دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

C_v-انژکتیوی S-سیستم‌های روی تکواره ها

معصومه هزارجریبی دستکی[۱]، حمید رسولی[۲]*

[(۱) و (۲)] گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۵/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۸

چکیده

در این مقاله مفهوم C_v-انژکتیوی از S-سیستم های روی تکواره ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. رفتار این نوع انژکتیوی را نسبت به حاصلضرب، هم حاصلضرب و جمعوند مستقیم بررسی می‌کنیم. همچنین تکواره‌هایی را مشخص می‌کنیم که در آن همه‌ی S-سیستم ها C_v-انژکتیو هستند و نتیجه می‌گیریم روی چنین تکواره‌هایی S-سیستم های دوری، وایتال انژکتیو خواهند بود. کلاس S-سیستم هایی که C_v-انژکتیو هستند را مشخص کرده و با استفاده از مفهوم C_v-انژکتیوی شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آن همه‌ی S-سیستم های پروژکتیو، انژکتیو هستند. همچنین بررسی می‌کنیم که در تکواره های برگشت پذیر چپ، S-سیستم های C_v-انژکتیو شامل عضو ثابت، C-انژکتیو هستند. نشان می‌دهیم اگر هر S-سیستم C_v-انژکتیو، وایتال انژکتیو باشد آنگاه تکواره S تکواره برگشت پذیر چپ است. در ادامه با استفاده از مفهوم پوشش انژکتیو وایتال، کلاس S-سیستم های C_v-انژکتیو را مشخص می‌کنیم. علاوه برآن مفهوم M_v-انژکتیوی را تعریف کرده و شرایطی را مطالعه می‌کنیم که تحت آن هر S-سیستم خارج قسمتی از S-سیستم M_v-انژکتیو، M_v-انژکتیو است و با توجه به این مطلب نشان می دهیم که هر S-سیستم خارج قسمتی از S-سیستم وایتال انژکتیو ضعیف، وایتال انژکتیو ضعیف است.

واژه‌های کلیدی: تکواره، S-سیستم، زیر سیستم وایتال، C_v-انژکتیو.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: hrasouli@srbiau.ac.ir

۱. مقدمه

سیستم‌های روی نیم گروه‌ها یا تکواره‌ها به عنوان جبرهای جامع از نوع یکانی نه تنها در نظریه نیم گروه‌ها بلکه در نظریه‌های کاربردی گوناگونی اعم از گراف، ترکیبیات، اتومات و علوم کامپیوتر [۱] نقش مهمی دارند. از دید نظریه‌ی نمایش، همان گونه که مدول‌ها نمایش حلقه‌ها به وسیله‌ی درون ریختی‌های گروه‌های آبلی هستند، سیستم‌ها نیز نمایش تکواره‌ها به وسیله‌ی تبدیلات روی مجموعه‌ها می‌باشند. مطالعات بسیار زیادی در زمینه‌های مختلف در S–سیستم ها انجام شده است که یکی از آن‌ها انژکتیوی است.

انژکتیوی یکی از ویژگی‌های بنیادی در بسیاری از شاخه‌های ریاضی است و به ویژه پوشش‌های انژکتیو نقش به سزایی در زمینه‌های مختلف جبری و رسته‌ای دارد. در سال ۱۹۶۷ برتیوم [۲] مطالعه روی S–سیستم‌ها را آغاز کرد و نشان داد هر S–سیستم، پوشش انژکتیو دارد. انواع مختلفی از انژکتیوی متناظر با کلاس خاصی از S–سیستم‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. علاوه بر آن شبه–انژکتیوها نیز روی S–سیستم‌ها در [۳] و [۴] مطالعه شده است. همچنین جولی [۵] انژکتیوی را نسبت به تکریختی‌های چگال دنباله‌ای S–سیستم‌ها روی تکواره‌ی $(\mathbb{N}^{\infty}, min)$ بررسی کرده است. این مفهوم نیز روی نیم‌گروه دلخواه در [۶] مطالعه شده است. ژانگ و همکاران [۷] و [۸] تکواره‌هایی را طبقه‌بندی کرده‌اند که C–انژکتیو و CC–انژکتیو هستند که در مورد اول انژکتیوی نسبت به همه‌ی شمول‌ها با دامنه دوری و در مورد دوم نسبت به همه شمول‌ها با دامنه و هم دامنه دوری در نظر گرفته می‌شوند. همچنین صداقت جو و نقی پور [۹] درباره انژکتیوی نسبت به نشانندهها با دامنه یا هم دامنه تجزیه ناپذیر تحقیق کرده‌اند. در حالت کلی‌تر شهباز [۱۰] $\mathcal{M}$– انژکتیوی نسبت به زیر کلاس دلخواه $\mathcal{M}$ از تکریختی‌ها را مورد بررسی قرار داده است. مفهوم وایتال انژکتیوی در مدول‌های روی حلقه‌ها در [۱۱] و [۱۲] تحقیق شده است. در سال ۱۹۶۹ موریس مفهوم وایتال انژکتیوی نسبت به ایده‌ال‌های خاص از تکواره S را مورد بررسی قرار داد. در [۱۳] روی رسته‌یS–سیستم‌ها مفهوم وایتال انژکتیوی نسبت به تکریختی‌های وایتال انژکتیوی مورد بررسی قرار گرفت و برخی خواص جبری آن نیز بررسی گردید.

در این مقاله انژکتیوی نسبت به همه‌ی تکریختی‌های وایتال با دامنه دوری که تعمیمی از C–انژکتیوی است، بررسی و برخی خواص آن مانند حاصلضرب و جمع مستقیم آن نسبت به چنین تکریختی‌هایی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲. مفاهیم و قضایای اولیه

در این بخش رسته‌ی S–سیستم‌ها و برخی تعاریف روی این رسته را یادآوری کرده و مفهوم C_v–انژکتیوی را تعریف می‌کنیم. همچنین قضیه‌ای برای S–سیستم‌های C_v–انژکتیو ارایه می دهیم.

فرض می‌کنیم S یک تکواره با عضو همانی 1 باشد. یک S–سیستم (راست)[۱] یا S–کنش (راست)، مجموعه‌ی ناتهی A به همراه یک کنش[۲] $A \times S \longrightarrow A$ که $(a,s) \longrightarrow as$ است با این ویژگی که برای هر $a \in A$ و $s,t \in S$،

$a(st) = (as)t$ و $a1 = a$.

S–سیستم چپ نیز به طور مشابه تعریف می شود.

در این مقاله همه S–سیستم‌ها را، راست در نظر می‌گیریم. نگاشت $f: A \longrightarrow B$ بین S–سیستم‌های راست را یک S–همریختی می‌گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ و $s \in S$ داشته باشیم $f(as) = f(a)s$.

رسته‌ی همه‌ی S–سیستم های راست و S–همریختی بین آن‌ها را با $Act - S$ نشان می‌دهیم. در این رسته تکریختی‌ها، S–همریختی‌های یک به یک و بروریختی‌ها S–همریختی‌های پوشا هستند. زیرمجموعه ناتهیB از S–سیستم A را یک زیرسیستم[۳] می‌نامیم هرگاه برای هر $b \in B$ و $s \in S$ داشته باشیم $bs \in B$. در این صورت می‌گوییم A توسیعی از B است. فرض می‌کنیم A یک S–سیستم باشد. مجموعه غیر تهی$U \subseteq A$ را مجموعه مولد[۴] A می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in A$، $u \in U$ و $s \in S$ موجود باشد به طوری که $a = us$. می گوییم A متناهیا تولید شده است اگر مجموعه U متناهی باشد. حال اگر $U =$

$\{u\}$ آنگاه می‌گوییم A دوری است و می‌نویسیم $A = < u >$.
فرض می‌کنیم A یک S-سیستم باشد. A را (قویا) بی‌تاب[۵] می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ و هر عضو (حذف شدنی راست) $s \in S$، اگر داشته باشیم $as = bs$ آنگاه $a = b$. S-سیستم A بخش پذیر[۶] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a \in A$ و عضو حذف شدنی چپ $s \in S$، عضوی مانند $a' \in A$ موجود باشد به طوری که $a = a's$. فرض می‌کنیم A یک S -سیستم باشد. عضو $a \in A$ را عضو ثابت[۷] می‌نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم $as = a$. تکواره‌ی S را برگشت پذیر چپ [۸](راست) می‌گوییم هرگاه اشتراک هر دو ایده ال راست (چپ) از S غیر تهی باشد. فرض می‌کنیم $\{A_i | i \in I\}$ خانواده ای ازS-سیستم ها باشد. حاصلضرب از این خانواده که با $\prod_{i\in I} A_i$ نشان می‌دهیم، (P, ρ_i) است که در آن
$$P = \{(a_i)_{i\in I} | a_i \in A_i\}$$
و $\rho_i: \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$ یک S-همریختی طبیعی است که در آن $\rho_i((a_i)_{i\in I}) = a_i$.
هم حاصلضرب از این خانواده که با $\coprod_{i\in I} A_i$ نشان می‌دهیم، (Q, ι_i) است که در آن Q اجتماع مجزای این خانواده و $\iota_i: A_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} A_i$ به صورت $\iota_i(a_i) = a_i$ برای هر $a_i \in A_i$ است. جمعوند مستقیم از این خانواده که با $\bigoplus_{i\in I} A_i$ نشان می‌دهیم زیرسیستمی از$\prod_{i\in I} A_i$ است که در آن بجز تعدادی متناهی بقیه عناصر صفر هستند. اگر A یک S-سیستم و B یک توسیع آن باشد، آنگاه S-سیستم A را یک درون بر[۹] B می‌نامیم هرگاه S-همریختی $f: B \longrightarrow A$ موجود باشد به طوری که $f|_A = id_A$. فرض می‌کنیم A یک زیر سیستم از S-سیستم B باشد، می‌گوییم A زیر سیستم وایتال B است هرگاه برای هر $b \in B$، $s \in S$ ای موجود باشد به طوری که داشته باشیم$bs \in A$. در این حالت می‌گوییم B یک توسیع وایتال از A است. یک S-سیستم را درون برمطلق وایتال[۱۱] می‌نامیم اگر درون بر از هر توسیع وایتال خود باشد. حال S-سیستم S را در نظر می‌گیریم. ایده‌ال وایتال راست I از S، زیر سیستم های وایتال از S هستند. بدین مفهوم که برای هر $s \in S$ وجود داشته باشد $x \in S$ ای به طوری که $sx \in I$. بدیهی است A زیر سیستم وایتال B است اگر و تنها اگر برای هر زیر سیستم C از B داشته باشیم $A \cap C \neq \emptyset$. همچنین اشتراک یک ایده ال وایتال با هر ایده‌ال دلخواه از تکواره غیر تهی است. به وضوح هر ایده ال از یک تکواره برگشت پذیر چپ در آن وایتال است. از آنجا که هر تکواره‌ی جابجایی یا تکواره شامل صفر، برگشت پذیر چپ است، هر ایده‌ال از چنین تکواره‌هایی وایتال است. همچنین اگر S یک گروه باشد، هر S-سیستم، زیر سیستم وایتال غیر بدیهی ندارد. فرض می‌کنیم $f: A \longrightarrow B$ یک S-همریختی باشد، می‌گوییم f یک S-همریختی وایتال است هرگاه $f(A)$ زیر سیستم وایتال B باشد. بدیهی است هر S-همریختی پوشا، وایتال است. فرض می‌کنیم A یک S-سیستم باشد. عضو $a \in A$ را یک عضو وایتال[۱۲] می‌نامیم هرگاه برای هر $\acute{a} \in A$ عضو های $s, \acute{s} \in S$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $as = \acute{a}\acute{s}$. بدیهی است که $a \in A$ عضو وایتال است اگر و تنها اگر $< a >$ یک زیر سیستم وایتال از A باشد. همچنین هر عضو یک تکواره جابجایی یا تکواره شامل صفر (به عنوان یک سیستم روی خودش) وایتال است. همچنین اگر S یک تکواره با عضو صفر و A یک S-سیستم با عضو ثابت یکتا باشد، آنگاه هر عضو A وایتال است. یک S-سیستم M انژکتیو [13] است اگر و تنها اگر برای هر S-سیستم B و هر زیر سیستم A از B، هر S-همریختی

۱- S-act
۲-Action
۳-Subsystem
۴-Generating set
۵-(Strongly) torsion free
۶-Divisible
۷-Fixed element
۸- (Right) Left reversible
۹-Retract
۱۰-Vital
۱۱- Vitally absolute retract
۱۲- Vital element
۱۳- Injective

$f: A \longrightarrow M$ را بتوان به یک S–همریختی $g: B \longrightarrow M$ توسیع داد.

به طور مشابه آن را انژکتیو (متناهی تولید شده، به طور اصلی) ضعیف می نامیم هر گاه نسبت به همریختی از ایده ال (متناهیا تولیده شده، به طور اصلی) I از تکواره S انژکتیو باشد. یک S–سیستم N پروژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر S–برووریختی $f: A \longrightarrow B$ و هر S–همریختی $g: N \longrightarrow B$، یک S–همریختی $h: N \longrightarrow A$ موجود باشد به طوری که $fh = g$.
یک S–سیستم وایتال انژکتیو است اگر نسبت به تکریختی های وایتال انژکتیو باشد. به طور مشابه انژکتیوی، وایتال انژکتیو (متناهیا تولید شده، به طور اصلی) ضعیف تعریف می‌شود. برای هر S–سیستم یک توسیع (وایتال) اساسی (وایتال) انژکتیو وجود دارد که آن را پوشش انژکتیو (وایتال) از S –سیستم می‌گویند [۱۴و۲].

تعریف ۲–۱: فرض می‌کنیم A یک S–سیستم باشد. می‌گوییم S–سیستم A، C_v (F_v)–انژکتیو است اگر نسبت به همه نشانندهها از زیرسیستم دوری (متناهیا تولید شده) وایتال ازS–سیستم دلخواه انژکتیو باشد. بدیهی است که هرS–سیستم C_v–انژکتیو، به طور اصلی ضعیف وایتال انژکتیو است.

قضیه ۲–۲ ([۱۵])**:** فرض می‌کنیم A یکS –سیستم روی تکواره S باشد. گزاره های زیر معادلند:
(الف) S–سیستم A وایتال انژکتیو است.
(ب) S–سیستم A درون بر مطلق وایتال است.

قضیه۲–۳: هرS–سیستم دوری C_v–انژکتیو، وایتال انژکتیو است.

اثبات. فرض می‌کنیم A یک S –سیستم دوری C_v –انژکتیو باشد. برای اثبات، قضیه **۲–۲** را به کار می‌بریم و نشان می‌دهیم A درون بر مطلق وایتال است. S–همریختی $\tau: A \to B$ را در نظر می‌گیریم که درآن A زیر سیستم وایتالB است. از این که A دوری و C_v–انژکتیو است، S–همریختی $g: B \to A$ موجود است به طوری که$g|_A = id_A$. بنابراین A درون بر مطلق وایتال و در نتیجه وایتال انژکتیو است.

با توجه به قضیه فوق بدیهی است که S–سیستم S وایتال انژکتیو است اگر C_v–انژکتیو باشد. با توجه به قسمت (ب) **مثال ۱:** این نتیجه برای هر S–سیستمی لزوما برقرارنیست.

از قضیه‌ی ۱. ۵. ۱۰ از [۱] داریم که هر S–سیستم را می‌توان به صورت اجتماع مجزا از زیر سیستم‌های تجزیه ناپذیر تجزیه نمود. حال با استفاده از مطلب فوق قضیه‌ی زیر را ارایه می‌دهیم.

قضیه ۲–۴: A یک S–سیستم C_v–انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر زیر سیستم وایتال دوری K از هر S–سیستم تجزیه ناپذیرT و هر S–همریختی $f: K \to A$، یک S–همریختی $g: T \to A$ وجود داشته باشد به طوری که f را توسیع دهد.

اثبات. اثبات لزوم بدیهی است. برای برعکس نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

که درآن $C =< x >$ یک زیرسیستم دوری وایتال از S–سیستمB است. فرض می‌کنیم $B = \coprod_{i \in I} B_i$ باشد که درآن برای هر $i \in I$، B_i زیر سیستم تجزیه ناپذیر از B است. حال فرض می‌کنیم برای $j \in I$ ی، $x \in B_j$ باشد. ادعا می‌کنیم $B = B_j$. در غیر اینصورت $b \in B$ و $k \in I$ ای وجود دارد طوری که $b \in B_k$. آنگاه برای هر $s \in S$ داریم $bs \in B_k$. حال از این که C زیر سیستم وایتالB است، $s \in S$ای وجود دارد به طوری که $bs \in C \subseteq B_j$. در این صورت $bs \in B_j \cap B_k$ که تناقض است. بنابراین داریم $B = B_j$. حال با توجه به فرض، S–همریختی $g: B_j \to A$ وجود دارد به طوری که $g|_C = f$.

۳. نتایج اصلی

در این بخش رفتار S–سیستم های C_v–انژکتیو نسبت به حاصلضرب، هم حاصلضرب و جمعوند مستقیم بررسی می‌گردد و کلاس تکواره‌هایی را مشخص می‌کنیم که در

آن همه S-سیستم‌ها، C_v-انژکتیو هستند. همچنین شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آن همه S-سیستم‌های C_v-انژکتیو، C-انژکتیو هستند. در ادامه مفهوم M_v-انژکتیوی را تعریف کرده و برخی نتایج را در ارتباط با این مفهوم ارایه می‌دهیم. علاوه براین کلاس S-سیستم‌های C_v-انژکتیو را مشخص کرده و در انتها بررسی می‌کنیم تحت چه شرایطی S-سیستم‌های پروژکتیو، انژکتیو هستند.

قضیه۳-۱: فرض می‌کنیم $\{A_i | i \in I\}$ خانواده ای از S-سیستم‌ها باشد. برای هر $i \in I$، A_i یک S-سیستم C_v-انژکتیو است اگر و تنها اگر $A =$ ، $\coprod_{i\in I} A_i$ ، C_v-انژکتیو باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم $A = \coprod_{i\in I} A_i$، C_v-انژکتیو باشد. نشان می‌دهیم برای هر $i \in I$، A_i یک S-سیستم C_v-انژکتیو است. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd}
B=\langle b\rangle \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl, dashed, "h"] \\
A_i \arrow[d, "\iota_i"] & \\
A=\coprod_{i\in I} A_i &
\end{tikzcd}$$

از این که $A = \coprod_{i\in I} A_i$، C_v-انژکتیواست، S-همریختی $h: C \to A$ موجود است به طوری که $h|_B = \iota_i f$. ادعا می‌کنیم برای هر $x \epsilon C$، $h(x) \in A_i$. اگر $j \in A$ ای وجود داشته باشد به طوری که $h(x) \in A_j$ ، آنگاه برای هر $s \in S$ داریم:

$$h(xs) = h(x)s \in A_j$$

از طرفی از وایتال بودن $< b >$ در C، $t \in S$ ای وجود دارد به طوری که $xt \in B$ و در نتیجه داریم

$$h(xt) = \iota_i f(xt) \in A_i$$

و بنابراین خواهیم داشت $(xt) \in A_i \cap A_j$ که تناقض است. برای اثبات برعکس، قضیه ۲۲-۴ را به کار می‌بریم. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم که در آن B یک S-سیستم تجزیه ناپذیر و A زیر سیستم دوری وایتال از B است.

$$\begin{tikzcd}
A=\langle a\rangle \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\
A=\coprod_{i\in I} A_i &
\end{tikzcd}$$

ادعا می‌کنیم $Im(f) \subseteq A_i$. اگر $Im(f) \subseteq \coprod_{i\in I} A_i$ باشد آنگاه داریم:

$$Im(f) = Im(f) \cap \coprod_{i\in I} A_i = \coprod_{i\in I}(Im(f) \cap A_i) = (Im(f) \cap A_i) \cup (\coprod_{j\neq i}(Im(f) \cap A_j))$$

بنابراین $Im(f)$ و درنتیجه A تجزیه پذیر خواهد بود که تناقض با دوری بودن A دارد. بنابراین با توجه به این که برای هر $i \in I$، A_i یک S-سیستم C_v-انژکتیو است، نتیجه بدست می‌آید.

قضیه ۳-۲: فرض می‌کنیم $\{A_i | i \in I\}$ خانواده ای ازS-سیستم ها باشد. آنگاه $A = \prod_{i\in I} A_i$ ، C_v-انژکتیو است اگر برای هر برای هر $i \in I$، A_i یک S-سیستم C_v -انژکتیو باشد.

اثبات. برای اثبات نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd}
A=\langle a\rangle \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[ddl, dashed, "g_i"] \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[d, "\rho_i"] & \\
A_i &
\end{tikzcd}$$

که در آن $A =< a >$ زیر سیستم وایتال B، $f: A \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ یک S-همریختی دلخواه و $\rho_i: \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$ یک S-همریختی تصویری می‌باشد. از این‌که A_i برای هر$i \in I$، C_v-انژکتیو است، S-همریختی $g_i: B \longrightarrow A_i$ وجود دارد به طوری که $g_i h = \rho_i f$. حال با توجه به خاصیت حاصلضرب، S-همریختی $k: B \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ موجود است به طوری که $\rho_i k = g_i$.

بنابراین داریم $\rho_i kh = g_i h = \rho_i f$ و در نتیجه $kh = f$.

قضیه ۳-۳: فرض می‌کنیم $\{A_i | i \in I\}$ خانواده‌ای ازS-سیستم‌ها شامل عضو ثابت یکتا و

$A = \prod_{i\in I} A_i$، C_v-انژکتیو باشد. در این صورت برای هر $i \in I$، A_i یک S-سیستم C_v-انژکتیو است.

اثبات. فرض می‌کنیم B زیرسیستم دوری وایتال C و $f: B \longrightarrow A_k$ یک S-همریختی دلخواه باشد. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[ddl, dashed, "\bar{g}"] \\ A_k \arrow[d, "\iota_i"'] & \\ \prod_{i\in I} A_i & \end{tikzcd}$$

حال نگاشت $\bar{f}: B \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{f}(x)(i) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } i = k \\ \theta_i & \text{اگر } i \neq k \end{cases}$$

نشان می‌دهیم $\bar{f}$ خوش تعریف و S-همریختی است. فرض می‌کنیم برای دو عضو دلخواه $b_1, b_2 \in B$ داشته باشیم $b_1 = b_2$. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{f}(b_1) &= (\cdots, \theta_{k-1}, f(b_1), \theta_{k+1}, \cdots) \\ &= (\cdots, \theta_{k-1}, f(b_2), \theta_{k+2}, \cdots) = \bar{f}(b_2). \end{aligned}$$

بنابراین $\bar{f}$ خوش تعریف است. اکنون نشان می‌دهیم $\bar{f}$، یک S-همریختی است. عضو دلخواه $b \in B$ و $t \in S$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که f، یک S-همریختی است داریم:

$$\begin{aligned} \bar{f}(bt) &= (\cdots, \theta_{k-1}, f(bt), \theta_{k+1}, \cdots) \\ &= (\cdots, \theta_{k-1}, f(b)t, \theta_{k+1}, \cdots) \\ &= (\cdots, \theta_{k-1}, f(b), \theta_{k+1}, \cdots)t \\ &= \bar{f}(b)t. \end{aligned}$$

در نتیجه $\bar{f}$ یک S-همریختی است.

از این‌که $\prod_{i\in I} A_i$، C_v-انژکتیو است، S-همریختی $\bar{g}: C \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ وجود دارد به طوری که $\bar{g}|_B = \bar{f}$. حال S-همریختی $\rho_k \bar{g}: C \longrightarrow A_k$ را در نظر بگیرید که در آن ρ_k، k امین S-همریختی تصویری است. حال برای هرعضو $b \in B$ داریم:

$$\begin{aligned} &\rho_k \bar{g}(b) = \rho_k \bar{f}(b) \\ &= \rho_k(\dots, \theta_{k-1}, f(b), \theta_k \dots) = f(b). \end{aligned}$$

بنابراین A_k وایتال انژکتیو است.

قضیه ۳-۴: فرض می‌کنیم $\{A_i | i \in I\}$ خانواده‌ای از S-سیستم‌ها شامل عضو ثابت باشد. در این صورت $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$، C_v-انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، A_i یک S-سیستم C_v-انژکتیو باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$، C_v-انژکتیو باشد. با توجه به قضیه‌ی ۳. ۳۰ از [۱۰] برای هر $i \in I$، A_i یک S-سیستم C_v- انژکتیو است. قسمت عکس قضیه با توجه به قضیه‌ی ۳. ۳۲ از [۱۰] بدیهی است.

قضیه۳-۵: روی تکواره برگشت پذیر چپ S عبارت‌های زیر هم ارزند:

(الف) همه ایده ال‌های وایتال S، C_v-انژکتیو هستند.

(ب) همه ایده ال های متناهیا تولید شده وایتال S، C_v-انژکتیو هستند.

(ج) همه ایده ال های اصلی وایتال S، C_v-انژکتیو هستند.

(د) همه ایده ال های اصلی وایتال S، وایتال انژکتیو هستند.

(ه) همه ایده ال های اصلی وایتال S، F_v-انژکتیو هستند.

(و) تکواره‌ی S منظم وایتال خود انژکتیو وایتال است.

اثبات. نتایج (الف)⇐(ب)⇐(ج) و (د)⇐ (ه)⇐ (ج) بدیهی هستند. نتیجه (د)⇔(و) از قضیه‌ی ۴. ۱۳ از [۱۵] بدست می آید.

(ج)⇐ (الف)، فرض می‌کنیم I ایده الی وایتال از S و $< b >$ زیر سیستم دوری وایتال از S-سیستمی مانند B باشد. همچنین $f: < b > \longrightarrow I$ یک S-همریختی دلخواه باشد. از این‌که S برگشت پذیر چپ است داریم که $f(bS) = f(b)S$ ایده الی اصلی وایتال از S است.

با توجه به قسمت (ج)، $f(bS)$ یک S-سیستم C_v-انژکتیو است و در نتیجه S-همریختی مانند $g: B \longrightarrow f(bS)$ وجود دارد به طوری که $g|_{bS} = f$. واضح است که می‌توان g را یک S- همریختی از B به I در نظر گرفت.

(ج)⇐ (د)، فرض می‌کنیم K ایده ال اصلی وایتال از S باشد. با توجه به قسمت (ج)، K ایده الی C_v-انژکتیو

است حال با توجه به قضیه۲–۳، K وایتال انژکتیو است.

مثال ۱. (الف) فرض می‌کنیم S گروه و A یک S–سیستم بدون عضو ثابت باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۵ از [۷] ، A یک S–سیستم C–انژکتیو نیست ولی C_v–انژکتیو است.

(ب) فرض می‌کنیم $\{0,1,e,b\}$ یک نیم مشبکه با کنش $eb = be = 0$ باشد. با روش مشابه مثال ۱۵ از [۷] می‌توان نشان داد که هر S–سیستم C_v–انژکتیو است. حال ایده ال $K = \{0,e,b\}$ را در نظر می‌گیریم که C_v–انژکتیو است و بنابر مثال ۳. ۴. ۶ در [۱] به طور متناهی (وایتال) انژکتیو ضعیف نیست و در نتیجه (وایتال) انژکتیو نیست.

تعریف ۳–۶: فرض می‌کنیم K ایده‌الی وایتال از S، s عضو دلخواهی از S و μ یک همنهشتی راست دلخواه روی S باشد. قرار می‌دهیم

$$\overline{K_\mu} = \left\{k_\mu \in \frac{S}{\mu} \middle| k \in K\right\}$$

و $K(s,\mu) = \{a \in S | [sa]_\mu \in \overline{K_\mu}\}$. بدیهی است که $\overline{K_\mu}$ زیر سیستم وایتال از S–سیستم $\frac{S}{\mu}$ است.

فرض می‌کنیم μ و λ همنهشتی‌های روی S و q عضو دلخواهی از S باشد. رابطه‌ی زیر را برای هر $a \in K(s,\mu)$ روی S به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s\Re(K,\mu,\lambda,q)t \Leftrightarrow$$
$$K(s,\mu) = K(t,\mu) \text{ و } (qsa)\lambda(qta)$$

با اثباتی مشابه لم ۱۲ و قضیه ۱۴ از [۷] نتایج زیر را داریم.

لم۳–۷: فرض می‌کنیم μ و λ همنهشتی‌های روی تکواره S، K یک ایده ال وایتال و q عضو دلخواهی از S باشد. در این صورت $\Re(K,\mu,\lambda,q)$ یک همنهشتی روی S است.

لم۳–۸: فرض می‌کنیم μ و λ همنهشتی‌های روی S، K یک ایده ال وایتال از S و همچنین $p,q \in S$ باشند. اگر برای هر $[m]_\mu \in K_\mu$ داشته باشیم $(pm)\lambda(qm)$، آنگاه داریم

$$\Re(K,\mu,\lambda,p) = \Re(K,\mu,\lambda,q).$$

قضیه۳–۹: عبارت‌های زیر معادل هستند:

(الف) هر S–سیستم C_v–انژکتیو است.

(ب) هر S–سیستم متناهیا تولید شده C_v–انژکتیو است.

(ج) هر S–سیستم دوری C_v–انژکتیو است.

(د) هر S–سیستم تجزیه ناپذیر C_v–انژکتیو است.

(ه) هر S–سیستم دوری وایتال انژکتیو است.

(و) هر S–سیستم دوری وایتال انژکتیو متناهیا تولید شده است.

(ز) برای هر ایده‌ال وایتال K از S و همنهشتی‌های μ و λ روی S و هر S–همریختی $f: \overline{K_\mu} \longrightarrow \frac{S}{\lambda}$ عضوی مانند $q \in S$ موجود است به طوری که برای هر $[m]_\mu \in \overline{K_\mu}$ داریم $f([m]_\mu) = [q]_\lambda$ و اگر داشته باشیم

$$\Re(K,\mu,\lambda,p) = \Re(K,\mu,\lambda,q)$$

آنگاه نتیجه دهد $(qs)\lambda(qt)$.

اثبات. قسمت‌های (الف)⇐ (ب)⇐ (ج)⇐ (ه) ⇐ (و) با روش مشابه قضیه ۳–۵ بدست می‌آیند.

قسمت‌های (ه)⇐ (الف) ⇐ (د) و همچنین (و) ⇐ (ج) بدیهی هستند.

(د) ⇐ (ه)، با توجه به این که هر S–سیستم دوری تجزیه ناپذیر است و قسمت (د)، هر S–سیستم دوری C_v–انژکتیو است و بنابر قضیه ۲–۳ هر S–سیستم دوری وایتال انژکتیو خواهد بود.

(ه)⇐ (ز)، فرض می‌کنیم K یک ایده‌ال وایتال از S، μ و λ همنهشتی‌هایی روی S و $f: \overline{K}_\mu \longrightarrow \frac{S}{\lambda}$ یک S–همریختی دلخواه باشد. از این که $\frac{S}{\lambda}$ دوری است، با توجه به (ه) وایتال انژکتیو خواهد بود. از طرفی از این که K ایده الی وایتال از S است، $\overline{K}_\mu$ ایده الی وایتال از $\frac{S}{\mu}$ خواهد بود. به عبارت دیگر برای هر $[x]_\mu \in \frac{S}{\mu}$ از این که $x \in S$ و K ایده الی وایتال از S است $t \in S$ای وجود دارد به طوری که $xt \in K$ و در نتیجه $[x]_\mu t = [xt]_\mu \in \overline{K}_\mu$. حال از این که $\frac{S}{\lambda}$ وایتال انژکتیو است S–همریختی مانند $g: \frac{S}{\mu} \longrightarrow \frac{S}{\lambda}$ وجود دارد به طوری که $g|_{\overline{K}_\mu} = f$. قرار می‌دهیم $g([1]_\mu) = [p]_\lambda$ که در آن $p \in S$ است. حال برای هر $[m]_\mu \in \overline{K}_\mu$ داریم

$$g([m]_\mu) = g([1]_\mu)m = [p]_\lambda m = f([m]_\mu).$$

قرار می‌دهیم $\rho = \Re(K,\mu,\lambda,p)$.

حال S–همریختی $\alpha:\overline{K}_\rho \longrightarrow \frac{S}{\lambda}$ را تعریف می‌کنیم به طوری که برای هر $[m]_\rho \in \overline{K}_\rho$ داشته باشیم $\alpha([m]_\rho) = [p]_\lambda m$. از این که $\frac{S}{\lambda}$ وایتال انژکتیو است، یک S–همریختی $\beta:\frac{S}{\rho}\longrightarrow\frac{S}{\lambda}$ وجود دارد به طوری که $\beta|_{\overline{K}_\rho}=\alpha$. بنابراین $q\in S$ ای وجود دارد به طوری که $\beta([1]_\rho)=[q]_\lambda$. اکنون اگر $[m]_\mu\in\overline{K}_\mu$ باشد آنگاه $[m]_\rho\in\overline{K}_\rho$. بنابراین برای هر $[m]_\mu \in \overline{K}_\mu$ داریم:

$$f([m]_\mu) = [p]_\lambda m = \alpha([m]_\rho) = \beta([m]_\rho) = \beta([1]_\rho m) = [q]_\lambda m$$

و در نتیجه داریم $(pm)\lambda(qm)$. با توجه به لم ۳–۸ داریم:

$\Re(K,\mu,\lambda,p)=\Re(K,\mu,\lambda,q)$.

قرار می‌دهیم $\rho=\Re(K,\mu,\lambda,q)$. حال

$(s,t)\in\Re(K,\mu,\lambda,q)$

را در نظر بگیرید. خواهیم داشت

$$[qs]_\lambda = [q]_\lambda s = \beta([1]_\rho)s = \beta([s]_\rho)=\beta([t]_\rho)=\beta([1]_\rho)t=[q]_\lambda t=[qt]_\lambda.$$

بنابراین داریم $(qs)\lambda(qt)$.

(ز)⇐(ه)، نشان می‌دهیم هر S–سیستم دوری وایتال انژکتیو است. با توجه به قضیه‌ی ۲. ۵. ۱۷ در [۱] برای هر S–سیستم دوری A یک همنهشتی مانند ρ وجود دارد به طوری که $A\cong\frac{S}{\rho}$. حال فرض می‌کنیم $\frac{S}{\lambda}$ و $\frac{S}{\mu}$، S–سیستم‌های دوری باشند که در آن μ و λ همنهشتی‌هایی روی S هستند. برای زیر سیستم وایتال A از $\frac{S}{\mu}$ یک ایده ال وایتال مانند

$$K=\{a\in S|[a]_\mu\in A\}$$

از S وجود دارد به طوری که $A=\overline{K}_\mu$. حال S–همریختی $f:\overline{K}_\mu\longrightarrow\frac{S}{\lambda}$ را در نظرمی‌گیریم، با توجه به فرض $q\in S$ ای وجود دارد به طوری که برای هر $[m]_\mu\in\overline{K}_\mu$ داریم $f([m]_\mu)=[q]_\lambda m$ و همچنین برای $s,t\in S$ اگر $s\Re(K,\mu,\lambda,q)t$ باشد نتیجه می‌دهد $(qs)\lambda(qt)$. حال S–همریختی $g:\frac{S}{\mu}\longrightarrow\frac{S}{\lambda}$ را تعریف می‌کنیم به طوری که برای هر $s\in S$، داشته باشیم $g([s]_\mu)=[q]_\lambda s$. بدیهی است که A زیر سیستم وایتال از $\frac{S}{\mu}$ است. برای هر $[x]_\mu\in\overline{K}_\mu$ داریم $g([x]_\mu)=[q]_\lambda x = f([x]_\mu)$ و بنابراین $\frac{S}{\lambda}$ وایتال انژکتیو است.

نتیجه ۳–۱۰: فرض می‌کنیم λ یک همنهشتی روی S باشد. عبارت‌های زیر معادل هستند:

(الف) S–سیستم دوری $\frac{S}{\lambda}$ وایتال انژکتیو است.

(ب) برای هر ایده‌ال وایتال K از S، همنهشتی μ روی S و هر همریختی $f:\overline{K_\mu}\longrightarrow\frac{S}{\lambda}$ یک عضو $q\in S$ وجود دارد به طوری که برای هر $[m]_\mu\in\overline{K_\mu}$ داشته باشیم $f([m]_\mu)=[q]_\lambda$ و برای $s,t\in S$، $s\Re(K,\mu,\lambda,q)t$ نتیجه دهد $(qa)\lambda(qt)$.

لم۳–۱۱: اگر هر S–سیستم C_v–انژکتیو وایتال انژکتیو باشد آنگاه تکواره S برگشت پذیر چپ است.

اثبات. S–سیستم $\Theta\sqcup\Theta$ را در نظر بگیرید که C_v–انژکتیو است. با توجه به فرض قضیه $\Theta\sqcup\Theta$ وایتال انژکتیو است و طبق قضیه ۳. ۱۴ در [۱۵] ، S برگشت پذیر چپ است.

در قضیه زیر شرایطی را بررسی می‌کنیم که درآن هر S–سیستم C_v–انژکتیو، C–انژکتیو است.

قضیه ۳–۱۲: فرض می‌کنیم S تکواره برگشت پذیر چپ باشد. در این‌صورت هر S–سیستم C_v–انژکتیو شامل عضو ثابت، C–انژکتیو است.

اثبات. با توجه به قضیه ۱۲در [۷] کافی است نشان دهیم همه نشاننده های به صورت $B =< b >\hookrightarrow T$ که درآن T یک S–سیستم تجزیه ناپذیر است، وایتال است. درغیر این صورت زیر سیستمی مانند D از T وجود دارد به طوری که $B\cap D=\emptyset$. بنابراین $B\sqcup D$ زیر سیستم تجزیه پذیر T است که تناقض با قضیه ۲. ۲ دارد.

با توجه به قضیه ۳. ۱۰ از [۹] نتیجه زیر را داریم.

نتیجه۳-۱۳: فرض می‌کنیم S تکواره‌ای شامل صفر و همه ایده‌ال‌های آن توسط عضو خودتوان تولید شده باشد یا این که همه S-سیستم های تجزیه ناپذیر آن انژکتیو باشند آنگاه هر S-سیستم C_v-انژکتیو است.

لم۳-۱۴: هر S-سیستم با کنش بدیهی C_v-انژکتیو است.

اثبات. فرض می‌کنیم A یک S-سیستم با کنش بدیهی باشد بنابراین A با یک هم حاصلضرب از S-سیستم‌های تک عضوی یکریخت است. بدیهی است که S-سیستم‌های تک عضوی و در نتیجه هم حاصلضرب آن‌ها با توجه به قضیه ۳-۱، یک S-سیستم C_v-انژکتیو است. بنابراین A یک S-سیستم C_v-انژکتیو است

لم۳-۱۵: A یک S-سیستم C_v-انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر زیر سیستم دوری وایتال دوری C از A داشته باشیم $E_v(C) \subseteq A$ که در آن $E_v(C)$ پوشش انژکتیو وایتال از A است.

اثبات. فرض می‌کنیم A یک S-سیستم C_v-انژکتیو باشد.

نمودار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & E_v(\mathrm{C}) \arrow[dl, dashed] \\ A & \end{tikzcd}$$

که در آن $E_v(C)$ پوشش انژکتیو وایتال برای C است. از این که A یک S-سیستم C_v-انژکتیو است، S-همریختی مانند $g: E_v(C) \longrightarrow A$ موجود است به طوری که $g|_C = \mathrm{f}$. با توجه به اساسی بودن $E_v(C)$ و این که f تکریختی است، g نیز تکریختی است و بنابراین $E_v(C) \subseteq A$. برای برعکس نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

که در آن D زیر سیستم دوری از B است. در نتیجه $C = f(D)$ زیر سیستم دوری از A است. حال با توجه به فرض داریم $E_v(C) \subseteq A$. حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl, dashed] \\ E_v(\mathrm{C}) \arrow[d] & \\ A & \end{tikzcd}$$

از این که $E_v(\mathrm{C})$ وایتال انژکتیو است S-همریختی مانند $g: B \longrightarrow E_v(C)$ موجود است به طوری که $g|_D = f$. بدیهی است که می‌توان g را به صورت یک S-همریختی از B به A در نظر گرفت.

قضیه زیر را از [۱۵] یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۳-۱۶: فرض می‌کنیم S تکواره‌ای برگشت‌پذیر چپ باشد. A یک S-سیستم قویا بی تاب است اگر و تنها اگر پوشش انژکتیو آن قویا بی تاب باشد.

لم۳-۱۷: فرض می‌کنیم S تکواره ای جابجایی و خودتوان باشد. هر S-سیستم قویا بی تاب، C_v-انژکتیو است.

اثبات. فرض می‌کنیم $B = < b >$ زیر سیستم دوری وایتال از S-سیستم C و A و $f: B \longrightarrow A$ یک S-همریختی دلخواه باشد. همچنین فرض می‌کنیم $E(A)$ پوشش انژکتیو برای A باشد. از این که $E(A)$ انژکتیو است S-همریختی $g: C \longrightarrow E(A)$ موجود است به طوری که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} < b > \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C} \arrow[dl, dashed, "g"] \\ \mathrm{A} \arrow[d] & \\ \mathrm{E(A)} & \end{tikzcd}$$

ادعا می‌کنیم $Im(g) \subseteq A$. در واقع برای هر $c \in C$، $s, \acute{s} \in S$ وجود دارد به طوری که $cs = b\acute{s}$. بنابراین داریم $g(cs) = f(cs) = g(b\acute{s}) \in A$. از اینکه S تکواره ای خودتوان است داریم

$$g(c)s\acute{s} = g(cs)s' = g(bs')s' = g(b)\acute{s}\acute{s} = g(b)s'$$

و $g(c)s\acute{s}s = g(b)\acute{s}s$. حال از جابجایی بودن S داریم

$$g(c)\acute{s}s = g(c)\acute{s}ss = g(c)s\acute{s}s = g(b)\acute{s}s.$$

درنتیجه خواهیم داشت $g(c)\acute{s}s = g(b)\acute{s}s$.

از قضیه ۳-۱۶ و این که A قویا بی تاب است داریم که $E(A)$ نیز قویا بی‌تاب است. بنابراین داریم $g(c) = g(b) \in A$.

با قرار دادن $h = g: C \longrightarrow A$ داریم $h|_B = f$ و در نتیجه A یک S-سیستم C_v-انژکتیو است.

تعریف ۳-۱۸: فرض می‌کنیم M یک S-سیستم باشد. A یک S-سیستم M_v-انژکتیو است اگر برای هر نشانده از زیر سیستم وایتال N از M و هر S-همریختی $f: N \longrightarrow A$ یک S-همریختی $g: M \longrightarrow A$ موجود باشد به طوری که $g|_N = f$.

بدیهی است که A یک S-سیستم وایتال انژکتیو ضعیف است اگر و تنها اگر S_v-انژکتیو باشد.

قضیه ۳-۱۹: فرض می‌کنیم M یک S-سیستم پروژکتیو باشد. عبارتهای زیر معادل هستند:

(الف) هر زیر سیستم وایتال از M پروژکتیو است.

(ب) هر S-سیستم خارج قسمتی از S-سیستم M_v-انژکتیو، M_v-انژکتیو است.

(ج) هر S-سیستم خارج قسمتی از S-سیستم انژکتیو، M_v-انژکتیو است.

اثبات. (ب)⇐ (ج) بدیهی است.

(الف)⇐(ب)، فرض می‌کنیم A یک S-سیستم M_v-انژکتیو باشد نشان می‌دهیم $\frac{A}{\rho}$ نیز M_v-انژکتیو است. زیر سیستم وایتال N از M و S-همریختی $f: N \longrightarrow \frac{A}{\rho}$ و بروریختی $\pi: A \longrightarrow \frac{A}{\rho}$ را در نظر بگیرید. با توجه به (الف) از این که N پروژکتیو است S-همریختی $g: N \longrightarrow A$ موجود است به طوری که $\pi g = f$. از این که A یک S-سیستم M_v-انژکتیو است، یک S-همریختی $h: M \longrightarrow A$ موجود است به طوری که $h|_N = g$. حال با قرار دادن $\psi = \pi h$ داریم $\psi|_N = \pi h|_N = \pi g = f$. بنابراین $\frac{A}{\rho}$ یک S-سیستم M_v-انژکتیو است.

(ج) ⇐ (الف)، فرض می‌کنیم N زیر سیستم وایتال از M ، $f: N \longrightarrow B$ یک S-همریختی دلخواه و $h: \acute{B} \longrightarrow B$ یک بروریختی دلخواه باشد. فرض می‌کنیم Q پوشش انژکتیو از $\acute{B}$ باشد.

S-همریختی $\psi: B = h(\acute{B}) \longrightarrow \frac{Q}{K}$ را تعریف می‌کنیم به طوری‌که $\psi(h(\acute{b})) = [\acute{b}]_K$ که در آن $K = ker\ (h)$ یک همنهشتی روی $\acute{B}$ است.

بدیهی است که ψ یکریختی است. با توجه به فرض، $\frac{Q}{K}$ M_v-انژکتیو است. بنابراین یک S-همریختی $\phi: M \longrightarrow \frac{Q}{K}$ موجود است به طوری که $\phi|_N = \psi f$. حال از این که M پروژکتیو است S-همریختی $\sigma: M \longrightarrow Q$ موجود است به طوری که $\pi\sigma = \phi$ که در آن $\pi: Q \longrightarrow \frac{Q}{\rho}$ بروریختی طبیعی است. ادعا می‌کنیم $\sigma(N) \subseteq B$. برای هر $x \in N$ داریم:

$$\pi\sigma(x) = \phi(x) = \psi f(x) = \psi(h(b)) = [b]_K = \pi(b)$$

که در آن $b \in \acute{B}$. بنابراین خواهیم داشت $\sigma(x) = b$.

نتیجه۳-۲۰: عبارتهای زیر معادل هستند:

(الف) هر ایده ال وایتال از S پروژکتیواست.

(ب) هرS-سیستم خارج قسمتی ازS-سیستم وایتال انژکتیو ضعیف، وایتال انژکتیو ضعیف است.

(ج) هرS-سیستم خارج قسمتی ازS-سیستم انژکتیو، وایتال انژکتیو ضعیف است.

لم۳-۲۱: اگر هر S-سیستم دوری C_v-انژکتیو باشد آنگاه برای هر همنهشتی ρ روی S و عضو وایتال $x \in S$، $a \in < x >$ ای وجود دارد به طوری که $(ax)\rho x$ و اگر داشته باشیم $u\rho v$ آنگاه نتیجه دهد $(au)\rho(av)$.

اثبات. بروریختی طبیعی $\pi: S \longrightarrow \frac{S}{\rho}$ را در نظر می‌گیریم. از این که x عضو وایتال ازS است، S-سیستم دوری $\pi(< x >) =< \pi(x) >$ زیر سیستم وایتال از $\frac{S}{\rho}$ است. برای هر $[s]_\rho \in \frac{S}{\rho}$ از این که x عضو وایتال S است $t, \acute{t} \in S$ موجود است به طوری که $xt = s\acute{t}$ بنابراین $\pi(x)t = \pi(s)\acute{t} = [s]_\rho \acute{t}$ و در نتیجه $[s]_\rho \acute{t} \in < \pi(x) >$.

حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd} \pi(<x>) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{S}{\rho} \arrow[dl, dashed] \\ \pi(<x>) & \end{tikzcd}$$

با توجه به فرض S-همریختی $g:\frac{S}{\rho} \longrightarrow \pi(<x>)$ موجود است به طوری که $g(\pi(<x>)) = id_{\pi(<x>)}$. حال قرار می‌دهیم $g([1]_\rho) = \pi(a) = [a]_\rho$ که در آن $a \in <x>$. از این که

$$[ax]_\rho = [a]_\rho x = g([1]_\rho)x = g([x]_\rho) = [x]_\rho$$

داریم $(ax)\rho x$. حال فرض می‌کنیم $u\rho v$. بنابراین داریم

$$[a]_\rho u = g([1]_\rho)u = g([u]_\rho) = g([v]_\rho) = g([1]_\rho)v = [a]_\rho v$$

و در نتیجه $(au)\rho(av)$.

قضیه ۳-۲۲: فرض می‌کنیم S یک تکواره جابجایی و A یک S-سیستم دوری باشد. عبارت‌های زیر معادل هستند:

(الف) A یک S-سیستم C_v- انژکتیو است.

(ب) برای هر عضو وایتال $a \in A$ و توسیع وایتال B از A، S-همریختی $f: B \longrightarrow A$ موجود است به طوری که $f(a) = a$.

(ج) برای هر عضو وایتال $a \in A$ و پوشش انژکتیو وایتال $E_v(\mathrm{A})$ از A، S-همریختی $f: E_v(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{A}$ موجود است به طوری که $f(a) = a$.

اثبات. (ب)⇐(ج) بدیهی است.

(الف)⇐ (ب)، عضو وایتال a از A را در نظر می‌گیریم. بنابراین $<a>$ زیر سیستم وایتال از A است. حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd} <a> \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\ A & \end{tikzcd}$$

از این که A یک S-سیستم C_v-انژکتیو است S-همریختی $g: B \longrightarrow A$ موجود است به طوری که $g(a) = a$.

(ج)⇐(الف) را نشان می‌دهیم. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd} <c> \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[ddl, dashed] \\ A \arrow[d] & \\ E_v(A) & \end{tikzcd}$$

که در آن $<c>$ زیر سیستم وایتال از B است. از این که $E_v(A)$ وایتال انژکتیو است S-همریختی $\psi: B \longrightarrow E_v(A)$ موجود است به طوری که $\psi|_{<c>} = g$. ادعا می‌کنیم $g(c)$ عضو وایتالی از A است. در غیر اینصورت برای هر $x \in A$ داریم $<g(c)> \cap <x> = \emptyset$ که در این صورت $<g(c)> \sqcup <x>$ زیر سیستم تجزیه پذیر از A است که تناقض با قضیه ۲. ۲ در [۱۶] دارد. حال با توجه به (ج)، یک S-همریختی $h: E_v(A) \longrightarrow A$ موجود است به طوری که $h(g(c)) = g(c)$. حال قرار دهید $\varphi = h\psi$. بنابراین خواهیم داشت $\varphi(c) = h\psi(c) = hg(c) = g(c)$.

در نتیجه A یک S-سیستم C_v-انژکتیو است.

با توجه به قضیه ۳. ۲. ۷ از [۱۶] نتیجه زیر بدست می‌آید.

لم۳-۲۳: روی تکواره S عبارت‌های زیر معادل هستند:

(الف) S تکواره منظم وایتال است.

(ب) هر S-سیستم خارج قسمتی از S-سیستم به طور اصلی وایتال انژکتیو ضعیف، به طور اصلی وایتال انژکتیو ضعیف است.

(ج) هر S-سیستم خارج قسمتی از S-سیستم وایتال انژکتیو، به طور اصلی وایتال انژکتیو ضعیف است.

قضیه۳-۲۴: فرض می‌کنیم S تکواره برگشت پذیر چپ باشد. اگر همه S-سیستم‌ها C_v-انژکتیو باشد، همه S-سیستم‌های پروژکتیو، وایتال انژکتیو است.

اثبات. فرض می‌کنیم A یک S–سیستم پروژکتیو باشد با توجه به قضیه ۳ .۱۷ .۸ از [۱] داریم $A = \coprod_{i\in I} A_i$ که در آن برای عضو خودتوان $e_i \in S$ و I $i \in$، $A_i \cong e_i S$ با توجه به فرض برای هر $i \in I$، $e_i S$ یک S–سیستم C_v–انژکتیو و با توجه به قضیه۲–۳ وایتال انژکتیو خواهد بود. حال با توجه به قضیه ۳–۱، A یک S–سیستم C_v –انژکتیو است.

با توجه به قضیه فوق و قضیه ۲. ۱۳ از [۱۵] نتیجه زیر بدیهی است.

نتیجه۳–۲۵: فرض می‌کنیم S تکواره همراه با صفر باشد. اگر همه S–سیستم ها C_v–انژکتیو باشد، همه S–سیستم های پروژکتیو، انژکتیو است.

لم۳–۲۶: فرض می‌کنیم S تکواره‌ای جابجایی و حذف شدنی باشد. عبارت‌های زیر معادل هستند:

(الف) S یک S–سیستم C_v–انژکتیو است.

(ب) S گروه است.

اثبات. (ب)⇐ (الف) بدیهی است.

(الف)⇐ (ب)، از این که S یک S–سیستم C_v–انژکتیو است، به طور اصلی وایتال انژکتیو ضعیف و در نتیجه با توجه به نتیجه ۴. ۷ از [۱۵] بخش پذیر وایتالی است. از طرفی از این که S جابجایی است هر عضو آن وایتال است. بنابراین با توجه به این که S بخش پذیر است S یک گروه است.

فهرست منابع

[1] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev. Monoids, Acts and Categories, de Gruyter. Berlin (2000).

[2] P. Berthiaume. The injective envelope of S-sets. Canadian Mathematical Bulletin 2(10): 261-273 (1967).

[3] J. Ahsan. Monoids characterized by their quasi-injective S-systems. Semigroup Forum (36): 285-292 (1987).

[4] M. Satyanarayana. Quasi and weakly-injective S-systems. Mathematische Nachrichten 71: 183-190 (1976).

[5] E. Giuli. On m-separated projection spaces. Applied Categorical Structures (2): 91- 99 (1994).

[6] M. Mahmoudi, L. Shahbaz Categorical properties of sequentially dense monomorphism of semigroup acts. Taiwanese Journal of Mathematics 15: 543-557 (2011).

[7] X. Zhang, U. Knauer, Y. Chen. Classification of monoids by injectivities I. C-injectivity. Semigroup Forum 76: 169–176 (2008).

[8] X. Zhang, U. Knauer, Y. Chen. Classification of monoids by injectivities I. CC-injectivity. Semigroup Forum 76: 177–184 (2008).

[9] M. Sedaghatjoo, M. A. Naghipour. An approach to injective acts over monoids based on indecomposability. Communications in Algebra 45(7): 3005-3016 (2017).

[10] L. Shahbaz. M-injectivity in the category Act-S. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics 29: 119-159 (2012).

[11] R. C. Linton . Injective and vital-injective R-groups. University of Oklahoma, Mathematics Department Preprints 91 (1969).

[12] J. C. Pleasant. Σ-bases of Modules. University of Oklahoma, Mathematics Department Preprints 73 (1968).

[13] F. R. McMorris. Vital injective S-systems. Mathematische Nachrichten 47: 121-12 (1970).

[14] M. Hezarjaribi Dastaki, H. Rasouli. A Categorical approach to vitally dense monomorphisms. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, to appear.

[15] M. Hezarjaribi Dastaki, H. Rasouli. The vital injectivity of Acts over monoids, submitted.

[16] J. Ahsan, L. Zhongkui. A homological Approach to the Theory of Monoids. Science Press (2008).