دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تعمیمی از حدس اردوش- سرپینسکی

حمید ترابی[1]*، امیرعلی فاتحی‌زاده[2]

(۱) استادیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۱۳

چکیده

فرض کنید $\sigma(n)$ مجموع مقسوم علیه‌های عدد n باشد. در این مقاله ابتدا با تمرکز بر حدس اردوش- سرپینسکی، که به بیان نامتناهی بودن مجموعه جواب معادله‌ی $\sigma(n+1)=\sigma(n)$ می‌پردازد، ضمن مرور بر برخی از تحقیقاتی که سعی در حل معادلات شامل σ دارند، به عنوان تعمیمی از معادله‌ی $\sigma(n+1)=\sigma(n)$ به بررسی جواب‌های معادله‌ی $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ در شرایط مختلف می‌پردازیم. به عنوان مثال با استفاده از نمایش بدست آمده از اعداد تام نشان می‌دهیم تنها عدد اول که جوابی از معادله‌ی $\sigma(n+1)=2\sigma(n)$ باشد، ۵ است و با استفاده از آن نتیجه می‌گیریم عدد اول n در صورتیکه مخالف ۵ باشد جواب معادله $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ است اگر و تنها اگر عدد $n+1$ عددی کا-تام باشد. همچنین نشان می‌دهیم تنها جواب معادله‌ی $\sigma(n+1)=2^r\sigma(n)$ که بصورت $n=p$,$n+1=2q_1q_2\ldots q_s$ باشد که در آن $s\leq r$ و q_1 ، q_2، ...، q_s و p اعدادی فرد و اول هستند، به ازای $(n,r)=(5,1)$ است.

واژه‌های کلیدی: تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد، تابع ضربی، اعداد تام، اعداد کا-تام.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:h.torabi@um.ac.ir

۱. مقدمه

هر تابعی که دامنه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی عددهای طبیعی باشد تابع حسابی نامیده می‌شوند. تابع حسابی f را ضربی گویند هرگاه برای هر دو عدد صحیح مثبت و متباین m, n داشته باشیم $f(mn) = f(m)f(n)$.

از مهمترین توابع حسابی که نقش بسزایی در مطالعه‌ی مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی دارد، تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد است. مجموع مقسوم علیه‌های عدد n را با $\sigma(n)$ نشان می‌دهند. از جمله ویژگی‌های این تابع ضربی بودن آن است. اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های p^k برابر با $\{1, p, p^2, \dots, p^k\}$ است و در نتیجه

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + \dots + p^k = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$

بنابراین اگر $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ یک عدد طبیعی دلخواه باشد، چون تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد تابعی ضربی است پس

$$\sigma(n) = \prod_{1 \le i \le r} \sigma(p^{k_i}) = \prod_{1 \le i \le r} \frac{{p_i}^{k_i+1}-1}{p_i-1}$$

تابع مجموع مقسوم علیه یک عدد در نظریه اعداد کاربرد و اهمیت فراوانی دارد و دارای حدس‌های مهمی می‌باشد. یکی از این حدس‌ها حدس معروف اردوش–سرپینسکی است که تا کنون رد یا اثبات نشده است[۱۷].

حدس اردوش- سرپینسکی. بینهایت عدد وجود دارد بطوریکه $\sigma(n+1) = \sigma(n)$.

دنباله‌ی جواب‌های این معادله عبارت‌اند از

$$14, 206, 957, 1334, 1334, 1364, 1634, 2685, 2974, 4364, 14841 \dots$$

هانسوکر و همکاران در مقاله‌ی خود [۷] جواب‌های این معادله را تا $n < 10^7$ ارایه کردند و این حدس را بیان کردند که اگر n در معادله‌ی $\sigma(n+1) = \sigma(n)$ صدق کند و هر دو عدد n و $n+1$ خالی از مربع نباشند آنگاه باقیمانده‌ی n بر 4 برابر با 0 یا 1 است. بعد از آن گی و شانکس یک جواب جدید برای $\sigma(n+1) = \sigma(n)$ ارایه می‌دهند [۵]. همانطور که از حدس مذکور مشاهده می‌شود بدست آوردن نتایج در این زمینه دشوار است. با این حال در پژوهش‌های مختلف مانند[۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴ و ۱۵] محققان سعی در بررسی و حل معادلات شامل تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد، هر چند تحت شرایطی خاص پرداختند. به‌عنوان مثال بنیتو شرایطی لازم برای آنکه عدد طبیعی n جواب معادله‌ی $\sigma(n+1) = \sigma(n)$ باشد ارایه داده است [۱] و وینگارتنر به بررسی معادله‌ی $\sigma(n+k) = \sigma(n)$ پرداخته است [۱۷]. همچنین هاکانن در مقاله‌ی خود [۶] جواب‌های معادله‌ی $\sigma(n+2) = \sigma(n) + 2$ با محدودیتی روی n ارایه داده است. در این مقاله به‌عنوان تعمیمی از معادله‌ی $\sigma(n+1) = \sigma(n)$ به بررسی جواب‌های معادله‌ی $\sigma(n+1) = k\sigma(n)$ در شرایط مختلف می‌پردازیم.

یکی دیگر از حدس‌های مهم درباره‌ی مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد، حدس‌های درباره اعداد تام می‌باشد. از نظر فیثاغورسیان اینکه مجموع مقسوم علیه‌های مثبت عدد شش بجز خودش برابر با شش است نکته‌ی قابل توجه بوده است و طبق فلسفه‌ی خود خواص اسرارآمیزی برای اینگونه اعداد معتقد بودند و چنین عددهایی را تام نامگذاری کردند. به عبارت دیگر عدد n را تام گویند هرگاه $\sigma(n) = 2n$. اعداد تام خود دارای مساله‌های مهم و جالبی می‌باشد از جمله آنکه که آیا عدد تام فرد وجود دارد؟ نیکوماخوس در حساب مقدماتی خود به بیان اولین اعداد تام به شرح زیر پرداخت.

$$P_1 = 6, P_2 = 28, P_3 = 496, \ P_4 = 8128.$$

با پیشرفت پژوهش‌ها در این زمینه، اعدادی با ویژگی جدید اما مشابه اعداد تام مورد توجه قرار گرفت. به ازای هر عدد $k \ge 3$ عدد طبیعی n را کا–تام گویند هرگاه $\sigma(n) = kn$. گاهی به اعداد کا–تام چند تام هم گفته می شود. به عنوان مثال عدد طبیعی $n = 2^9 \times 3 \times 11 \times 31$ یک عدد ۳–تام است. همچنین عدد $m = 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7$ یک عدد ۴–تام است. یک حدس مطرح شده درباره‌ی اعداد چند تام

اینست که برای هر عدد $k \geq 3$ تنها تعداد متناهی عدد کا–تام وجود دارد. برای آشنایی و مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه به [۲ و ۱۲] رجوع شود.

از جمله توابع حسابی مطرح در نظریه‌ی اعداد تابع فی اویلر است که آن را با نماد φ نشان می‌دهند. برای هر عدد طبیعی n، $\varphi(n)$ برابر است با تعداد اعداد طبیعی کمتر از n که نسبت به n اول هستند. تابع فی اویلر مانند تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد تابعی ضربی است. برخی از محققان به بررسی معادلات شامل تابع فی اویلر و تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد پرداختند. به عنوان مثال اخیرا کیم و همکاران مشابه حدس اردوش به‌بررسی معادله در اعداد طبیعی $\varphi(n+1) = \varphi(n)$ تحت شرایطی پرداخته است [۸]. فورد و همکاران نشان دادند معادله‌ی به صورت $\varphi(n) = \sigma(n)$ نامتناهی جواب دارد [۴]. فورد در مقاله‌ی خود [۳] به بررسی حدس سرپینسکی درباره‌ی جواب‌های معادله‌ی $\varphi(n) = k$ و $\sigma(n) = k$ پرداخته است. ما در این مقاله در بخش دوم با اثبات قضایایی سعی در به دست آوردن جواب‌های معادله‌ی $\sigma(n+1) = k\sigma(n)$ با شرط اول بودن n می‌پردازیم. از جمله آنکه نشان می‌دهیم تنها جواب معادله‌ی $\sigma(n+1) = 2\sigma(n)$ با فرض اول بودن n تنها $n = 5$ است و با استفاده از آن نشان می‌دهیم که عدد اول $n \neq 5$ جواب معادله‌ی $\sigma(n+1) = k\sigma(n)$ است اگر و تنها اگر عدد $n+1$ عددی کا–تام باشد. در بخش سوم به بررسی وجود جواب برای معادله‌ی $\sigma(n+1) = k\sigma(n)$ وقتی k یا $k-1$ عددی اول باشد می‌پردازیم. در بخش چهارم به بررسی وجود جواب برای معادله‌ی $\sigma(n+1) = k\sigma(n)$ وقتی k بصورت 2^r باشد می‌پردازیم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم تنها جواب معادله‌ی $\sigma(n+1) = 2^r\sigma(n)$ که بصورت $n = p\ , n+1 = 2q_1q_2 \dots q_s$ باشد که در آن $s \leq r$ و q_1 ، q_2، ....، q_s و p اعدادی فرد و اول هستند، به ازای $r = 1$ و $p = 5$ است.

۲. بررسی معادله $\boldsymbol{\sigma(n+1) = k\sigma(n)}$ به ازای اعداد اول

در این بخش سعی در حل معادله‌ی به صورت $\sigma(n+1) = k\sigma(n)$ با فرض اول بودن n داریم. در ابتدا لم زیر را داریم.

لم۱.۲. اگر برای عدد طبیعی n، داشته باشیم $\sigma(n+1) = \sigma(n)$ آنگاه n نمی‌تواند عددی اول باشد.

برهان. چون n عدد اول است پس $\sigma(n) = n+1$ از طرفی می‌دانیم برای هر عدد طبیعی m، $\sigma(m) > m$. بنابراین با توجه به نکته‌ی اخیر $\sigma(n+1) > n+1 = \sigma(n)$.

مثال۲.۲. اگر قرار دهیم $n = 5$، آنگاه $\sigma(n) = 6 = 5+1$. از طرفی $\sigma(n+1) = \sigma(6) = 12 = 6+3+2+1$. بنابراین $\sigma(n+1) = 2\sigma(n)$.

در ادامه نشان می‌دهیم تنها عدد اول n که در معادله‌ی $\sigma(n+1) = 2\sigma(n)$ صدق می‌کند، ۵ است. بدین منظور ابتدا قضیه ۱.۱۱ از [۲] که در آن نمایش و دسته بندی از همه‌ی اعداد تام زوج را ارایه می‌دهد، بیان می‌کنیم.

قضیه۳.۲. اگر عدد $2^k - 1$ *اول باشد آنگاه عدد* $T_k = 2^{k-1}(2^k - 1)$ *تام است و هر عدد تام زوج به اینصورت است.*

قضیه۴.۲. فرض کنیم n عددی اول است. در این صورت $\sigma(n+1) = 2\sigma(n)$ اگروتنها اگر $n = 5$.

برهان. چون n عدد اول است بنابراین $\sigma(n) = n+1$. بنا بر فرض صورت قضیه داریم $\sigma(n+1) = 2\sigma(n) = 2(n+1)$.

پس $n+1$ عددی تام است. از طرفی چون n عددی اول است و $n = 2$ در معادله‌ی به صورت $\sigma(n+1) = 2\sigma(n)$ صدق نمی‌کند، بنابراین $n+1$ عددی زوج است. بنابر قضیه‌ی قبل عدد طبیعی k چنان موجود است به طوری که داریم

$n+1=T_k=2^{k-1}(2^k-1)$ و 2^k-1 عددی اول است. با استفاده از ویژگی‌های همنهشتی داریم $2^k-1\equiv(-1)^k-1(mod\ 3)$. پس اگر k عددی زوج باشد، آنگاه داریم $2^k-1\equiv 0(mod\ 3)$. در نتیجه 2^k-1 *مضربی از ۳ است.* بنابراین اگر k یک عدد زوج بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه 2^k-1 *عددی* بزرگتر از ۳ و مضربی از ۳ است و در نتیجه 2^k-1 *نمی‌تواند اول باشد. بنابراین* k یک عدد زوج بزرگتر از ۲ *نیست. اگر داشته باشیم* $k=2$ *آنگاه* $T_k=6$ *و* $n=5$ *که بنابر* مثال قبل یک جواب برای معادله‌ی به صورت $\sigma(n+1)=2\sigma(n)$ است. حال نشان می‌دهیم k نمی‌تواند فرد باشد. به برهان خلف فرض کنیم k فرد باشد. در این صورت

$$n=T_k-1=2^{2k-1}-2^{k-1}-1.$$

با استفاده از ویژگی‌های همنهشتی داریم

$$n\overset{3}{\equiv}(-1)^{2k-1}-(-1)^{k-1}-1\equiv 0(mod\ 3).$$

پس n مضربی از ۳ است. از طرفی چون $k>1$ پس $n>3$ و در نتیجه n عددی مرکب است که این با فرض اول بودن n در تناقض است.

نتیجه۲.۵. اگر *عدد* $n\neq 5$ اول و k عددی طبیعی باشد آنگاه $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ اگروتنها اگر عدد $n+1$ عددی کا-تام است.

برهان. اگر عدد $n+1$ عددی کا-تام باشد پس عددی طبیعی $k\geq 3$ چنان موجود است که داریم $\sigma(n+1)=k(n+1)$. چون عدد n *اول است پس* $\sigma(n)=n+1$. بنابراین داریم $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$. اکنون فرض کنیم $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ بنا بر لم ۱.۲، $k\neq 1$ و بنابر قضیه‌ی ۲.۲ چون $n\neq 5$ پس $k\neq 2$. در نتیجه $k\geq 3$ و بنابر تعریف، $n+1$ عددی کا-تام است زیرا $\sigma(n+1)=k\sigma(n)=k(n+1)$.

قضیه ۲.۶. تنها جواب معادله در اعداد طبیعی $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ که به صورت $n=p$ و $n+1=2q$ باشد که در آن p,q اول هستند به ازای $n=5$ و $k=2$ است.

برهان. فرض می‌کنیم معادله جوابی به صورت $n=p$ و $n+1=2q$ داشته باشد که در آن p,q اول هستند. در این صورت باتوجه به ضربی بودن تابع مجموع مقسوم علیه‌ها داریم.

$$3(q+1)=\sigma(2)\sigma(q)=\sigma(p+1)=k\sigma(p)=k(p+1)\ .$$

از طرف دیگر با استفاده از فرض قضیه داریم $p+1=2q=q+q>q+1$. از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود $k<3$ یا به طور معادل $k\in\{1,2\}$. با توجه به لم ۱، $k\neq 1$. بنابراین $k=2$ و با استفاده از قضیه‌ی ۲.۲ تنها جواب معادله $\sigma(n+1)=2\sigma(n)$ با فرض اول بودن n، $n=5$ است. بنابراین تنها، جواب $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ با فرض $n=p$ و $n+1=2q$ به ازای $p=5,$ $q=3$ و $k=2$ است.

۳. بررسی معادله برای $k\in\{p,p+1\}$

در این بخش برروی دو حالت خاص کار می‌کنیم و سعی در بدست آوردن شروط لازم و کافی برای وجود جواب معادله $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ در حالت‌هایی که $k\in\{p,p+1\}$ می‌پردازیم که در آن p عددی اول است.

قضیه۳.۱. فرض کنیم q_2,q_1 اعداد اول باشند. اگر برای یک عدد طبیعی مانند M داشته باشیم $\sigma(M)=k(M+q_1+q_2)$ و همچنین $M=q_1q_2+1$ آنگاه معادله بصورت $\sigma(n+1)=k\sigma(n)$ دارای جواب است.

برهان. قرار می‌دهیم $n=q_1q_2$ و با توجه به ضربی بودن تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد داریم

$$\sigma(n)=(q_1+1)(q_2+1)$$
$$=q_1q_2+q_1+q_2+1.$$

از طرفی داریم
$$\sigma(n+1)=\sigma(q_1q_2+1)=\sigma(M)=k(M+q_1+q_2)$$

با جایگذاری روابط اخیر در فرض بدست می‌آوریم
$$\sigma(n+1)=k(M+q_1+q_2)$$

بنابر فرض $M=q_1q_2+1$ داریم
$$\sigma(n+1)=k(q_1q_2+1+q_1+q_2)=k\sigma(n)$$

مثال ۲.۳. با فرض $k=3$، $q_1=1$ و همچنین $q_2=101$ و $\mathrm{M}=1920$ داریم $M=q_1q_2+1$ و $\sigma(q_1q_2+1)=\sigma(19*101+1)=6120$. همچنین
$$k(q_1q_2+1+q_1+q_2)=3(19*101+1+19+101)=6120$$

بنابر برهان قضیه‌ی قبل یک جواب برای معادله‌ی $\sigma(n+1)=3\sigma(n)$، $n=1919$ است.

نتیجه۳.۳. فرض می‌کنیم
$$p,p_1,q_1,q_2$$

اعداد اول و فرد باشند و عدد طبیعی t چنان موجود باشد که
$$\left(\frac{2^{t+1}-1}{p}\right)(p+1)(p_1+1)=2^tpp_1+q_1+q_2 \text{ و } 2^tpp_1=q_1q_2+1$$

آنگاه معادله‌ی $\sigma(n+1)=p\sigma(n)$ دارای جواب است.

برهان. قرار می‌دهیم $M=2^tpp_1$ و با توجه به ضربی بودن تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد داریم
$$\sigma(M)=\sigma(2^tpp_1)=(2^{t+1}-1)(p+1)(p_1+1)=p(M+q_1+q_2)$$

حال شرایط قضیه‌ی ۱.۳ برقرار و در نتیجه حکم برقرار است.

قضیه۴.۳. فرض کنیم p,q,s اعداد اول باشند. اگر برای یک عدد طبیعی مانند M داشته باشیم
$$\sigma(M)=pM+s+q,sq=pM-1$$

آنگاه معادله‌ی $\sigma(n+1)=(\mathrm{p}+1)\sigma(n)$ دارای جواب است.

برهان. قرار می‌دهیم $n=sq$ با توجه به فرض داریم
$$n+1=sq+1=pM$$

چون
$$gcd(p,M)=1$$

بنابراین با توجه به اینکه تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد تابعی ضربی است داریم
$$\sigma(n+1)=\sigma(pM)=(p+1)\sigma(M)$$

از طرف دیگر با توجه به فرض داریم
$$\sigma(M)=pM+s+q=sq+1+s+q$$

که نتیجه می‌دهد
$$\sigma(M)=(s+1)(q+1)=\sigma(sq)=\sigma(n)$$

بنابراین
$$(p+1)\sigma(M)=(p+1)\sigma(n).$$

با توجه به رابطه‌ی بالا داریم
$$\sigma(n+1)=(p+1)\sigma(M)=(p+1)\sigma(n).$$

۴. بررسی معادله برای $k=2^r$

در این بخش معادله $\sigma(n+1)=2^r\sigma(n)$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره۱.۴. فرض می‌کنیم q,s اعداد اول باشند. اگر 2^r-1 اول باشد و برای یک عدد طبیعی مانند M داشته باشیم
$$\sigma(M)=(2^r-1)M+s+q,\ sq=(2^r-1)M-1$$

آنگاه معادله‌ی $\sigma(n+1) = 2^r\sigma(n)$ دارای جواب است.

برهان. قرار می‌دهیم $p = (2^r - 1)$. چون بنا بر فرض $2^r - 1$ اول است، شرایط قضیه‌ی ۴.۳ برقرار است. بنابراین عدد طبیعی n موجود است بطوری که $\sigma(n+1) = (p+1)\sigma(n) = 2^r\sigma(n)$ حال یک قضیه دیگر را دراین حالت اثبات می‌کنیم.

قضیه۲.۴. فرض کنیم r عددی طبیعی باشد. در این صورت تنها جواب معادله در اعداد طبیعی $\sigma(n+1) = 2^r\sigma(n)$ که بصورت $n = p$ ، $n+1 = 2q_1q_2\ldots q_s$ باشد که در آن $s \leq r$ و q_1 ، q_2، ...، q_s و p اعدادی فرد و اول هستند به ازای $r = 1$ و $p = 5$ است.

برهان. فرض کنیم معادله‌ی در اعداد طبیعی $\sigma(n+1) = 2^r\sigma(n)$ جوابی بصورت $n = p$,$n+1 = 2q_1q_2\ldots q_s$ دارد. در این صورت چون $n+1 = 2q_1q_2\ldots q_s$ پس

$$\sigma(n+1) = 3(q_1+1)(q_2+1)\ldots(q_s+1)$$

بنابراین

$$3(q_1+1)(q_2+1)\ldots(q_s+1) = 2^r(p+1)$$

که نتیجه می‌دهد

$$3\left(\frac{q_1+1}{2}\right)\left(\frac{q_2+1}{2}\right)\ldots\left(\frac{q_s+1}{2^{r-s+1}}\right) = (p+1).$$

با استفاده از فرض $2q_1q_2\ldots q_r = p+1$ داریم

$$3\left(\frac{q_1+1}{2}\right)\left(\frac{q_2+1}{2}\right)\ldots\left(\frac{q_s+1}{2^{r-s+1}}\right) = 2q_1q_2\ldots q_s.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود $3 \mid 2q_1q_2\ldots q_s$. بنابراین بدون آنکه به کلیت مساله خللی وارد شود می‌توان فرض کرد $q_1 = 3$ بنابراین داریم

$$6\left(\frac{q_2+1}{2}\right)\ldots\left(\frac{q_s+1}{2^{r-s+1}}\right) = 6q_2\ldots q_s \Rightarrow$$
$$\left(\frac{q_2+1}{2}\right)\ldots\left(\frac{q_s+1}{2}\right) = 2^{r-s}q_2\ldots q_s.$$

که رابطه بالا نتیجه می‌شود $s = 1$. زیرا در غیر این صورت برای هر اندیس $2 \leq i \leq s$ چون $q_i > 2$ پس $\frac{q_i+1}{2} < q_i$. بنابراین

$$\left(\frac{q_2+1}{2}\right)\ldots\left(\frac{q_s+1}{2}\right) < q_2\ldots q_s$$

و این تناقض است. پس $s = 1$. حال با استفاده از قضیه‌ی ۲.۲ نتیجه می شود $r = 1$ و $n = 5$.

نتیجه‌گیری

در پژوهش‌های متعددی محققان سعی در بررسی و حل معادلات شامل تابع مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد، هر چند تحت شرایطی خاص پرداختند و گاهی حدس‌هایی بیان کرده‌اند. به عنوان مثال حدس معروف اردوش–سرپینسکی است که تاکنون رد یا اثبات نشده است. این حدس به بیان نامتناهی بودن مجموعه جواب معادله‌ی $\sigma(n+1) = \sigma(n)$ می‌پردازد .در این مقاله به عنوان تعمیمی از معادله در اعداد طبیعی $\sigma(n+1) = \sigma(n)$ به بررسی جواب‌های معادله $\sigma(n+1) = k\sigma(n)$ در شرایط مختلف در اعداد طبیعی پرداخته‌ایم.

فهرست منابع

[1] L. Benito, Solutions of the problem of Erdos-Sierpinski: $\sigma(n) = \sigma(n+1)$, arXiv: 0707.2190v1.

[2] D. M. Burton, Elementary number theory, Mc Grow Hil, 2007.

[3] K. Ford, The number of solutions of $\varphi(x) = m$, Annals of Mathematics, 150 (1999) 1-29.

[4] K. Ford, Florian Luca, and Carl Pomerance, Common values of the arithmetic functions φ and σ, Bull. Lond. Math. Soc. 42 (2010), 478–488.

[5] R. Guy and D. Shanks, A constructed solution of $\sigma(n) = \sigma(n+1)$, Fibonacci Quart., 12 (1974) 299-299.

[6] P. Haukkanen, Some computational results concerning the divisor functions d(n) and σ (n), Math. Student 62 (1993), 166–168.

[7] J.L. Hunsucker, J. Nebb, and R. E. Stearns, Computational results concerning some equations involving $\sigma(n)$, Math. Student 41 (1973), 285-28.

[8] D. Kim, U. Sarp, and S. Ikikardes, Certain combinatoric convolution sums arising from Bernoulli and Euler polynomials, Miskolic Mathematical Notes, 20 (2019) 311-330.

[9] W. E. Mientka and R. L. Vogt, Computational results relating to problems concerning $\sigma(n)$, Mat. Vesnik 7 (1970), 35–36.

[10] P. Pollack, On the greatest common divisor of a number and its sum of divisors, Michigan Math. J. 60 (2011) 199–214.

[11] P. Pollack, Some arithmetic properties of the sum of proper divisors and the sum of prime divisors, Illinois J. Math. 58 (2014) 125–147.

[12] P. Pollack and C. Pomerance, Prime-perfect numbers, Integers 12 (2012) 1417– 1437.

[13] P. Pollack and C. Pomerance, Some problems of Erdos on the sum-of-divisors function, Transactions of the American Mathematical Society, 7 (2016), 1-26.

[14] P. Pollack, M. Rassias and C. Pomerance, Remarks on fibers of the sum-of-divisors function, in Analytic number theory, Springer. Cham. Switzerland, (2015) 305–320.

[15] P. Pollack and L. Thompson, Arithmetic functions at consecutive shifted primes, International Journal of Number Theory, 11 (2015),1477-1498.

[16] C. Pomerace and H. Yang, Variant of a theorem of Erdos on the sum-of-proper-divisors function, Math. Comp. 83 (2014), 1903-1913.

[17] A. Weingartner, On the Solutions of $\sigma(n) = \sigma(n+k)$, Journal of Integer Sequences, 14 (2011) 1-7.