دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

گراف‌هایی که دارای تعداد کمی مقدار ویژه مثبت هستند

محمدرضا عبودی*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۱۲

چکیده

فرض کنید G گرافی ساده با رئوس v_1،...، v_n است. منظور از ماتریس اتصال G که آنرا با $A(G)$ نشان می‌دهیم ماتریسی است $n \times n$ بطوریکه درایه (i,j) آن را 1 قرار می‌دهیم اگر v_i به v_j وصل باشد، در غیر اینصورت قرار می‌دهیم 0. منظور از مقادیر ویژه G یعنی مقادیر ویژه $A(G)$. فرض کنید $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G)$ مقادیر ویژه G هستند. در این مقاله نتایجی را در مورد گراف‌هایی که دارای حداکثر سه مقدار ویژه نامنفی هستند، بدست می‌آوریم. بویژه دو رده زیر از گراف‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

۱) گراف‌هایی مانند G بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) = 0$ و $\lambda_4(G) < 0$.

۲) گراف‌هایی مانند G بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) > 0$ و $\lambda_4(G) < 0$.

واژه‌های کلیدی: گراف، مقادیر ویژه گراف‌ها، ماتریس اتصال گراف‌ها.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: mr_oboudi@yahoo.com; mr_oboudi@shirazu.ac.ir

۱- مقدمه

در سراسر این مقاله گراف‌ها ساده هستند، یعنی گراف‌ها فاقد طوقه، یال جهت‌دار و یال چندگانه هستند. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف است. بعبارت دیگر $V(G)$ و $E(G)$ به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های G هستند. منظور از مرتبه G یعنی تعداد رئوس G. برای هر دو راس u و v از G منظور از $e=uv$ یعنی اینکه e یال بین u و v است. منظور از درجه راس v که آن را با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم یعنی تعداد یال‌های متصل به v. راسی را تنها گوییم اگر درجه آن راس صفر باشد. یالی را برگ گوییم اگر درجه یکی از رئوس سر آن یک باشد. منظور از $G\backslash v$ یعنی گرافی که با حذف راس v از G بدست می‌آید (بطریق مشابه برای یال e منظور از $G\backslash e$ یعنی گرافی که با حذف یال e بدست می‌آید). منظور از گراف مکمل G که آنرا با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)$ بطوریکه در آن دو راس u و v به هم متصل هستند اگر و فقط اگر در گراف G به هم متصل نباشند. برای دو گراف مجزای G_1 و G_2 منظور از اجتماع آنها که آنرا با $G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهیم گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_1)\cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1)\cup E(G_2)$. گراف کامل، گراف دور، گراف مسیر و گراف ستاره از مرتبه n را به ترتیب با K_n، C_n، P_n و S_n نشان می‌دهیم. منظور از راس مرکزی ستاره S_n راسی است از درجه $n-1$. همچنین منظور از $K_{n_1,\dots,n_t}$ یعنی گراف چند بخشی کامل با بخش‌های n_1 راسی ،...، n_t راسی. بویژه منظور از K_{n_1,n_2} یعنی گراف دو بخشی کامل با بخش‌های n_1 راسی و n_2 راسی. فرض کنید H_1، H_2، ...، H_n گراف هستند. منظور از $G[H_1,\cdots,H_n]$ گرافی است که به جای هر راس v_k، برای $k=1,\dots,n$، قرار می‌دهیم H_k و در آن هر راس H_i را به هر راس H_j وصل می‌کنیم اگر و فقط اگر v_i و v_j در گراف G به هم متصل باشند. بعنوان مثال برای هر دو عدد طبیعی r و s داریم $K_2[K_r,K_s]=K_{r+s}$. فرض کنید G و H دو گراف مجزا هستند. فرض کنید u راسی از G بوده و T زیرمجموعه‌ای از رئوس H است. منظور از $G(u)*H(T)$ گرافی است که با متصل کردن راس u به رئوس T بدست می‌آید. بعنوان مثال اگر u راس درجه یک مسیر P_r باشد و S مجموعه تک راسی درجه یک مسیر P_t باشد، آنگاه داریم $P_r(u)*P_t(S)=P_{r+t}$. در رده بندی بسیاری از گراف‌ها از این دو عملگر استفاده می‌شود.

فرض کنید G گرافی ساده با رئوس v_1،...، v_n است. منظور از ماتریس اتصال G که آنرا با $A(G)$ نشان می دهیم ماتریسی است $n\times n$ بطوریکه مقدار درایه (i,j) آن را 1 قرار می‌دهیم اگر v_i به v_j وصل باشد، در غیر اینصورت مقدار آن درایه را 0 قرار می‌دهیم. منظور از مقادیر ویژه G یعنی مقادیر ویژه $A(G)$. از آنجا که $A(G)$ ماتریسی متقارن با درایه‌های حقیقی است، لذا طبق قضیه‌ای از جبر خطی تمام مقادیر ویژه آن حقیقی هستند. فرض کنید $\lambda_1(G)\geq\lambda_2(G)\geq\cdots\geq\lambda_n(G)$ مقادیر ویژه G هستند. نتیجه مهمی وجود دارد که بیان می کند $|\lambda_i(G)|\leq\lambda_1(G)$ (برای $i=1,\dots,n$). منظور از طیف گراف، گردایه همه مقادیر ویژه آن گراف است. طیف گراف G را با $Spec(G)$ نشان می‌دهیم. بعبارت دیگر $Spec(G)=\{\lambda_1(G),\lambda_2(G),\cdots,\lambda_n(G)\}$. مثلاً $Spec(K_4)=\{3,-1,-1,-1\}$ و $Spec(C_4)=\{2,0,0,-2\}$. منظور از چندجمله‌ای مشخصه G که آن‌را با $P(G,\lambda)$ نشان می‌دهیم یعنی $\det(\lambda I-A(G))$، که در آن I ماتریس همانی از سایز مرتبه G است. در حقیقت مقادیر ویژه گراف همان ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه آن هستند. یافتن مقادیر ویژه گراف‌ها در حالت کلی غیر ممکن است، لذا یکی از مسائل مهم مقادیر ویژه گراف‌ها یافتن کران‌های مناسب برای آنها است. خصوصاً مطالعه بزرگترین مقدار ویژه گراف‌ها که شعاع طیفی نامیده می‌شود از اهمیت خاصی برخوردار است. از دیگرمسائل مهم مقادیر ویژه گراف‌ها رده بندی گراف‌هایی است که مقادیر ویژه آنها اعداد خاصی هستند. مقالات و کتاب‌های متعددی در رابطه با مسائل فوق وجود دارند، برای نمونه به مراجع [1] الی [6] مراجعه کنید. برای هر گراف n راسی و m یالی G دو رابطه شناخته شده زیر در مورد مقادیر ویژه G وجود دارند [2]:

۱) $\lambda_1(G)+\cdots+\lambda_n(G)=0$

۲) ${\lambda_1}^2(G)+\cdots+{\lambda_n}^2(G)=2m$

روابط فوق نشان می‌دهند که اگر G حداقل یک یال داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر ویژه G هم علامت نیستند، بویژه داریم $\lambda_1(G) > 0$ در سال ۱۹۷۷ اسمیت [6] نشان داد که گراف G فقط یک مقدار ویژه مثبت دارد اگر و فقط اگر G اجتماع مجزایی از یک گراف چندبخشی کامل و چندین راس تنها باشد. اخیراً تمام گراف‌هایی که دارای دقیقاً دو مقدار ویژه نامنفی هستند بطور کامل رده‌بندی شده است [4]. همچنین در [4] تمام گراف‌هایی مانند G بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$ و $\lambda_3(G) < 0$ بطور کامل مشخص شده‌اند. در این مقاله گراف‌هایی را مطالعه می‌کنیم که دارای حداکثر سه مقدار ویژه نامنفی هستند. بویژه دو رده زیر از گراف‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) گراف‌هایی مانند G بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) = 0$ و $\lambda_4(G) < 0$.

۲) گراف‌هایی مانند G بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$ ، $\lambda_3(G) > 0$ و $\lambda_4(G) < 0$.

۲- گراف‌های نا همبند با حداکثر سه مقدار ویژه مثبت

در این بخش به رده‌بندی گراف‌های ناهمبندی می‌پردازیم که دارای حداکثر سه مقدار ویژه مثبت هستند. لازم به ذکر است که گراف G دارای دقیقا یک مقدار ویژه مثبت است اگر و فقط اگررئوس غیر تنهای G گراف چندبخشی کامل باشد. در مقاله [4] برای هر s، گراف خاص s راسی به نام G_s تعریف شده است، بطوریکه در رده بندی گراف‌های با دقیقاً دو مقدار ویژه نامنفی اهمیت دارد. با استفاده از این گراف‌ها نتیجه زیر بدست آمده است.

قضیه ۱.[4] فرض کنید G گرافی همبند با حداقل سه راس بوده بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$ و $\lambda_3(G) < 0$ در اینصورت اعداد صحیح مثبت $t_1, \dots, t_s$ وجود دارند بطوریکه $3 \le s \le 12$ و $G = G_s[K_{t_1}, \dots, K_{t_s}]$ که در آن G_s گرافی مشخص است. لازم به ذکر است که در مقاله [4] عکس قضیه فوق نیز بررسی شده است.

برای هر n، بطوریکه $n \ge 4$، سه مجموعه از گراف‌ها را در نظر می‌گیریم، مجموعه‌های O_n، W_n و Y_n. مجموعه O_n شامل همه گراف‌های همبند n راسی مانند G است بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$ و $\lambda_3(G) < 0$. مجموعه W_n متشکل از همه گراف‌های n راسی مانند G است بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) > 0$ و $\lambda_4(G) < 0$ مجموعه Y_n مجموعه همه گراف‌های n راسی مانند G است بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) = 0$ و $\lambda_4(G) < 0$ بعنوان مثال $O_4 = \{P_4, H_4\}$ که در آن H_4 گرافی است که از آویزان کردن یک یال به دور سه راسی بدست می‌آید. مجموعه O_n بطور دقیق در مقاله [4] مشخص شده است. براحتی می‌توان بررسی کرد که مجموعه‌های W_4 و Y_4 تهی هستند. در این بخش نتایجی را در مورد ساختار گراف‌های مجموعه‌های W_n و Y_n بدست می‌آوریم (برای $n \ge 5$). ابتدا گراف‌های ناهمبند مجموعه Y_n را تعیین می‌کنیم. برای اینکار به قضایای زیر نیاز داریم.

قضیه ۲.[4] فرض کنید G گرافی با $n \ge 2$ راس بوده بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) < 0$ در اینصورت G گراف کامل است.

قضیه ۳.[4] فرض کنید G گراف همبند با $n \ge 3$ راس بوده بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$ ، $\lambda_2(G) = 0$ و $\lambda_3(G) < 0$ در اینصورت $G = K_n \backslash e$، که در آن $e \in E(K_n)$. بعبارت دیگر یال دلخواهی از گراف کامل حذف شده است.

قضیه ۴. فرض کنید G گراف نا همبند با $n \ge 5$ راس بوده بطوریکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) = 0$ و $\lambda_4(G) < 0$ در اینصورت G یکی از گراف‌های زیر است.

الف) $G = K_1 \cup K_r \cup K_s$ که در آن r و s حداقل ۲ هستند و $r + s = n - 1$.

ب) $G = K_1 \cup H$ که در آن H گرافی متعلق به مجموعه O_{n-1} است.

ج) $G = K_r \backslash e \cup K_s$ که در آن $r \ge 3$، $s \ge 2$ و $r + s = n$، همچنین e یالی از K_r است.

اثبات: ابتدا توجه کنید که

$$Spec(G_1 \cup \cdots \cup G_t) = Spec(G_1) \cup \cdots \cup Spec(G_t) \qquad (۱)$$

که در آن $G_1, \cdots, G_t$ گراف هستند. از آنجا که $Spec(K_1) = \{0\}$، تساوی اخیر نشان می‌دهد که G حداکثر یک راس تنها دارد. لذا دو حالت در نظر می‌گیریم.

(الف) فرض کنید G یک راس تنها دارد. بنابراین دیگر مولفه های همبندی G حداقل یک یال دارند، لذا حداقل یک مقدار ویژه مثبت دارند. این نشان می‌دهد که G حداکثر دو مولفه همبندی دیگر دارد. پس $G = K_1 \cup H_1$ یا $G = K_1 \cup H_2 \cup H_3$ که در آن H_1، H_2 و H_3 گراف‌های همبند با حداقل دو راس هستند.

اگر $G = K_1 \cup H_1$، آنگاه با توجه به رابطه (۱) و اینکه $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) = 0$ و $\lambda_4(G) < 0$، در می‌یابیم که $\lambda_1(H_1) > 0$، $\lambda_2(H_1) > 0$ و $\lambda_3(H_1) < 0$ پس $H_1 \in O_{n-1}$.

حال فرض کنید $G = K_1 \cup H_2 \cup H_3$. با توجه به اینکه H_2 و H_3 حداقل یک مقدار ویژه مثبت دارند (چون حداقل یک یال دارند)، با توجه به رابطه (۱) و طیف G نتیجه می‌گیریم که $\lambda_1(H_2) > 0$ و $\lambda_2(H_2) < 0$ و همچنین $\lambda_1(H_3) > 0$ و $\lambda_2(H_3) < 0$ بنابراین طبق قضیه ۲ هر دو گراف H_2 و H_3 کامل هستند. لذا اعداد $r \geq 2$ و $s \geq 2$ وجود دارند بطوریکه $H_2 = K_r$ و $H_3 = K_s$. پس $G = K_1 \cup K_r \cup K_s$ که در آن $r + s = n - 1$.

(ب) فرض کنید G فاقد راس تنها است. لذا هر مولفه همبندی G حداقل یک یال دارد. از طرف دیگر چون G ناهمبند است و دو مقدار ویژه مثبت دارد، لذا G دقیقاً دو مولفه همبندی دارد (طبق رابطه (۱)). لذا $G = G_1 \cup G_2$، که در آن G_1 و G_2 گراف‌های همبند با حداقل دو راس هستند. طبق رابطه (۱) داریم $\lambda_1(G_1) > 0$، $\lambda_2(G_1) = 0$ و $\lambda_1(G_2) > 0$ یا اینکه $\lambda_2(G_2) < 0$، $\lambda_1(G_1) > 0$، $\lambda_2(G_1) < 0$ و $\lambda_1(G_2) > 0$، $\lambda_2(G_2) = 0$. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $\lambda_1(G_1) > 0$، $\lambda_2(G_1) = 0$ و $\lambda_1(G_2) > 0$، $\lambda_2(G_2) < 0$ بنابراین طبق قضیه ۲، G_2 گراف کامل است. از طرف دیگر چون $\lambda_1(G_1) > 0$، $\lambda_2(G_1) = 0$ لذا G_1 حداقل سه راس دارد. با توجه به اینکه $\lambda_3(G_1) < 0$، لذا طبق قضیه ۳، G_1 گرافی است که با حذف یک یال از گراف کامل به دست می‌آید. بنابراین $G = K_r \backslash e \cup K_s$ که در آن $r \geq 3$، $s \geq 2$ و $r + s = n$. اثبات تمام است.■

حال به بررسی گراف‌های ناهمبند مجموعه W_n می‌پردازیم.

قضیه ۵. فرض کنید $n \geq 5$ و G گراف نا همبندی در W_n باشد. بعبارت دیگر $\lambda_1(G) > 0$، $\lambda_2(G) > 0$، $\lambda_3(G) > 0$ و $\lambda_4(G) < 0$ در اینصورت G یکی از گراف‌های زیر است:

الف) $G = K_r \cup K_s \cup K_t$ که در آن r، s و t حداقل ۲ هستند و $r + s + t = n$.

ب) $G = K_r \cup H$ که در آن r حداقل ۲ و حداکثر $n - 4$ است و H گرافی متعلق به مجموعه O_{n-r} است.

اثبات: اثبات مشابه قضیه قبل است. ابتدا توجه کنید که G فاقد راس تنها است. از طرف دیگر چون هر گراف با حداقل یک یال دارای مقدار ویژه مثبت است، لذا G حداکثر سه مولفه همبندی دارد. بنابراین دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) G دارای دو مولفه همبندی است.

ب) G دارای سه مولفه همبندی است.

با استفاده از قضایای ۱ و۲، مشابه استدلال گفته شده در قضیه ۴ براحتی می‌توان اثبات را تکمیل کرد.■

۳- گراف‌های همبند با حداکثر سه مقدار ویژه مثبت

مهمترین قسمت مساله بررسی گراف‌های همبندی است که حداکثر سه مقدار ویژه مثبت دارند. در این بخش خانواده‌هایی از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم که دارای چنین خاصیتی هستند. ابتدا به مفهوم افراز منصفانه می‌پردازیم. فرض کنید G یک گراف است. گوییم G دارای افراز منصفانه t بخشی است اگر بتوان رئوس آن را به مجموعه $A_1, \cdots, A_t$ چنان افراز کرد که تعداد همسایگان هر راس A_i در مجموعه A_j مستقل از انتخاب آن راس

باشد. بعبارت دیگر ماتریس $t \times t$ مانند $B = [b_{ij}]$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هرراس v در A_i تعداد همسایه های آن در A_j برابر با b_{ij} باشد، برای $i, j = 1, \cdots, t$. ماتریس B را ماتریس افراز منصفانه گویند. بعنوان مثال گراف سه بخشی کامل $K_{a,b,c}$ دارای افراز منصفانه ۳ بخشی است بطوریکه افراز مربوطه را همان بخشهای آن در نظر بگیریم. ماتریس مربوطه برابر است با:
$$\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

قضیه ۶ (قضیه درهم تنیدگی). [1] فرض کنید G یک گراف بوده و H زیرگراف القایی راسی از G باشد. فرض کنید $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ و $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m$ به ترتیب مقادیر ویژه G و H باشند. در اینصورت برای هر $i \in \{1,2, \dots, m\}$ داریم
$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$$

قضیه ۷. [5] فرض کنید G یک گراف n راسی بوده بطوریکه -1 مقدار ویژه آن نیست. فرض کنید $t_1, \dots, t_n$ اعداد صحیح مثبتی هستند. در اینصورت داریم:
$$P\left(G\left[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}\right], \lambda\right) = (\lambda+1)^{t_1+\cdots+t_n-n} \det(\lambda I - M),$$

که در آن M ماتریس منصفانه افراز n بخشی $G\left[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}\right]$ است بطوریکه مجموعه‌های افراز را رئوس گراف‌های کامل $K_{t_1}, \dots, K_{t_n}$ در نظر می‌گیریم. قرار دهید $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. منظور از $C_n[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}]$ یعنی اینکه در C_n به جای v_i $(i = 1, \dots, n)$ گراف کامل K_{t_i} را قرار داده و رئوس K_{t_i} را به رئوس K_{t_j} وصل می‌کنیم اگر و فقط اگر در C_n رئوس v_i و v_j به هم متصل باشند. توجه کنید که تعداد رئوس $C_n[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}]$ برابر با $t_1 + \cdots + t_n$ است. در قضیه بعد نشان می‌دهیم که دسته‌ای از این نوع گراف‌ها دارای دقیقاً سه مقدار ویژه مثبت هستند.

قضیه ۸. فرض کنید c, b, a و d اعداد صحیحی بوده بطوریکه همگی آنها حداقل ۲ هستند. در اینصورت گراف $C_4[K_a, K_b, K_c, K_d]$ دارای دقیقاً سه مقدار ویژه مثبت بوده و مابقی مقادیر ویژه آن منفی هستند.

اثبات: قرار دهید $G[a, b, c, d] := C_4[K_a, K_b, K_c, K_d]$. توجه کنید که $G[a, b, c, d]$ دارای افراز منصفانه ۴ بخشی با ماتریس زیر است.
$$\begin{bmatrix} a-1 & b & 0 & d \\ a & b-1 & c & 0 \\ 0 & b & c-1 & d \\ a & 0 & c & d-1 \end{bmatrix}$$

می‌توان دید که چندجمله‌ای مشخصه ماتریس بالا بصورت زیر است:
$$F_{a,b,c,d}(\lambda) = \lambda^4 + (4-n)\lambda^3 + (6 + ac + bd - 3n)\lambda^2 + (abc + abd + acd + bcd - 3n + 2ac + 2bd + 4)\lambda + abc + abd + acd + bcd - n + ac + bd - 3abcd + 1,$$

که در آن $n = a + b + c + d$. از آنجا که -1 مقدار ویژه دور C_4 نیست، با بکاربردن قضیه ۷، چندجمله‌ای مشخصه $G[a, b, c, d]$ برابر است با
$$P(G[a, b, c, d], \lambda) = (\lambda+1)^{n-4}\, F_{a,b,c,d}(\lambda).$$

در حالتی که $a = b = c = d$، می‌توان دید که
$$F_{a,a,a,a}(\lambda) = (\lambda - 3a + 1)\,(\lambda - a + 1)^2\,(\lambda + a + 1).$$

این تساوی نشان می‌دهد که طیف مقادیر ویژه $G[a, a, a, a]$ عبارتند از
$$Spec(G[a, a, a, a]) = \{3a-1, a-1, a-1, -1, \dots, -1, -a-1\}$$

که در آن تکرر -1 برابر است با $4a - 4$. از آنجا که $a \geq 2$، بنابراین داریم
$$\lambda_1(G[a, a, a, a]) = 3a - 1 > 0,$$
$$\lambda_2(G[a, a, a, a]) = a - 1 > 0,$$

و

$\lambda_3(G[a,a,a,a]) = a-1 > 0,$
$\lambda_4(G[a,a,a,a]) = -1 < 0.$

بعبارت دیگر $G[a,a,a,a]$ دارای دقیقا سه مقدار ویژه مثبت بوده و مابقی مقادیر ویژه آن منفی هستند. لذا قضیه در حالتی که $a=b=c=d$ برقرار است.

حال با استقرا روی $n=a+b+c+d$ قضیه را ثابت می‌کنیم.

اگر $n=8$، آنگاه $a=b=c=d=2$. پس $G[a,b,c,d]=G[2,2,2,2]$، لذا قضیه طبق حالت قبل برقرار است. حال فرض کنید $n \geq 9$. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $a \geq 3$. از آنجا که $G[a-1,b,c,d]$ زیر گراف القایی راسی $G[a,b,c,d]$ است و $a-1 \geq 2$، طبق فرض استقرا و قضیه در هم تنیدگی (قضیه ۶) داریم:

$\lambda_1(G[a,b,c,d]) \geq \lambda_1(G[a-1,b,c,d]) > 0,$
$,\lambda_2(G[a,b,c,d]) \geq \lambda_2(G[a-1,b,c,d]) > 0,$
$\lambda_3(G[a,b,c,d]) \geq \lambda_3(G[a-1,b,c,d]) > 0,$

و

$0 > \lambda_4(G[a-1,b,c,d]) \geq \lambda_5(G[a,b,c,d]).$

بنابر نامساوی‌های فوق برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم که $\lambda_4(G[a,b,c,d]) < 0$ فرض کنید t ماکزیمم مقدار اعداد a,b,c,d است. چون $G[a,b,c,d]$ زیرگراف القایی راسی $G[t,t,t,t]$ است و قضیه برای $G[t,t,t,t]$ برقرار است، طبق قضیه درهم تنیدگی (قضیه ۶) داریم

$0 > \lambda_4(G[t,t,t,t]) \geq \lambda_4(G[a,b,c,d])$

بنابراین $\lambda_4(G[a,b,c,d]) < 0$ و لذا اثبات تمام است.■

در قضیه بعد خانواده‌ای از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم که دارای دقیقاً دو مقدار ویژه مثبت بوده و یک مقدار ویژه صفر دارد.

قضیه ۹. فرض کنید $a \geq 2$ و $c \geq 2$ اعدادی صحیح هستند. در اینصورت گراف $C_4[K_a,K_1,K_c,K_1]$ دارای دقیقاً دو مقدار ویژه مثبت بوده و یک مقدار ویژه صفر دارد.

اثبات: قرار دهید $G[a,c] = C_4[K_a,K_1,K_c,K_1]$ و $n=a+c+2$. با توجه به استدلال گفته شده در قضیه ۸ (با قرار دادن $b=d=1$) چندجمله‌ای مشخصه $G[a,c]$ برابر است با

$$P(G[a,c],\lambda) = (\lambda+1)^{n-4}\, F_{a,1,c,1}(\lambda), \quad (۲)$$

بطوریکه

$$F_{a,1,c,1}(\lambda) = \lambda^4 + (4-n)\lambda^3 + (7+ac-3n)\lambda^2 + (4ac-2a-2c)\lambda.$$

پس صفر یکی از ریشه‌های $F_{a,1,c,1}(\lambda)$ است، لذا صفر یکی از مقادیر ویژه $G[a,c]$ است. توجه کنید که $F'_{a,1,c,1}(0) = 4ac-2a-2c \neq 0$ (مشتق $F_{a,1,c,1}(\lambda)$ نسبت به λ). بنابراین تکرر صفر بعنوان ریشه $F_{a,1,c,1}(\lambda)$ یک است. پس تکرر صفر بعنوان مقدار ویژه $G[a,c]$ برابر یک است.

فرض کنید x_1,x_2,x_3 ریشه های غیر صفر $F_{a,1,c,1}(\lambda)$ هستند. طبق رابطه (۲) چون ریشه‌های $F_{a,1,c,1}(\lambda)$ مقادیر ویژه $G[a,c]$ هستند، لذا x_1,x_2,x_3 اعداد حقیقی هستند. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ داریم

$$x_1+x_2+x_3 = n-4 = a+c-2 > 0$$

و اینکه $x_1x_2x_3 = 2a-2c-4ac < 0$

این روابط نشان می‌دهند که $F_{a,1,c,1}(\lambda)$ دارای دقیقاً دو ریشه مثبت و دقیقاً یک ریشه منفی است. بعبارت دیگر $x_1>0$، $x_2>0$ و $x_3<0$ لذا بنابر رابطه (۲)، طیف گراف $G[a,c]$ بصورت زیر می‌باشد:

$$Spec(G[a,c]) = \{x_1,x_2,0,x_3,-1,\dots,-1\},$$

که در آن تکرر -1 حداقل $n-4$ و حداکثر $n-3$ است. اثبات تمام است.■

فهرست منابع

[1] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, Spectra of graphs, Springer, New York, 2012.

[2] D. M. Cvetkovi'c, M. Doob and H. Sachs, Spectra of Graphs, Theory and Application, Academic Press, Inc., New York, 1979.

[3] M.R.Oboudi, Bipartite graphs with at most six non-zero eigenvalues, Ars Mathematica Contemporanea 11 (2016) 315-325.

[4] M.R. Oboudi, Characterization of graphs with exactly two non-negative eigenvalues, Ars Mathematica Contemporanea 12 (2017) 271-286 .

[5] M.R. Oboudi, On the third largest eigenvalue of graphs, Linear Algebra and its Applications: 503 (2016) 164-179.

[6] J. H. Smith, Symmetry and multiple eigenvalues of graphs, Glas. Mat., Ser. III 12 (1977) 3-8.