j0} (c_{1\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk}) + 2\bar{w}_{j1} x_{j0} (\beta_{\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk}) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_1^1} = \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{j1} x_{j1} (c_{1\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk}) + 2\bar{w}_{j1} x_{j1} (\beta_{\tilde{y}_j} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk}) = 0 \quad (21)$$

.

.

.

دیاموند مساله حداقل مربعات بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$L = \sum_{j=1}^n \left(\tilde{Y}_j - \hat{\tilde{Y}}_j \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left((l_{\tilde{y}_j} \hat{l}_{\tilde{y}_j})^2 + (c_{1\tilde{y}_j} - c_{1\hat{\tilde{y}}_j})^2 + (c_{2\tilde{y}_j} - c_{2\hat{\tilde{y}}_j})^2 + (r_{\tilde{y}_j} - r_{\hat{\tilde{y}}_j})^2 \right) \quad (15)$$

فرض می‌کنیم $\tilde{Y}_j = (c_{1\tilde{y}_j} \cdot c_{2\tilde{y}_j} \cdot \beta_{\tilde{y}_j})$ و $\hat{\tilde{Y}}_j = (c_{1\hat{\tilde{y}}_j} \cdot c_{2\hat{\tilde{y}}_j} \cdot \hat{\beta}_{\tilde{y}_j})$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای متقارن باشند. بطوریکه $c_{1\tilde{y}_j}$ ، $c_{2\tilde{y}_j}$ و $\beta_{\tilde{y}_j}$ به ترتیب مقادیر مرکز چپ، مرکز راست و پهنای زلمین مقدار مشاهده شده و $\hat{\beta}_{\tilde{y}_j}$ ، $c_{1\hat{\tilde{y}}_j}$ و $c_{2\hat{\tilde{y}}_j}$ به ترتیب مقادیر مرکز چپ، مرکز راست و پهنای زلمین مقدار برآورد شده است. بنابراین روابط زیر برقرار است.

$$l_{\tilde{y}_j} = c_{1\tilde{y}_j} \quad \beta_{\tilde{y}_j} \cdot r_{\tilde{y}_j} = c_{2\tilde{y}_j} + \beta_{\tilde{y}_j} \\ \hat{l}_{\tilde{y}_j} = c_{1\hat{\tilde{y}}_j} \quad \hat{\beta}_{\tilde{y}_j} \cdot r_{\tilde{y}_j} = c_{2\hat{\tilde{y}}_j} + \hat{\beta}_{\tilde{y}_j} \quad (16)$$

با جایگذاری $l_{\tilde{y}_j}$ ، $r_{\tilde{y}_j}$ ، $\hat{l}_{\tilde{y}_j}$ و $r_{\hat{\tilde{y}}_j}$ در رابطه (۱۶)، مسأله حداقل مربعات فازی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$L = \sum_{j=1}^n \left((c_{1\tilde{y}_j} - \beta_{\tilde{y}_j} - c_{1\hat{\tilde{y}}_j} + \hat{\beta}_{\tilde{y}_j})^2 + ((c_{1\tilde{y}_j} - \beta_{\tilde{y}_j} - c_{1\hat{\tilde{y}}_j} + \hat{\beta}_{\tilde{y}_j})^2 (c_{1\tilde{y}_j} - c_{1\hat{\tilde{y}}_j})^2 + (c_{2\tilde{y}_j} - c_{2\hat{\tilde{y}}_j})^2 + (c_{2\tilde{y}_j} + \beta_{\tilde{y}_j} - c_{2\hat{\tilde{y}}_j} - \hat{\beta}_{\tilde{y}_j}))^2 \right) = \sum_{j=1}^n 2(c_{1\tilde{y}_j} - c_{1\hat{\tilde{y}}_j})^2 + 2(c_{2\tilde{y}_j} - c_{2\hat{\tilde{y}}_j})^2 + 2(\beta_{\tilde{y}_j} - \hat{\beta}_{\tilde{y}_j})^2 - 2(\beta_{\tilde{y}_j} - \hat{\beta}_{\tilde{y}_j})((c_{1\tilde{y}_j} - c_{1\hat{\tilde{y}}_j}) - (c_{2\tilde{y}_j} - c_{2\hat{\tilde{y}}_j})) \quad (17)$$

حال مقادیر

$$c_{1\tilde{y}_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad 9$$

$$c_{2\tilde{y}_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad 9$$

$$\hat{\beta}_{\tilde{y}_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \bar{w}_{11}\bar{w}_{12} \dots \bar{w}_{1m} \bar{w}_{11}x_{11} \bar{w}_{12}x_{11} \dots & \bar{w}_{1m}x_{11} & & \\
 \bar{w}_{21}\bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{2m} \bar{w}_{21}x_{21} \bar{w}_{22}x_{21} \dots & \bar{w}_{2m}x_{21} & & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \bar{w}_{n1}\bar{w}_{n2} \dots \bar{w}_{nm} \bar{w}_{n1}x_{n1} \bar{w}_{n2}x_{n1} \dots & \bar{w}_{nm}x_{n1} & & \\
 = & & & \\
 \bar{w}_{11}\bar{w}_{21} \dots \bar{w}_{n1} & & & \\
 \bar{w}_{12}\bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{n2} & & & \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \bar{w}_{1m}\bar{w}_{2m} \dots \bar{w}_{nm} & & & \\
 \bar{w}_{11}x_{11}\bar{w}_{21}x_{21} \dots \bar{w}_{n1}x_{n1} & & & \\
 \bar{w}_{12}x_{11}\bar{w}_{22}x_{21} \dots \bar{w}_{n2}x_{n1} & & & \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \bar{w}_{1m}x_{11}\bar{w}_{2m}x_{21} \dots \bar{w}_{nm}x_{n1} & & & \\
 \end{array}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial b_0^1} &= \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{j1}x_{j0}(c_{2\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) + 2\bar{w}_{j1}x_{j0}(\beta_{\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) = 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial b_1^1} &= \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{j1}x_{j1}(c_{2\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) + 2\bar{w}_{j1}x_{j1}(\beta_{\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) = 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial b_0^m} &= \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{jm}x_{j0}(c_{2\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) + 2\bar{w}_{jm}x_{j0}(\beta_{\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) = 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial b_1^m} &= \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{jm}x_{j1}(c_{2\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) + 2\bar{w}_{jm}x_{j1}(\beta_{\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) = 0
 \end{aligned}$$

معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2b_k^i \\
 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk} \bar{w}_{1j}x_{j0} = \\
 \sum_{j=1}^n \bar{w}_{1j}x_{j0}(2c_{2\bar{y}_j} \beta_{\bar{y}_j}) \\
 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2b_k^i \\
 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk} \bar{w}_{1j}x_{j1} = \\
 \sum_{j=1}^n \bar{w}_{1j}x_{j1}(2c_{2\bar{y}_j} \beta_{\bar{y}_j})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial a_0^m} &= \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{jm}x_{j0}(c_{1\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) + 2\bar{w}_{jm}x_{j0}(\beta_{\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) = 0 \quad (۲۲) \\
 \frac{\partial L}{\partial a_1^m} &= \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{jm}x_{j1}(c_{1\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) + 2\bar{w}_{jm}x_{j1}(\beta_{\bar{y}_j} \\
 &\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij}x_{jk}) = 0 \quad (۲۳)
 \end{aligned}$$

معادلات (۲۰)، (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2a_k^i \\
 \alpha_k^i) \bar{w}_{ij}x_{jk} \bar{w}_{1j}x_{j0} = \\
 \sum_{j=1}^n \bar{w}_{1j}x_{j0}(2c_{1\bar{y}_j} \beta_{\bar{y}_j}) \quad (۲۴) \\
 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2a_k^i \\
 \alpha_k^i) \bar{w}_{ij}x_{jk} \bar{w}_{1j}x_{j1} = \\
 \sum_{j=1}^n \bar{w}_{1j}x_{j1}(2c_{1\bar{y}_j} \beta_{\bar{y}_j}) \quad (۲۵)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2a_k^i \\
 \alpha_k^i) \bar{w}_{ij}x_{jk} \bar{w}_{mj}x_{j0} = \\
 \sum_{j=1}^n \bar{w}_{mj}x_{j0}(2c_{1\bar{y}_j} \beta_{\bar{y}_j}) \quad (۲۶) \\
 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2a_k^i \\
 \alpha_k^i) \bar{w}_{ij}x_{jk} \bar{w}_{mj}x_{j1} = \\
 \sum_{j=1}^n \bar{w}_{mj}x_{j1}(2c_{1\bar{y}_j} \beta_{\bar{y}_j}) \quad (۲۷)
 \end{aligned}$$

چون $x_{j0} = 1$ و معادلات فوق را می‌توان به صورت ماتریس زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{pmatrix}
 (2a_0^1 & \alpha_0^1) \dots (2a_0^m & \alpha_0^m) \cdot (2a_1^1 \\
 \alpha_1^1) \dots (2a_1^m & \alpha_1^m) \\
 \bar{w}_{11}\bar{w}_{21} & \dots & \bar{w}_{n1} \\
 \bar{w}_{12}\bar{w}_{22} & \dots & \bar{w}_{n2} \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \bar{w}_{1m}\bar{w}_{2m} & \dots & \bar{w}_{nm} \\
 \bar{w}_{11}x_{11}\bar{w}_{21}x_{21} & \dots & \bar{w}_{n1}x_{n1} \\
 \bar{w}_{12}x_{11}\bar{w}_{22}x_{21} & \dots & \bar{w}_{n2}x_{n1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \bar{w}_{1m}x_{11}\bar{w}_{2m}x_{21} & \dots & \bar{w}_{nm}x_{n1}
 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad (c_{2\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad)) = 0 \\ & \frac{\partial L}{\partial \alpha_1^i} = \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{j1} x_{j1} (\beta_{\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad + 2\bar{w}_{j1} x_{j1} ((c_{1\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad (c_{2\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad)) = 0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \frac{\partial L}{\partial \alpha_0^m} = \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{jm} x_{j0} (\beta_{\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad + 2\bar{w}_{jm} x_{j0} ((c_{1\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad (c_{2\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad)) = 0 \\ & \frac{\partial L}{\partial \alpha_1^m} = \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{jm} x_{j1} (\beta_{\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad + 2\bar{w}_{jm} x_{j1} ((c_{1\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 a_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad (c_{2\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 b_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad)) = 0 \end{aligned}$$

معادلات فوق می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (a_k^i \quad b_k^i \\ & 2\alpha_k^i) \bar{w}_{ij} x_{jk} \bar{w}_{1j} x_{j0} = \\ & \sum_{j=1}^n \bar{w}_{1j} x_{j0} (c_{1\bar{y}_j} \quad c_{2\bar{y}_j} \quad 2\beta_{\bar{y}_j}) \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (a_k^i \quad b_k^i \\ & 2\alpha_k^i) \bar{w}_{ij} x_{jk} \bar{w}_{1j} x_{j1} = \\ & \sum_{j=1}^n \bar{w}_{1j} x_{j1} (c_{1\bar{y}_j} \quad c_{2\bar{y}_j} \quad 2\beta_{\bar{y}_j}) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (a_k^i \quad b_k^i \\ & 2\alpha_k^i) \bar{w}_{ij} x_{jk} \bar{w}_{mj} x_{j0} = \\ & \sum_{j=1}^n \bar{w}_{mj} x_{j0} (c_{1\bar{y}_j} \quad c_{2\bar{y}_j} \quad 2\beta_{\bar{y}_j}) \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (a_k^i \quad b_k^i \\ & 2\alpha_k^i) \bar{w}_{ij} x_{jk} \bar{w}_{mj} x_{j1} = \\ & \sum_{j=1}^n \bar{w}_{mj} x_{j1} (c_{1\bar{y}_j} \quad c_{2\bar{y}_j} \quad 2\beta_{\bar{y}_j}) \end{aligned}$$

چون $x_{j0} = 1$ بنابراین معادلات فوق را می‌توان به

$$\begin{aligned} & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2b_k^i \\ & \alpha_k^i) \bar{w}_{ij} x_{jk} \bar{w}_{mj} x_{j0} = \\ & \sum_{j=1}^n \bar{w}_{mj} x_{j0} (2c_{2\bar{y}_j} \quad \beta_{\bar{y}_j}) \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 (2b_k^i \\ & \alpha_k^i) \bar{w}_{ij} x_{jk} \bar{w}_{mj} x_{j1} = \\ & \sum_{j=1}^n \bar{w}_{mj} x_{j1} (2c_{2\bar{y}_j} \quad \beta_{\bar{y}_j}) \end{aligned}$$

چون $x_{j0} = 1$ و معادلات فوق را می‌توان به صورت ماتریس زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} & ((2b_0^1 \quad \alpha_0^1) \dots (2b_0^m \quad \alpha_0^m) \cdot (2b_1^1 \\ & \alpha_1^1) \dots (2b_1^m \\ & \quad \bar{w}_{11} \bar{w}_{21} \quad \dots \quad \bar{w}_{n1} \\ & \quad \bar{w}_{12} \bar{w}_{22} \quad \dots \quad \bar{w}_{n2} \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \alpha_1^m)) \quad \begin{matrix} \bar{w}_{1m} \bar{w}_{2m} & \dots & \bar{w}_{nm} \\ \bar{w}_{11} x_{11} \bar{w}_{21} x_{21} & \dots & \bar{w}_{n1} x_{n1} \\ \bar{w}_{12} x_{11} \bar{w}_{22} x_{21} & \dots & \bar{w}_{n2} x_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{w}_{1m} x_{11} \bar{w}_{2m} x_{21} & \dots & \bar{w}_{nm} x_{n1} \\ \bar{w}_{11} \bar{w}_{12} \dots \bar{w}_{1m} \bar{w}_{11} x_{11} \bar{w}_{12} x_{11} \dots \bar{w}_{1m} x_{11} \\ \bar{w}_{21} \bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{2m} \bar{w}_{21} x_{21} \bar{w}_{22} x_{21} \dots \bar{w}_{2m} x_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{w}_{n1} \bar{w}_{n2} \dots \bar{w}_{nm} \bar{w}_{n1} x_{n1} \bar{w}_{n2} x_{n1} \dots \bar{w}_{nm} x_{n1} \\ \bar{w}_{11} \bar{w}_{21} & \dots & \bar{w}_{n1} \\ \bar{w}_{12} \bar{w}_{22} & \dots & \bar{w}_{n2} \end{matrix} \times \\ & = \begin{matrix} \bar{w}_{1m} \bar{w}_{2m} & \dots & \bar{w}_{nm} \\ \bar{w}_{11} x_{11} \bar{w}_{21} x_{21} & \dots & \bar{w}_{n1} x_{n1} \\ \bar{w}_{12} x_{11} \bar{w}_{22} x_{21} & \dots & \bar{w}_{n2} x_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{w}_{1m} x_{11} \bar{w}_{2m} x_{21} & \dots & \bar{w}_{nm} x_{n1} \end{matrix} \begin{matrix} 2c_{2\bar{y}_1} & \beta_{\bar{y}_1} \\ 2c_{2\bar{y}_2} & \beta_{\bar{y}_2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 2c_{2\bar{y}_m} & \beta_{\bar{y}_m} \end{matrix} \\ & \frac{\partial L}{\partial \alpha_0^1} = \sum_{j=1}^n 4\bar{w}_{j1} x_{j0} (\beta_{\bar{y}_j} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^1 \alpha_k^i \bar{w}_{ij} x_{jk} \quad + 2\bar{w}_{j1} x_{j0} ((c_{1\bar{y}_j} \end{aligned}$$

صورت ماتریس زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{pmatrix} \bar{w}_{11}\bar{w}_{12} \dots \bar{w}_{1m}\bar{w}_{11}x_{11}\bar{w}_{12}x_{11} \dots \bar{w}_{1m}x_{11} \\ \bar{w}_{21}\bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{2m}\bar{w}_{11}x_{21}\bar{w}_{22}x_{21} \dots \bar{w}_{2m}x_{21} \\ \vdots \\ \bar{w}_{n1}\bar{w}_{n2} \dots \bar{w}_{nm}\bar{w}_{11}x_{n1}\bar{w}_{n2}x_{n1} \dots \bar{w}_{nm}x_{n1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (a_0^1 & b_0^1 & 2\alpha_0^1) \dots (a_0^m & b_0^m & 2\alpha_0^m) \\ ((a_1^1 & b_1^1 & 2\alpha_1^1) \dots (a_1^m & b_1^m & 2\alpha_1^m)) \\ \bar{w}_{11}\bar{w}_{21} \dots \bar{w}_{n1} \\ \bar{w}_{12}\bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{n2} \\ \vdots \\ \bar{w}_{1m}\bar{w}_{2m} \dots \bar{w}_{nm} \\ \bar{w}_{11}x_{11}\bar{w}_{21}x_{21} \dots \bar{w}_{n1}x_{n1} \\ \bar{w}_{12}x_{11}\bar{w}_{22}x_{21} \dots \bar{w}_{n2}x_{n1} \\ \vdots \\ \bar{w}_{1m}x_{11}\bar{w}_{2m}x_{21} \dots \bar{w}_{nm}x_{n1} \\ \bar{w}_{11}\bar{w}_{12} \dots \bar{w}_{1m}\bar{w}_{11}x_{11}\bar{w}_{12}x_{11} \dots \bar{w}_{1m}x_{11} \\ \bar{w}_{21}\bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{2m}\bar{w}_{21}x_{21}\bar{w}_{22}x_{21} \dots \bar{w}_{2m}x_{21} \\ \vdots \\ \bar{w}_{n1}\bar{w}_{n2} \dots \bar{w}_{nm}\bar{w}_{n1}x_{n1}\bar{w}_{n2}x_{n1} \dots \bar{w}_{nm}x_{n1} \\ \bar{w}_{11}\bar{w}_{21} \dots \bar{w}_{n1} \\ \bar{w}_{12}\bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{n2} \\ \vdots \\ \bar{w}_{1m}\bar{w}_{2m} \dots \bar{w}_{nm} \\ \bar{w}_{11}x_{11}\bar{w}_{21}x_{21} \dots \bar{w}_{n1}x_{n1} \\ \bar{w}_{12}x_{11}\bar{w}_{22}x_{21} \dots \bar{w}_{n2}x_{n1} \\ \vdots \\ \bar{w}_{1m}x_{11}\bar{w}_{2m}x_{21} \dots \bar{w}_{nm}x_{n1} \end{pmatrix}$$

$$C_{1Y} = \begin{pmatrix} c_{1\tilde{y}_1} \\ c_{1\tilde{y}_2} \\ \vdots \\ c_{1\tilde{y}_n} \end{pmatrix} \quad C_{2Y} = \begin{pmatrix} c_{2\tilde{y}_1} \\ c_{2\tilde{y}_2} \\ \vdots \\ c_{2\tilde{y}_n} \end{pmatrix} \quad \beta_Y = \begin{pmatrix} \beta_{\tilde{y}_1} \\ \beta_{\tilde{y}_2} \\ \vdots \\ \beta_{\tilde{y}_n} \end{pmatrix}$$

و $x_{j0} = 1$ و نماد "T" به معنای ترانهاده ماتریس است.

$$\begin{pmatrix} \bar{w}_{11}\bar{w}_{12} \dots \bar{w}_{1m}\bar{w}_{11}x_{11} \dots \bar{w}_{1m}x_{1p} \\ \bar{w}_{21}\bar{w}_{22} \dots \bar{w}_{2m}\bar{w}_{21}x_{21} \dots \bar{w}_{2m}x_{2p} \\ \vdots \\ \bar{w}_{n1}\bar{w}_{n2} \dots \bar{w}_{nm}\bar{w}_{n1}x_{n1} \dots \bar{w}_{nm}x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0^1 & \hat{b}_0^1 & \hat{\alpha}_0^1 \\ \vdots \\ \hat{a}_0^m & \hat{b}_0^m & \hat{\alpha}_0^m \\ \vdots \\ \hat{a}_p^1 & \hat{b}_p^1 & \hat{\alpha}_p^1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p^m & \hat{b}_p^m & \hat{\alpha}_p^m \end{pmatrix} \quad (31)$$

بنابراین پارامترهای ثانویه با روابط (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) به دو شرط زیر بدست می‌آیند. اگر تعداد داده زیاد باشد این دو شرط به‌طور خودکار برقرار می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p a_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} \quad (1) \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \alpha_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} \leq b_{\tilde{y}_j} + (1) \\
 & \beta_{\tilde{y}_j} \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p a_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} + \\
 & (1) \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \alpha_k^i \bar{w}_{ji} x_{jk} \geq b_{\tilde{y}_j} \\
 & (1) \beta_{\tilde{y}_j}
 \end{aligned}$$

با حل کردن سه گروه معادلات خطی فوق برآورد پارامترها برای رگرسیون ناپارامتری تک متغیره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 (A \quad \alpha) &= (X'X)^{-1}X^T(2C_{1Y} \quad \beta_Y) \\
 (B \quad \alpha) &= (X'X)^{-1}X^T(2C_{2Y} \quad \beta_Y) \\
 (\alpha \quad 2A \quad 2B) &= (X'X)^{-1}X^T(2C_{1Y} \\
 & 2C_{2Y} + 2\beta_Y)
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 (\hat{A})^T &= (X'X)^{-1}X^T(2C_{2Y} + \beta_Y) \quad (28) \\
 (\hat{B})^T &= (X'X)^{-1}X^T(2C_{1Y} + \beta_Y) \quad (29) \\
 (\hat{\alpha})^T &= (X'X)^{-1}X^T(2C_{2Y} \quad 2C_{1Y} + 2\beta_Y) \quad (30)
 \end{aligned}$$

به طوری که،

که

$$\alpha_k^i \bar{w}_{ji} \geq 0.$$

$$k = 0, \dots, p. \quad i = 1, \dots, m. \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\begin{cases} y_i = f(x_{i1}, x_{i2}). \\ e_i = \left(\frac{1}{4}\right) f(x_i) + \text{rand}[0.1]. \end{cases} \quad i = 1, \dots, 30.$$

۶. مثال‌ها

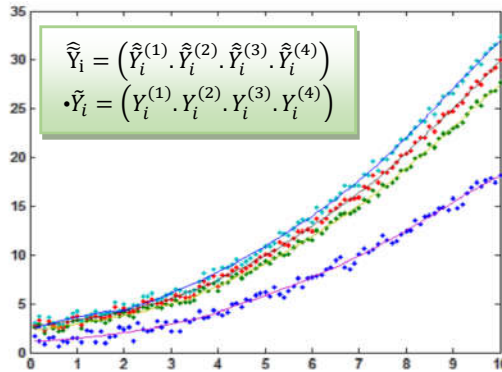
مثال ۱: تابع $f(x_1, x_2) = 24.23r^2(0.75 + 5r^2)$ را در نظر بگیرید که

$$r^2 = (x_1/10 - 0.5)^2 + (x_2/10 - 0.5)^2$$

۱ است. روش انفیس را برای هر i یک عدد تصادفی بین ۰ و ۱ $\text{rand}[0.1]$ برای هر i یک عدد تصادفی بین ۰ و ۱ است. روش انفیس را برای برآورد مدل رگرسیون به کار می‌بریم. مقدار خطا بصورت عددی و پارامترهای اولیه و ثانویه با روش فوق محاسبه می‌شوند. مقادیر مشاهده شده و مقادیر پیش‌بینی شده روش پیشنهادی در شکل ۳ نشان داده شده است. خطوط مرکزی، خطوط مرزی بالا و پایین عملکرد واقعی و برآورد آنها در شکل رسم شده است. همچنین مقادیر بدست آمده به صورت مبسوط در جدول ۱ تا ۴ آورده شده است.

و $D = [0.10]^2$ دامنه $X = (x_1, x_2)$ می‌باشد. داده‌ها مشابه داده‌های [۳۱] تولید می‌شوند. ورودی‌های x_1 و x_2 متغیرهای مستقل هستند که مقادیر ۰ تا ۱۰ را اتخاذ می‌کنند. خروجی \tilde{Y}_i به صورت زیر که یک عدد دوزنقه‌ای است ساخته می‌شود.

$$\tilde{Y}_i = \left(Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}, Y_i^{(3)}, Y_i^{(4)} \right) = \left(y_i - e_i, y_i + \frac{1}{3}e_i, y_i + \frac{2}{3}e_i, y_i + e_i \right)$$



شکل ۳: نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی (انفیس)

جدول ۱: داده‌های ورودی و خروجی و برآورد بر اساس روش پیشنهادی (انفیس)

No.(i)	x_1	x_2	$\tilde{Y}_i = \left(Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}, Y_i^{(3)}, Y_i^{(4)} \right)$				$\hat{Y}_i = \left(\hat{Y}_i^{(1)}, \hat{Y}_i^{(2)}, \hat{Y}_i^{(3)}, \hat{Y}_i^{(4)} \right)$			
1	0.5160	5.9760	4.0383	6.4513	7.0545	7.6578	3.7865	6.5935	7.1936	7.6430
2	0.7250	2.1290	4.5740	6.8736	7.4485	8.0234	4.1771	7.1031	7.8033	8.3627
3	0.8070	9.8370	3.7999	6.5308	7.2135	7.8962	3.7865	6.5935	7.1936	7.6430
4	0.8910	7.1500	6.0211	9.1632	9.9487	10.7342	4.1124	9.3597	10.6971	11.8505
5	1.0710	7.4820	4.3416	6.3502	6.8524	7.3545	3.7413	6.3284	6.8501	7.4046

6	1.1940	6.2100	5.5283	9.3274	10.2772	11.2270	6.2434	9.2526	9.6152	9.7500
7	1.3000	4.8520	4.4813	6.9046	7.5104	8.1162	4.3966	7.0384	7.6785	8.2017
8	2.6390	5.7270	5.1721	8.2573	9.0286	9.7999	5.3316	9.2615	9.9242	10.1989
9	2.8300	3.6310	4.5269	7.7616	8.5703	9.3790	4.7200	7.7224	8.5356	9.1658
10	2.9670	8.8280	5.1063	8.0143	8.7413	9.4684	5.3192	7.9816	8.6079	9.1314
11	3.1610	7.1270	3.0137	5.6621	6.3242	6.9863	3.2164	5.6113	6.2273	6.7195
12	3.1780	7.1450	3.8714	6.2937	6.8993	7.5049	3.5993	6.4317	7.0659	7.5643
13	3.5530	4.2610	4.2478	7.3507	8.1264	8.9021	4.4037	7.3372	7.9959	8.5555
14	3.6090	8.8930	4.2272	7.3575	8.1401	8.9227	4.1503	7.3421	8.1113	8.9739
15	3.7110	3.8310	4.2817	6.9711	7.6434	8.3157	4.1771	7.1031	7.8033	8.3627
16	3.9190	8.9900	4.8099	6.9824	7.5255	8.0687	4.1584	7.2736	8.0961	8.9107
17	3.9220	8.9840	5.9524	9.1861	9.9945	10.8029	7.3213	9.3875	9.8504	10.1780
18	4.4860	9.4330	5.8589	9.2172	10.0568	10.8964	7.3213	9.3875	9.8504	10.1780
19	5.2480	6.6770	4.9444	7.6224	8.2919	8.9614	5.0095	7.9841	8.5642	8.9817
20	5.6960	9.6320	5.0176	7.5980	8.2431	8.8882	4.7200	7.7224	8.5356	9.1658
21	5.8020	0.2170	3.5643	6.6093	7.3705	8.1318	3.8125	6.6212	7.2912	7.8489
22	6.4390	2.6600	5.1119	8.1481	8.9072	9.6663	5.3288	8.0652	8.7924	9.3969
23	6.3490	2.3490	4.6540	8.3008	9.2124	10.1241	5.2492	8.0482	8.5846	9.0077
24	6.6280	6.6090	3.9949	6.4658	7.0835	7.7012	3.7413	6.3284	6.8501	7.4046
25	7.1060	2.0840	4.7727	8.2612	9.1333	10.0055	4.7318	8.2833	9.2756	10.2880
26	7.1880	1.7980	4.4327	7.1081	7.7770	8.4459	4.2006	7.0344	7.7114	8.2677
27	7.5790	3.5590	5.2567	9.0303	9.9737	10.9171	5.5823	8.7239	9.2929	9.7880
28	8.9310	7.5400	3.9690	7.0753	7.8519	8.6285	4.1771	7.1031	7.8033	8.3627
29	9.2970	7.1810	4.4521	7.1017	7.7641	8.4265	4.1584	7.2736	8.0961	8.9107
30	9.7360	8.8430	4.1700	6.4074	6.9667	7.5261	3.7865	6.5935	7.1936	7.6430

جدول ۲: نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی انفیس

مقدار خطا روش پیشنهادی انفیس	0.02501
تابع عضویت	گوسی
تابع عضویت خطی	خطی
تعداد داده‌های جفت شده آموزش داده شده	24
تعداد داده‌های جفت شده آزمون شده	6
تعداد قوانین فازی	4

جدول ۳: مقادیر پارامترهای اولیه بدست آمده با روش انفیس وقتی که $k=5$

i	(τ_1, σ_1)	(τ_2, σ_2)	(τ_3, σ_3)	(τ_4, σ_4)
1	(6.02, 7.72)	(4.84, 15.8)	(5.24, 4.32)	(4.44, 15.9)
2	(6.79, 6.37)	(5.14, 14.01)	(6.71, 5.01)	(4.39, 14.75)
3	(4.36, -0.05)	(3.68, 8.08)	(4.00, 2.62)	(5.38, 10.32)
4	(5.87, 3.27)	(3.12, 12.95)	(5.70, 2.89)	(5.51, 9.91)
5	(6.03, 7.20)	(4.81, 15.6)	(6.83, 4.88)	(4.11, 15.03)

جدول ۴: مقادیر پارامترهای ثانویه بدست آمده با روش پیشنهادی (انفیس) وقتی که $k=5$

i	$(b_0^i, \alpha_0^i, c_0^i)$	$(b_1^i, \alpha_1^i, c_1^i)$	$(b_2^i, \alpha_2^i, c_2^i)$	$(b_3^i, \alpha_3^i, c_3^i)$
1	(-2.15, -1.27, 12.5)	(0.97, -5.91, 82.40)	(-7.57, 1.37, 121.65)	(0.30, 3.17, -61.7)
2	(-3.147, -1.84, 12.58)	(0.63, -3.87, 68.65)	(-4.08, 1.17, 84.22)	(-1.85, -0.058, 11.63)
3	(8.08, 4.98, 12.75)	(-10.87, 9.07, -83.43)	(4.8, -4.04, -47.5)	(-4.52, -3.73, 103.44)
4	(-1.78, -4.14, 4.21)	(0.51, -2.22, 48.37)	(-6.74, -1.45, 67.1)	(1.53, -5.18, 49.37)
5	(-1.98, -1.27, 12.8)	(0.34, -4.43, 70.01)	(-6.43, 1.32, 103.8)	(-5.29, 4.37, -7.52)

$$e_i = 1/4f(X_i) + rand[0.1].$$

روش انفیس را برای برآورد مدل رگرسیون به کار می‌بریم. مقدار خطا بصورت عددی و پارامترهای اولیه و ثانویه با روش فوق محاسبه می‌شوند شکل ۴ مقادیر مشاهده شده و مقادیر پیش‌بینی شده توسط روش پیشنهادی را نشان داده می‌دهد. در این شکل خطوط مرکزی، خطوط مرزی بالا و پایین عملکرد واقعی و برآورد آنها رسم شده است. نتایج حاصل از محاسبات در جدول ۵ و ۶ آورده شده است.

مثال ۲: در این مثال از داده‌های تولید شده توسط

چنگ و لی در [۳۲] استفاده می‌شود. تابع را

$$f(x) = \frac{x^2}{5} + 2e^{\frac{x}{10}}$$

را در نظر بگیرید. مقادیر X_i از توزیع یکنواخت بین فاصله $[0,1]$ که

$i=1, \dots, 100$ انتخاب می‌شوند و

$$\tilde{Y}_i = (Y_i^{(1)} \cdot Y_i^{(2)} \cdot Y_i^{(3)} \cdot Y_i^{(4)}) =$$

$$(y_i - e_i \cdot y_i + \frac{1}{3}e_i \cdot y_i + \frac{2}{3}e_i \cdot y_i + e_i)$$

که

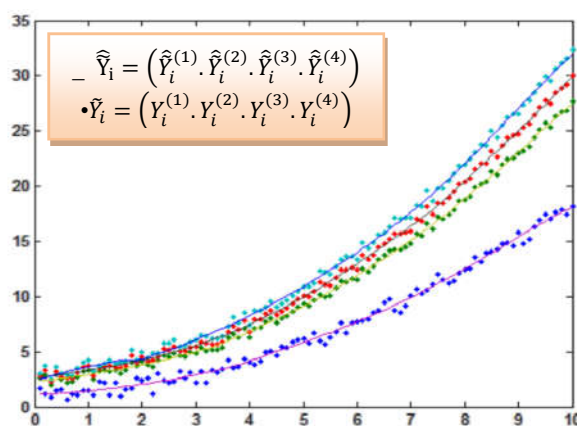
$$y_i = f(X_i) + rand[0.5, 0.5].$$

جدول ۵: نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی انفیس

مقدار خطا روش پیشنهادی انفیس	0.05197
تابع عضویت	گوسی
تابع عضویت خطی	خطی
تعداد داده‌های جفت شده آموزش داده شده	15
تعداد داده‌های جفت شده آزمون شده	4
تعداد قوانین فازی	2

جدول ۶: مقادیر پارامترهای اولیه و ثانویه بدست آمده با روش پیشنهادی (انفیس) وقتی که $k=5$

i	(τ_1, σ_1)	(τ_2, σ_2)	(τ_3, σ_3)	(b_0^i, α_0^i)	(b_1^i, α_1^i)	(b_2^i, α_2^i)
1	(1.59, 2.18)	(1.69, 3.24)	(0.41, 8.82)	(0.44, 6.12)	(3.23, -6.8)	(4.24, -15)
2	(0.847, 2.32)	(3.24, 6.74)	(3.31, 9.35)	(0.90, 1.94)	(0.53, 0.0)	(2.91, 18.8)
3	(0.46, 2.28)	(1.93, 8.73)	(1.90, 9.37)	(1.03, 1.82)	(-1.1, 0.14)	(4.05, 19.8)
4	(2.28, 1.91)	(2.47, 3.89)	(0.68, 7.69)	(0.82, 9.2)	(4.38, -13.35)	(4.28, -14.0)
5	(2.21, 1.38)	(1.61, 3.04)	(0.51, 8.18)	(2.95, 4.18)	(2.57, -7.58)	(4.6, -16.55)



شکل ۴: نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی (انفیس)

۷. نتیجه‌گیری

روش سیستم استنتاج فازی تطبیقی برای برآورد مدل رگرسیون فازی غیرپارامتری با ورودی‌های غیرفازی و خروجی‌های فازی بررسی شد. سپس دو الگوریتم رگرسیون فازی ترکیبی ارائه شده است. در الگوریتم پیشنهادی، یک روش شیب کاهشی برای بهینه‌سازی پارامترهای اولیه (وزن‌های فازی) استفاده شد. پارامترهای ثانویه با استفاده از روش حداقل مربعات دیاموند برآورد شده است. ورودی‌های غیرفازی و خروجی‌های فازی دوزنقه‌ای در نظر گرفته شده است. برای ارزیابی عملکرد روش، از نمونه‌های شبیه‌سازی استفاده شده است. با استفاده از نتایج آزمایش‌های شبیه‌سازی انجام شده، نشان داده شده است که عملکرد روش پیشنهادی

باعث کاهش مقدار CV می‌شود. در روش پیشنهادی، هنگامی که تعداد مشاهدات افزایش می‌یابد، دقت در مقایسه با روش‌های هموارسازی موجود افزایش می‌یابد. این مزایا الگوریتم ما را برای تولید توابع رگرسیون غیرپارامتری قابل قبول می‌کند. [۲۳، ۳۵، ۴۲]

[10]. Ishibuchi, H., Tanaka, H.: Fuzzy regression analysis using neural networks. *Fuzzy Sets and Systems* 50, 257-265 (1992).

[11]. Ishibushi, H. Tanaka, Fuzzy neural networks with interval weights and its application to fuzzy regression analysis, *Fuzzy Sets and Systems* 57 (1993) 27-39.

[12]. Chang, P. T., Lee, E. S., A generalized fuzzy weighted least-squares regression, *Fuzzy Sets and Systems* 82(1996) 289-298.

[13]. M. S. Yang, T. S. Lin, Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input-output data, *Fuzzy Sets and Systems* 126 (2002) 389-399.

[14]. M. S. Yang, H. H. Liu, Fuzzy least-squares algorithms for interactive fuzzy linear regression models, *Fuzzy Sets and Systems* 135 (2003) 305-316.

[15]. R. Coppi, P.D' Urso, P. Giordani, A Santoro, Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response, *Computational Statistics and Data Analysis* 51 (2006) 267-286.

[16] J. D. Sanchez, A. T. Gomez, Applications of fuzzy regression in actuarial analysis, *Journal of Risk Insurance* 70 (2003) 665- 699.

[17]. Tanaka, H., Hayashi, I., Watada, J.: Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data. *European Journal of Operational Research* 40, 389-396 (1989).

[18]. Tanaka, H., Ishibushi, H.: Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters. *Fuzzy Sets and Systems* 41, 145-160 (1991).

فهرست منابع

[1]. Zadeh, A.: Fuzzy sets, *Inform and Control* 8, 338-353 (1965).

[2]. Tanaka, H., Uejima, S., Asia, K.: Linear regression analysis with fuzzy model. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 12, 903-907 (1982).

[3]. Diamond, P.: Fuzzy least squares. *Information Sciences* 46, 141-157 (1988).

[4] C. Kao, C. L. Chyu, A fuzzy linear regression model with better explanatory power, *Fuzzy Sets and Systems* 126 (2002) 401-409.

[5]. H. T. Lee, S. H. Chen, Fuzzy regression model with fuzzy input and output data for manpower forecasting, *Fuzzy Sets and Systems* 119 (2001) 205-213.

[6]. H.T. Lee, H. Tanaka, Fuzzy approximations with non-symmetric fuzzy parameters in fuzzy regression analysis, *Journal of the Operations Research Society of Japan* 42 (1999) 98-112.

[7]. Hong, D.H., Lee, S., Do, H.Y.: Fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data using shape-preserving operations, *Fuzzy Sets and Systems* 122, 513-526 (2001).

[8]. Kim, B., Bishu, R.R.: Evaluation of Fuzzy linear regression models by comparison membership function, *Fuzzy Sets and Systems* 100, 343-352 (1998).

[9]. Tanaka, H., Watda, J.: Possibilistic linear systems and their application to the linear regression, *Fuzzy Sets and Systems* 27, 275-289 (1988).

- [28]. Takagi, T., Sugeno, M.: Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 15, 116-132 (1985).
- [29]. Ishibuchi, H., Kwon, K., Tanaka, H.: A learning algorithm of fuzzy neural networks with triangular fuzzy weights. Fuzzy Sets and Systems 71, 277-293 (1995).
- [30]. Cheng, C.-B., Lee, E. S.: Applying Fuzzy Adoptive Network to Fuzzy Regression Analysis. Computers and Mathematics with Applications 38, 123-140 (1999).
- [31]. Cheng, C.-B., Lee, E.S.: Fuzzy regression with radial basis function networks. Fuzzy Sets and Systems 119, 291-301 (2001).
- [32]. Kartalopoulos, S.: Understanding neural networks and fuzzy logic, IEEE Press, NY. 1996.
- [33]. Razzaghnia, E. Pasha, E. Khorram, A. Razzaghnia, Fuzzy linear regression analysis with trapezoidal coefficients, First Joint Congress On Fuzzy and Intelligent Systems 2007, Aug. 29-31, Mashhad, Iran.
- [34]. Razzaghnia, T., Danesh, S.: Nonparametric Regression with Trapezoidal Fuzzy Data. International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication (IJRITCC), 3826 – 3831 (2015).
- [35]. Razzaghnia, T., Regression parameters prediction in data set with outliers using neural network. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 48 (4), 1170 – 1184 (2019).
- [19]. Tanaka, H., Lee, H.: Interval regression analysis by quadratic programming approach. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 6, 473-481 (1998).
- [20]. Farnoosh, R., Ghasemian J., Soleymani fard, O.: A modification on ridge estimation for fuzzy nonparametric regression. Iranian Journal of Fuzzy System 9 (2), 75-88 (2012).
- [21]. Hardle, W.: Applied Nonparametric Regression, Cambridge University Press, New York, (1990).
- [22]. D. O. Loftsgaarden and G.P. Quesenberry, A nonparametric estimate of a multivariate density function, Annals of Mathematical Statistics 36, 1049-1051, (1965).
- [23]. Danesh, Farnoosh, Razzaghnia. Fuzzy nonparametric regression based on an adaptive neuro-fuzzy inference system, Neurocomputing 173, (2016)
- [24]. Fausett, L.V.: Fundamentals of neural networks: architectures, algorithms, and applications. Prentice Hall; 1994.
- [25]. Loftsgaarden, D.O. and Quesenberry, G.P.: A nonparametric estimate of a multivariate density function, Annals of Mathematical Statistics 36, 1049-1051(1965).
- [26]. Razzaghnia, T., Danesh, S., Maleki, A.: Hybrid fuzzy regression with trapezoidal fuzzy data. Proc. SPIE 8349, 834921-1-6, (2011).
- [27]. Reden, D.T., Woodal, W.H.: Properties of certain fuzzy linear regression models, Fuzzy Sets and Systems 64, 361-375(1994).

- [41]. D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application, Academic Press, New York, 1980.
- [42]. Wang, N., Zhang, W. X., Mei, C. L.: Fuzzy nonparametric regression based on local linear smoothing technique. Information Sciences 177, 3882-3900 (2007).
- [36] Škrjanc. I, Antonio Iglesias. J, Sanchis. A, Leite. D, Lughofer. E, Gomide. F, Evolving fuzzy and neuro-fuzzy approaches in clustering, regression, identification, and classification: A Survey, Information Sciences 490,344- .369, 2019.
- [37] Junhong. L, Zeng. W, Xie. J, Yin. Q, A new fuzzy regression model based on least absolute deviation, Engineering Applications of Artificial Intelligence 52, 54-64, 2016.
- [38] Deng. W and Zhao., A novel collaborative optimization algorithm in solving complex optimization problems. Soft Computing 21(15), 4387-4398, 2017.
- [39] Khosravia. K, Shahabib. H, A comparative assessment of flood susceptibility modeling using Multi-Criteria Decision-Making Analysis and Machine Learning Methods, Journal of Hydrology 573, 311-323, 2019.
- [40] Liu.T, Zhang.W, McLean. P, Electronic Nose-Based Odor Classification using Genetic Algorithms and Fuzzy Support Vector Machines, International Journal of Fuzzy Systems 20,1309-1320, 2018.