دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تعمیم نامساوی کارلمان با استفاده از ماتریس های پایین مثلثی نامتناهی

غلامرضا طالبی[۱*]، علی ابراهیمی میمند[۲]

[(۱و۲)] گروه ریاضی (آنالیز ریاضی)، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج)، رفسنجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۰۳

چکیده

فرض کنید $H_\mu = (\ _{n,k})_{n,k\geq 0}$ ماتریس هاسدورف وابسته به اندازه بورل احتمال $d\mu$ باشد. گراهام بنت در سال ۱۹۹۶ نامساوی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}|x_k|^{h_{n,k}} \leq e^{\int_0^1 |\log\theta| d\mu(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty}|x_n|,$$

را به عنوان تعمیمی از نامساوی کارلمان معرفی کرد. در این مقاله نشان می‌دهیم که ماتریس هاسدورف در نامساوی فوق را می‌توان با هر ماتریس پایین مثلثی $A=\left(a_{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$ با مجموع سطرهای واحد جایگزین نمود، به شرط آنکه ثابت سمت راست در این نامساوی با $\left(\inf\limits_{p>1}\|A\|_p^p\right)$ جایگزین شود. به عنوان نتیجه، نامساوی‌های جدیدی را که به واسطه ماتریس‌های پایین مثلثی خاص مانند نورلوند و میانگین وزن دار به دست می‌آیند، معرفی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که برابر واحد بودن مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس A یک شرط اساسی است.

واژه‌های کلیدی: اندازه بورل احتمال، ماتریس هاسدورف، ماتریس نورلوند، نامساوی هاردی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: gh.talebi@vru.ac.ir

۱. مقدمه

فرض کنید $d\mu$ یک اندازه بورل احتمال بر بازه $[0,1]$ باشد. ماتریس هاسدورف[2] وابسته به آن $H_\mu = \left(\ _{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_{n,k} = \begin{cases} \int_0^1 \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}\, d\mu(\theta) & n \geq k \\ 0 & n < k, \end{cases}$$

که یک ماتریس پایین مثلثی با درایه‌های نامنفی است و مجموع درایه‌های هر سطر آن برابر واحد می‌باشد. این ماتریس در سال ۱۹۲۱ توسط ریاضیدان آلمانی به نام فلیکس هاسدورف [1] معرفی و به افتخار او به این نام مشهور شد.
ماتریس چزارو[3] و ماتریس گاما[4] دو دسته مشهور از ماتریس‌های هاسدورف هستند که به صورت زیر به دست می‌آیند:

۱. اگر $d\mu(\theta) = \alpha(1-\theta)^{\alpha-1} d\theta$ باشد، آنگاه ماتریس هاسدورف حاصل را ماتریس چزارو از مرتبه α، $C(\alpha)$ می‌نامند. در حالت خاص، اگر $\alpha = 1$ اختیار شود، ماتریس چزارو از مرتبه ۱، $C(1) = \left(c_{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$، به دست می‌آید که در آن

$$c_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & n \geq k, \\ 0 & n < k. \end{cases}$$

۲. اگر $d\mu(\theta) = \alpha\theta^{\alpha-1} d\theta$ باشد، آنگاه ماتریس هاسدورف حاصل را ماتریس گاما ازمرتبه α، $\Gamma(\alpha)$، می‌نامند. در حالت خاص، اگر $\alpha = 1$ اختیار شود، داریم $\Gamma(1) = C(1)$.
اگر $\alpha > 0$ باشد، هر دو ماتریس چزارو و گاما دارای درایه‌های نامنفی هستند.
نامساوی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|x_0 x_1 \ldots x_n\right|^{\frac{1}{n+1}} < e \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|,$$

که در آن $\ldots, x_2, x_1, x_0$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی با شرط $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty$ می‌باشد را **نامساوی کارلمان**[5] می‌نامند. این نامساوی در سال ۱۹۲۲ توسط ریاضیدان سوئیسی تُرستِن کارلمان [2] معرفی و به افتخار او به این نام مشهورشد. کارلمان همچنین ثابت کرد که ثابت e، عدد نپر[6]، در این نامساوی بهینه است. اگر این نامساوی را به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} |x_k|^{\frac{1}{n+1}} \leq e \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \quad (1-1)$$

بنویسیم، درایه‌های ماتریس چزارو از مرتبه ۱ در آن ظاهر می‌شود. گراهام بنت در سال ۱۹۹۶ با به کار بردن ماتریس هاسدورف نامساوی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} |x_k|^{h_{n,k}} \leq e^{\int_0^1 |\log\theta| d\mu(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \ (1-2)$$

را به عنوان تعمیمی از نامساوی کارلمان به دست آورد و نشان داد که ثابت به دست آمده در آن بهینه است (نتیجه ۸.۵ از منبع [3] را ببینید). واضح است که اگر در این نامساوی $d\mu$ را اندازه لبگ بر بازه $[0,1]$ اختیار کنیم، این نامساوی به نامساوی (۱-۱) تبدیل می‌شود.
در این مقاله نشان می‌دهیم که ماتریس هاسدورف در نامساوی (۲-۱) را می‌توان با هر ماتریس پایین مثلثی $A = \left(a_{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$ که مجموع درایه‌های هر سطر آن واحد باشد، جایگزین نمود به شرط آنکه ثابت سمت راست در این نامساوی با $\left(\inf_{p>1} \|A\|_p^p\right)$ جایگزین شود. همچنین با ارائه یک مثال نقش نشان می‌دهیم که برابر واحد بودن مجموع

---

[2] Hausdorff matrix
[3] Cesaro matrix
[4] Gamma matrix
[5] Carleman’s inequality
[6] Napier

درایه‌های هر سطر ماتریس A یک شرط اساسی است. در سراسر این مقاله منظور از $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ به ترتیب مجموعه اعداد حقیقی و مختلط است.

۲. پیشنیازها

تعریف ۱.۲. فرض کنید $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ باشد. فضای دنباله‌ای ℓ_p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ell_p = \left\{ (x_n) \in \mathbb{C} \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

اگر $p \geq 1$ باشد، تابع $\|x\|_p := (\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$ یک نرم روی ℓ_p تعریف می‌کند که با آن یک فضای باناخ است [4].

تعریف ۲.۲. فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشند. تبدیل خطی $T: X \to Y$ را کراندار گویند هرگاه عدد مثبتی مانند k وجود داشته باشد، به طوری که. $\|Tx\|_Y \leq k\|x\|_X$ در صورتی که تبدیل خطی $T: X \to Y$ کراندار باشد، نرم آن را با نماد $\|T\|_{X,Y}$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند[4]

$$\|T\|_{X,Y} = \inf\left\{ k > 0 : \|Tx\|_Y \leq k\|x\|_X, \forall x \in X \right\}.$$

تذکر ۳.۲. اگر $T: X \to X$ کراندار باشد، بجای $\|T\|_{X,X}$ از علامت $\|T\|_X$ برای نمایش نرم عملگر T استفاده می‌کنند. در حالت خاص نرم عملگر $T: \ell_p \to \ell_p$ با نماد $\|T\|_p$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۲. فرض کنید X و Y دو فضای دنباله-ای و $A = (a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ یک ماتریس نامتناهی با درایه‌های حقیقی باشد. A را یک نگاشت ماتریسی از X به Y گویند و به صورت $A: X \to Y$ نمایش می‌دهند، هرگاه برای هر دنباله $x = (x_n)$ از X، دنباله $Ax = \{A_n x\}_{n=0}^{\infty}$ متعلق به Y باشد، که در آن

$$A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x_k, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد نگاشت های ماتریسی به منبع [5] مراجعه کنید.

هاردی در سال ۱۹۴۳ ماتریس هاسدورف را به عنوان یک نگاشت ماتریسی روی فضای دنباله‌ای ℓ_p در نظر گرفته و گزاره زیر را ثابت کرد.

گزاره ۵.۲ ([6]، قضیه A). فرض کنید H_μ ماتریس هاسدورف وابسته به اندازه بورل احتمال $d\mu$ و $1 < p < \infty$ باشد. اگر $\int_0^1 \theta^{-1/p} d\mu(\theta) < \infty$، آنگاه H_μ یک عملگر کراندار روی ℓ_p است و

$$\|H_\mu\|_p = \int_0^1 \theta^{-1/p} d\mu(\theta).$$

تذکر ۶.۲. اگر در گزاره قبل $d\mu$ را اندازه لبگ در نظر بگیریم به نامساوی مشهور هاردی[7] دست پیدا می‌کنیم که عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} x_n^p,$$

که در آن $x_0, x_1, x_2, \ldots$، دنباله ای از اعداد حقیقی نامنفی می باشند و ثابت $p/(p-1)$ در آن بهینه است. نامساوی هاردی معادل کرانداری ماتریس چزارو از مرتبه ۱ و بیان دیگری برای رابطه $\|C(1)\|_p = p/(p-1)$ است که قبل از سال ۱۹۴۳ توسط هاردی معرفی شده بود (قضیه ۳۲۶ از منبع [7] را ببینید).

[7] Hardy inequality

۳. نتایج اصلی

این بخش را با بیان نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی وزن دار[۸] در قالب یک لم آغاز می‌کنیم. این لم در اثبات قضیه اصلی این بخش نقش اساسی دارد.

لم ۱.۳ ([۷]، قضیه ۹). فرض کنید $p_1, p_2, \ldots, p_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند. در این صورت برای اعداد حقیقی نامنفی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ داریم

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \le \left(\frac{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + \cdots + p_n} \right)^{p_1 + \cdots + p_n}.$$

نامساوی فوق فقط و فقط زمانی به تساوی تبدیل می‌شود که $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

در قضیه زیر نامساوی کارلمان را با استفاده از ماتریس‌های پایین مثلثی با مجموع سطرهای واحد گسترش می‌دهیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $A = \left(a_{n,k}\right)_{n,k \ge 0}$ یک ماتریس ماتریس پایین مثلثی با درایه‌های نامنفی باشد. اگر مجموع درایه‌های هر سطر A برابر واحد باشد، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \left|x_k\right|^{a_{n,k}} \le \left(\inf_{p>1} \|A\|_p^p \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left|x_n\right|.$$

اثبات. فرض کنید $y_n = \prod_{k=0}^{n} \left|x_k\right|^{a_{n,k}}$، و $1 < p < \infty$ عددی دلخواه باشد. با انتخاب $\left|x_k\right| = u_k^p$ و $v_n = \prod_{k=0}^{n} u_k^{a_{n,k}}$، داریم $y_n = v_n^p$. اکنون با به کار بردن لم ۱.۳ داریم $v_n \le \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} u_k$. بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^p \le \|A\|_p^p \sum_{k=0}^{\infty} u_k^p$$
$$= \|A\|_p^p \sum_{k=0}^{\infty} | x |,$$

و از آن نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \left|x_k\right|^{a_{n,k}} \le M \sum_{n=0}^{\infty} \left|x_n\right|$$

که در آن $M = \inf_{p>1} \|A\|_p^p$ و اثبات تمام است.

تذکر ۳.۳. برای ماتریس هاسدورف با توجه به گزاره ۵.۲ داریم:

$$\inf_{p>1} \left\|H_m\right\|_p^p = \inf_{p>1} \left\{ \int_0^1 q^{-1/p} \, dm(q) \right\}^p = e^{\int_0^1 |\log q| \, dm(q)}.$$

این نشان می دهد که نامساوی (۲-۱) حالت خاص قضیه ۲.۳ است، که در آن $A = H_\mu$ در نظر گرفته شده باشد. در حالت خاص اگر ماتریس A، ماتریس چزارو از مرتبه ۱ باشد، با استفاده از نامساوی هاردی داریم

$$\inf_{p>1} \|C(1)\|_p^p = \inf_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^p = e,$$

که نشان می‌دهد نامساوی (۱-۱) حالت خاص قضیه ۲.۳ است که در آن $A = C(1)$ در نظر گرفته شود.

حال به بیان مثال‌هایی از ماتریس‌های غیر هاسدورف می‌پردازیم. فرض کنید $t = \left(t_n\right)_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای نامنفی از اعداد حقیقی و $t_0 > 0$ باشد. **ماتریس نورلوند**[۹] وابسته به دنباله t، $N_t = \left(t_{n,k}\right)_{n,k \ge 0}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

---

[8] The weighted AM-GM inequality

[9] Norlund matrix

$$t_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{t_{n-k}}{t_0 + t_1 + \cdots + t_n} & n \ge k \\ 0 & n < k, \end{cases}$$

(منبع [8] را ببینید). همچنین **ماتریس میانگین وزن دار**[10] وابسته به t، $M_t = \left(m_{n,k}\right)_{n,k\ge 0}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{t_k}{t_0 + t_1 + \cdots + t_n} & n \ge k \\ 0 & n < k, \end{cases}$$

(منبع [8] را ببینید). اگر به ازای هر n، $t_n = 1$ باشد، هر دو ماتریس نورلوند و میانگین وزن دار به ماتریس چزارو از مرتبه ۱ تبدیل می‌شوند. در واقع اشتراک خانواده ماتریس‌های هاسدورف، ماتریس-های نورلوند و ماتریس‌های میانگین وزن‌دار، ماتریس چزارو از مرتبه ۱ است.

تذکر ۴.۳. مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس نورلوند و ماتریس میانگین وزن-دار برابر واحد است. نرم ماتریس نورلوند و ماتریس میانگین وزن‌دار به عنوان عملگرهایی روی فضای ℓ_p در گزاره‌های زیر بیان شده‌اند:

گزاره ۵.۳. فرض کنید $1 < p < \infty$ و $t = \left(t_n\right)_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد حقیقی همگرا به عددی مثبت باشد. در این صورت

$$\left\| N_t \right\|_p = \frac{p}{p-1}.$$

اثبات. کافی است درنتیجه ۳.۱ از منبع [8] دنباله وزن را دنباله ثابت ۱ در نظر بگیریم.

گزاره ۶.۳. فرض کنید $1 < p < \infty$ و $t = \left(t_n\right)_{n=0}^{\infty}$ دنباله ای صعودی از اعداد حقیقی همگرا به عددی متناهی باشد. در این صورت

$$\left\| M_t \right\|_p = \frac{p}{p-1}.$$

اثبات. کافی است درنتیجه ۴.۱ از منبع [8] دنباله وزن را دنباله ثابت ۱ در نظر بگیریم.

اکنون با توجه به این که $\inf\limits_{p>1}\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p = e$، با اِعمال قضیه ۲.۳ بر ماتریس نورلوند و ماتریس میانگین وزن‌دار به ترتیب نتایج زیر به دست می‌آیند.

قضیه ۷.۳. فرض کنید $t = \left(t_n\right)_{n=0}^{\infty}$ دنباله ای نزولی از اعداد حقیقی همگرا به عددی مثبت باشد. در این صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \left| x_k \right|^{\frac{t_{n-k}}{t_0 + t_1 + \cdots + t_n}} \le e \sum_{n=0}^{\infty} \left| x_n \right|.$$

قضیه ۸.۳. فرض کنید $t = \left(t_n\right)_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی همگرا به عددی متناهی باشد. در این صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \left| x_k \right|^{\frac{t_k}{t_0 + t_1 + \cdots + t_n}} \le e \sum_{n=0}^{\infty} \left| x_n \right|.$$

در ادامه، با ارائه یک مثال نقض، نشان می‌دهیم که شرط برابر واحد بودن مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس A در قضیه ۲.۳ غیر قابل حذف است. برای این کار به دسته جدیدی از ماتریس‌ها نیاز داریم که ابتدا به معرفی آن ها می پردازیم.

۴. ماتریس هاسدورف توسعه یافته[11]

مانند قبل فرض کنید $d\mu$ یک اندازه بورل احتمال

[10] Weighted mean matrix

[11] Generalized Hausdorff matrix

بر بازه $[0,1]$ و s عددی نامنفی باشد. ماتریس هاسدورف توسعه یافته وابسته به $d\mu$، $H_m^s = \left(h_{n,k}^s\right)_{n,k \geq 0}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_{n,k}^s = \begin{cases} \binom{n+s}{n-k} \int_0^1 \theta^{k+s} (1-\theta)^{n-k} \, d\mu(\theta) & n \geq k \\ 0 & n < k, \end{cases}$$

که ماتریسی پایین مثلثی با درایه‌های نامنفی است و مجموع عناصر هر سطر آن **کمتر** از واحد می‌باشد. این ماتریس مستقلاً توسط ایندل [9] و جاکیمُسکی [10] معرفی شد و به همین دلیل آن را ماتریس E-J هم می‌نامند. اگر $s = 0$ باشد آنگاه ماتریس هاسدورف توسعه یافته به ماتریس هاسدورف معمولی تبدیل می‌شود.

اگر مانند قبل اندازه بورل احتمال را به صورت خاص $d\mu(\theta) = \alpha\theta^{\alpha-1} d\theta$ درنظر بگیریم، آنگاه ماتریس حاصل را ماتریس توسعه یافته گاما[12] از مرتبه α، $\Gamma^s(\alpha) = \left(\gamma_{n,k}^s\right)_{n,k \geq 0}$ می‌نامند، که درایه های آن در صورتی که $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، عبارتند از

$$\gamma_{n,k}^s = \begin{cases} \dfrac{\binom{k+s+\alpha-1}{k+s}}{\binom{n+s+\alpha}{n+s}} & n \geq k, \\ 0 & n < k. \end{cases}$$

در سال ۱۹۷۴ جاکیمُسکی و همکارانش [11] ماتریس هاسدورف توسعه یافته را به عنوان عملگری روی فضای دنباله‌ای ℓ_p مورد مطالعه قرار دادند. آنها با گسترش گزاره ۵.۲، نشان دادند که اگر $\int_0^1 \theta^{-1/p} d\mu(\theta) < \infty$ باشد، آنگاه H_m^s یک عملگر کران دار روی $\ell_p \, (1 < p < \infty)$ است و نرم آن برابر

$$\left\| H_\mu^s \right\|_p = \int_0^1 \theta^{-1/p} d\mu(\theta),$$

می‌باشد (نتیجه ۲ از منبع [11] را ببینید). اگر قضیه ۲.۳ را بر این ماتریس اعمال کنیم، با توجه به رابطه

$$\inf_{p>1} \left\{ \int_0^1 \theta^{-1/p} d\mu(\theta) \right\}^p = e^{\int_0^1 |\log\theta| d\mu(\theta)}$$

داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} |x_k|^{h_{n,k}^s} \leq e^{\int_0^1 |\log\theta| d\mu(\theta)} \sum_{n=}^{\infty} |x_n|. \; (4-1)$$

اما این نامساوی برای $s \neq 0$ درست نمی‌باشد! برای نشان دادن این مطلب ابتدا اگر نامساوی (۱-۴) را به ماتریس توسعه یافته گاما از مرتبه a اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{n} |x_k|^{\binom{k+s+\alpha-1}{k+s}} \right)^{\frac{1}{\binom{n+s+\alpha}{n+s}}} \leq e^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|. \; (4-2)$$

اکنون فرض کنید $\alpha = s = 1$. در این صورت نامساوی (۲-۴) به صورت زیر در می‌آید:

اگر $x_k \geq 0$ و $y_n = \left(\prod_{k=0}^{n} x_k \right)^{1/(n+2)}$، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \leq e \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

حال فرض کنید $x_0 = x_1 = x$ و برای $k \geq 2$، $x_k = 0$، آنگاه $y_0 = x^{1/2}$ و $y_1 = x^{2/3}$. واضح است که اگر x به اندازه کافی کوچک اختیار شود $x^{1/2} + x^{2/3} > 2ex,$ که یک تناقض است. پس نامساوی (۲-۴) و در نتیجه نامساوی (۱-۴) در حالت کلی معتبر نمی‌باشند!

تذکر ۱.۴. در اثبات قضیه ۲.۳ دقت کنید که اگر مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس کمتر از واحد باشد (مانند ماتریس هاسدورف توسعه یافته) آنگاه نامساوی میانگین حسابی– هندسی وزن دار را نمی‌توان به کار برد.

[12] Generalized Gamma matrix

۵. تشکر و قدردانی

نویسندگان این مقاله مراتب تقدیر و تشکر خود را از پروفسور مراد اسماعیل (دانشگاه فلوریدای مرکزی) به جهت کمک‌های فنی که منجر به بهبود مقاله شده است، اعلام می‌دارند.

تقدیم به قهرمان ملی ایرانیان شهید حاج قاسم سلیمانی

فهرست منابع

[1] F. Hausdorff. Summationsmethoden und Momentfolgen I. Mathematische Zeitschrift 9: 75-109 (1921).

[2] T. Carleman. Sur les fonctions quasi-analytiques. Comptes rendus, du V^e Congres des Mathematiciens Scandinaves, Helsingfors 181 – 196 (1922).

[3] G. Bennett. *Factorizing the classical inequalities*. Memoirs of the American Mathematical Society: 120 (576) 1-130 (1996).

[4] G. B. Folland. Real Analysis: Modern techniques and their applications. A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 2nd edition, Kindle Edition (2013).

[5] J. Boos. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press, New York (2000).

[6] G. H. Hardy. An Inequality for Hausdorff mean. Journal of the London Mathematical Society 18: 46 – 50 (1943).

[7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya. Inequalities. 2nd edition, Cambridge University Press (1967).

[8] R. Lashkaripour, D. Forotannia. Extension of Hardy Inequality on Weighted Sequence Spaces. Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran 20(2): 159-166 (2009).

[9] K. Endl. Untersuchungen über Moment Probleme bei Verfahren vom Hausdorffschen Typus. Mathematische Annalen 139: 403- 432 (1960).

[10] A. Jakimovski. The product of summability methods. New classes of transformations and their properties. Part 2 Tech. note, Contract No. AF 61: (1959) (052)187.

[11] A. Jakimovski, B. E. Rhoades, J. Tzimbalario. Hausdorff matrices as bounded operators over ℓ_p. Mathematische Zeitschrift 138: 173 -181 (1974).