دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک روش جدید دوگامی متقارن ابرشکف P-پایدار از مرتبه جبری دوازدهم برای حل عددی مسائل مقدار اولیه مرتبه دوم

علی شکری[۱*]، عباسعلی شکری[۲]، محمد مهدیزاده خالسرایی[۱]، فیروز پاشائی[۱]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد اهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۷/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۲/۰۸

چکیده

در این مقاله، یک روش جدید دوگامی خطی ابرشکف ضمنی از مرتبه جبری دوازدهم با استفاده از تکنیک صفر کردن فاز تاخیری و مشتق‌های مراتب اول، دوم و سوم آن تولید و مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. هدف اصلی این مقاله، تولید و توسعه الگوریتم‌های کارآمد برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با شرایط اولیه که دارای جواب‌های نوسانی یا متناوب هستند، می‌باشد. الگوریتم مورد نظر از دسته روش‌های چندگامی خطی و خانواده روش‌های چندمشتقی است. برتری روش جدید از مقایسه آن با روش‌های مشابه، از نقطه نظر کارایی، دقت و پایداری با اجرای آنها روی برخی مسائل شناخته شده مانند معادله غیرخطی نامیرا شده دافینگ نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: ناحیه پایداری، فاز تاخیری، مسائل مقدار اولیه، روش‌های چند مشتقی.

*. عهده دار مکاتبات: Email: shokri@maragheh.ac.ir

۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با شرایط اولیه به‌-فرم

$$y'' = f(x, y),\ \ y(x_0),\ \ y'(x_0) = y'_0, \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. در سال‌های اخیر الگوریتم‌های متنوعی برای حل چنین معادلاتی طراحی شده‌اند که می‌توان به [۱-۵] اشاره کرد. مسائل مقدار اولیه (۱) در مدل‌های ریاضی، فیزیک، شیمی نظری، مکانیک کوانتومی، شیمی کوانتومی، الکترونیک و غیره ظاهر می‌شود. در حالت کلی، روش‌های عددی برای حل تقریبی مسائل مقدار اولیه (۱) می‌توانند در دو کلاس اصلی تقسیم‌بندی شوند:

۱- روش‌های باضرایب ثابت.

۲- روش‌های با ضرایب وابسته به فرکانس مسئله. [۲۰-۶]

هدف اصلی در این مقاله، تولید روش چندگامی متقارن ابرشکف برای حل عددی سیستم‌های معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با جواب‌های نوسانی یا تناوبی است که متعلق به کلاس دوم از دسته‌بندی فوق می‌باشد. دلیل کارآمدی روش مورد نظر نیز که به تحلیل در مورد آن صحبت خواهد شد، تولید ضرایب با استفاده از دستگاه تولید شده از صفر کردن فاز تاخیری و تعدادی از مشتق‌های آن است که علاوه بر بالا بردن مرتبه جبری و وسیعتر کردن ناحیه پایداری روش، تقریب‌های تولید شده را از نظر کیفی بهبود می‌بخشد.

به‌صورت دقیق‌تر، روش مورد بحث، یک روش دو گامی ضمنی ابرشکف از مرتبه جبری دوازدهم بوده و دارای خاصیت بسیار مهم P-پایداری می‌باشد که از صفر کردن فاز تاخیری و مشتق‌های اول، دوم و سوم آن بدست خواهد آمد. این مقاله در چهار بخش تنظیم شده است: در بخش۲ به بیان مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم، دربخش۳ روش جدید موررد نظر را بیان کرده و به تجزیه و تحلیل آن می‌پردازیم و نهایتاً در بخش۴، نتایج عددی حاصل از اعمال روش جدید روی برخی از مسائل مقدار اولیه شناخته شده را ارائه داده و روش جدید را با دسته روش‌های موجود هم مرتبه در این زمینه مورد مقایسه قرار خواهیم داد.

۲- مفاهیم مقدماتی

برای حل عددی مساله مقدار اولیه (۱)، دسته روش‌های k-گامی ابرشکف به‌فرم

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_i y_{n-j+1} = \sum_{i=1}^{l} h^{2i} \sum_{j=0}^{k} \beta_i y_{n-j+1}^{(2i)},$$

تعریف می‌شود. روش (۲) متقارن نامیده می‌شود هرگاه به ازای $j = 0,1, \dots, k$ داشته باشیم $\alpha_j = \alpha_{k-j}$ و $\beta_j = \beta_{k-j}$ و همچنین روش (۲) از مرتبه جبری q است هرگاه خطای برشی موضعی آن به‌شکل

$$\mathrm{LTE} = C_{q+2} h^{q+2} y^{(q+2)},\ x_{n-k+1} < \eta < x_{n+1}, \qquad (۲)$$

باشد که در آن C_{q+2} ضریب ثابت و وابسته به h است. برای تعریف بازه تناوب یک روش چندگامی خطی، تجزیه و تحلیل تابع پایداری آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با استفاده از بازه تناوبی، می‌توان محدودیت انتخاب طول گام را برای روش‌های عددی که برای حل مسائل متناوب یا نوسانی طراحی می‌شوند، در نظر گرفت. بدیهی است اگر بازه تناوبی برای یک روش چندگامی خطی بزرگ باشد، آنگاه می‌توان با انتخاب طول گام‌های بزرگ و در نتیجه با تعداد مراحل کمتر، به همان دقتی رسید که در روش‌های با بازه تناوب کوچک مجبور به انتخاب طول گام کوچکتر و در نتیجه حجم عملیاتی بیشتر هستیم. برای بررسی ویژگی پایداری روش‌های چندگامی خطی که برای حل مسائل مقدار اولیه (۱) طراحی می‌شوند، لمبرت و واتسون [۲۱] مساله آزمون را به‌شکل

$$y'' = -\omega^2 y,\ \ \omega \in R, \qquad (۳)$$

معرفی کرده‌اند که در آن ω فرکانس مساله بوده و می‌تواند مقداری ثابت باشد. هنگامی که یک روش دوگامی $(k = 2)$ را روی مساله آزمون (۳) اعمال می‌کنیم، معادله تفاضلی به‌شکل

$$y_{n+1} - 2C(\upsilon) y_n + y_{n-1} = 0, \qquad (۴)$$

حاصل می‌شود که در آن $\upsilon = \omega h$، h طول گام روش و

که در آن توابع $A(\upsilon)$ و $B(\upsilon)$ که $C(\upsilon) = \frac{B(\upsilon)}{A(\upsilon)}$ چندجمله‌ای‌هایی از υ هستند و همچنین y_n تقریبی از $y(nh)$ به ازای $n = 0,1,2,\ldots$ می‌باشد که باید توسط روش عددی مورد نظر محاسبه شود. حال با استفاده از معادله (۴)، معادله مشخصه روش دوگامی مورد نظر را به‌فرم

$$\xi^2 - 2C(\upsilon)\xi + 1 = 0, \tag{۵}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲: ([۲۲]) گوئیم روش عددی (۴) دارای بازه تناوبی $(0, \upsilon_0^2)$ است، هرگاه به‌ازای هر $\upsilon \in (0, \upsilon_0^2)$ ریشه‌های مشخصه ξ_1 و ξ_2 از معادله مشخصه (۵)، در رابطه‌های $\xi_1 = \exp(i\theta(\upsilon))$ و $\xi_1 = \exp(-i\theta(\upsilon))$ صدق کنند که در آنها $\theta(\upsilon)$ یک تابع حقیقی از υ است.

تعریف ۲.۲: برای هر روش متناظر با معادله مشخصه (۵)، جمله پیشرو در بسط

$$t = \upsilon - \theta(\upsilon) = \upsilon - \cos^{-1}[C(\upsilon)]. \tag{۶}$$

را فاز تاخیری روش می‌نامیم. اگر زمانی که $\upsilon \to 0$ داشته باشیم $t = O(\upsilon^{q+1})$، آنگاه گوئیم فاز تاخیری روش، از مرتبه q است.

نکته ۳.۲: فرض کنید (۵) معادله مشخصه متناظر با روش دوگامی متقارن (۴) باشد و

$$\forall \upsilon^2 \in (0, \upsilon_0^2), \quad |C(\upsilon)| < 1,$$

در این‌صورت بازه تناوبی روش مورد نظر $(0, +\infty)$ است.

تعریف ۴.۲: یک روش چندگامی خطی P- پایدار نامیده می‌شود اگر بازه تناوب آن $(0, +\infty)$ باشد.

قضیه ۵.۲: فازتاخیری روش دوگامی با معادله مشخصه (۵)، جمله پیشرو در بسط $\frac{[C(\upsilon) - \cos(\upsilon)]}{\upsilon^2}$ می‌باشد.

اثبات: به [۲۲] رجوع شود. ■

۳- ساخت و آنالیز روش

فرض کنید در رابطه (۲)، $k = 2$ بوده و به ازای هر $j = 0(1)\left[\frac{m}{2}\right]$، داشته باشیم $\alpha_j = \alpha_{m-j}$ و $\beta_{ij} = \beta_{i,m-j}$. لذا می‌توان نوشت

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^{2i}\left[\beta_{i0}\left(y_{n+1}^{(2i)} + y_{n-1}^{(2i)}\right) + \beta_{i1}y_n^{(2i)}\right] \tag{۷}$$

بنابراین با فرض $m = 3$ داریم:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = {}& \\ h^2\left[\beta_{10}\left(y_{n+1}^{(2)} + y_{n-1}^{(2)}\right) + \beta_{11}y_n^{(2)}\right] & \\ +h^4\left[\beta_{20}\left(y_{n+1}^{(4)} + y_{n-1}^{(4)}\right) + \beta_{21}y_n^{(4)}\right] & \\ +h^6\left[\beta_{30}\left(y_{n+1}^{(6)} + y_{n-1}^{(6)}\right) + \beta_{31}y_n^{(6)}\right] & \end{aligned} \tag{۸}$$

حال اگر تمامی جملات عبارت (۸) را حول x_n بسط داده و ضرایب توانهای h در دو طرف رابطه (۸) را برابر با صفر قرار دهیم، آنگاه β_{ij}ها اسکالرهای ثابتی خواهند شد که با استفاده از آنها، روش تولید شده را روش کلاسیک می‌نامیم و ضرایب آن به فرم

$$\beta_{10} = \frac{229}{7788},\ \ \beta_{20} = -\frac{3665}{3894},\ \ \beta_{30} = \frac{1}{2360}$$
$$\beta_{21} = \frac{711}{12980},\ \ \beta_{30} = \frac{127}{39251520},$$
$$\beta_{31} = \frac{2923}{3925152} \tag{۹}$$

به‌دست خواهند آمد که در آن فاز تاخیری به‌صورت

$$pl_{clas} = -\frac{45469}{3394722659328000}\upsilon^{12} + O(\upsilon^{14}),$$

بوده و خطای برشی موضعی آن به‌شکل

$$LTE_{clas} = -\frac{45469}{1697361329664000}h^{14}y^{(14)} + O(h^{16}).$$

است که برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۲۳] رجوع کرد.

۱.۳ ساخت روش جدید

با اعمال روش (۸) بر روی مساله آزمون (۳) معادله تفاضلی (۴) با تابع پایداری

$$C(\upsilon) = \frac{1 - \frac{1}{2}\beta_{11}\upsilon^2 + \frac{1}{2}\beta_{21}\upsilon^4 - \frac{1}{2}\beta_{31}\upsilon^6}{1 + \beta_{10}\upsilon^2 - \beta_{20}\upsilon^4 + \beta_{30}\upsilon^6}, \tag{۱۰}$$

تولید می‌شود. برای اینکه خصوصیات P–پایداری و مرتبه جبری بهینه با حداکثر مرتبه برای فاز تاخیری در روش جدید (۸) حاصل شود، ابتدا از بسط تیلور کمک گرفته و معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta_{10} = -2\beta_{20} - \beta_{21} + \frac{1}{12},$$
$$\beta_{11} = 4\beta_{20} + 2\beta_{21} + \frac{5}{6}.$$

برای محاسبه بقیه ضرایب مجهول، دستگاهی را با استفاده از صفر کردن فاز تاخیری و مشتق‌های مراتب اول، دوم و سوم تولید می‌کنیم که یک دستگاه غیرخطی با چهار معادله و چهار مجهول خواهد بود. به‌عبارت دیگر

$$PL^{(i)} = 0, \qquad i = 0,1,2,3. \qquad (۱۱)$$

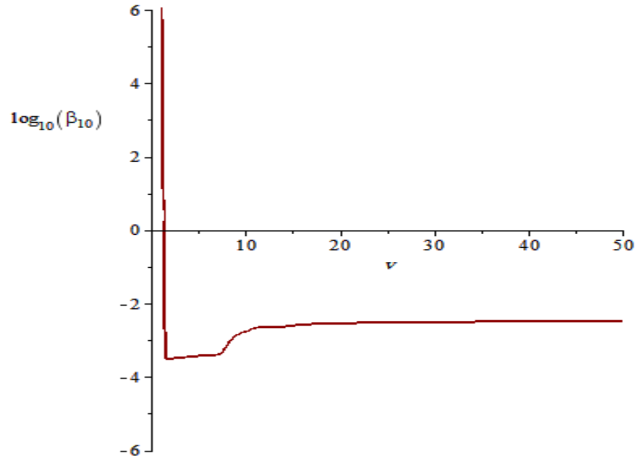
با استفاده از نرم افزار میپل، دستگاه (۱۱) را حل کرده و ضرایب β_{ij} با $i = 1,2,3$ و $j = 0,1$ را بدست می‌آوریم. لذا با توجه به اینکه ضرایب تولید شده برای روش جدید، وابسته به فرکانس بوده و همچنین توابع گویای مثلثاتی هستند، در نتیجه هر یک از این ضرایب می‌توانند در نزدیکی ریشه‌های مخرج دارای مجانب قائم بوده و لذا بسیار حساس نسبت به تغییرات فرکانس مساله خواهد بود. بنابراین بهتر است در اینگونه مواقع از بسط تیلور ضرایب استفاده شود که به‌فرم

$$\beta_{10} = \frac{229}{778} + \frac{45469}{328536780}\upsilon^2 - \cdots$$
$$\beta_{11} = -\frac{3665}{3894} - \frac{45469}{164268390}\upsilon^2 + \cdots$$
$$\beta_{20} = -\frac{1}{2360} - \frac{45469}{7526478960}\upsilon^2 - \cdots$$
$$\beta_{21} = -\frac{1}{2360} - \frac{1045787}{8279126856}\upsilon^2 + \cdots$$
$$\beta_{30} = \frac{127}{39251520} + \frac{45469}{382113547200}\upsilon^2 + \cdots$$
$$\beta_{31} = \frac{2923}{3925152} - \frac{14231797}{2483738056800}\upsilon^2 + \cdots$$

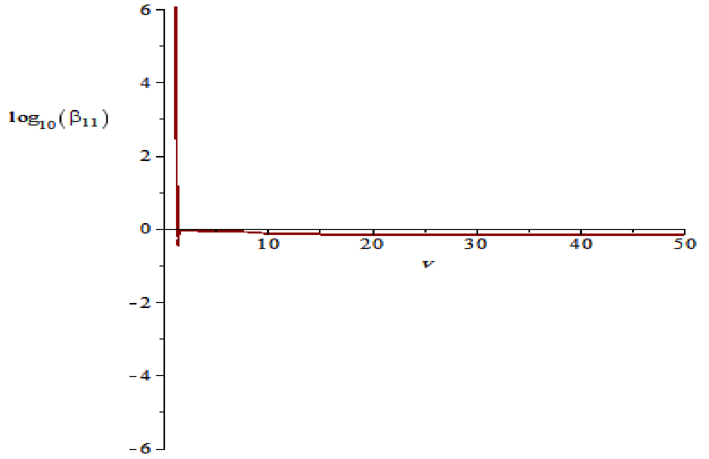
هستند که در آن $\upsilon = \omega h$ و ω فرکانس مساله بوده و خطای برشی روش جدید به‌شکل

$$LTE_{New} = -\frac{45469}{1697361329664000}\left(\omega^8 y^{(6)} + 4\omega^6 y^{(8)} + 6\omega^4 y^{(10)} + 4\omega^2 y^{(12)} + y^{(14)} + y^{(4)}\right),$$

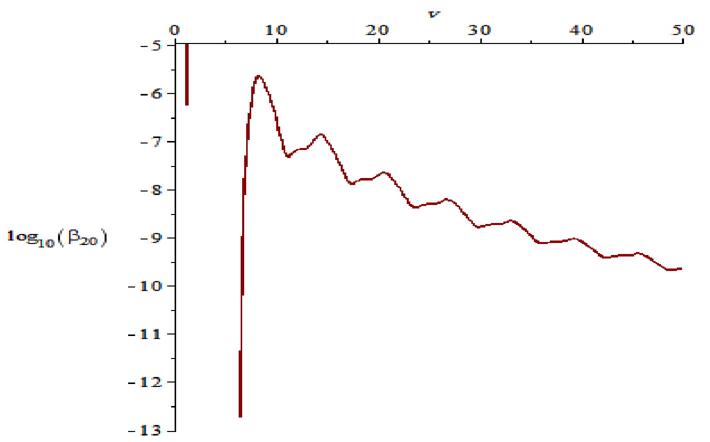
است. رفتار ضرایب روش جدید در شکل‌های ۱.۳ الی ۶.۳ نشان داده شده‌اند.



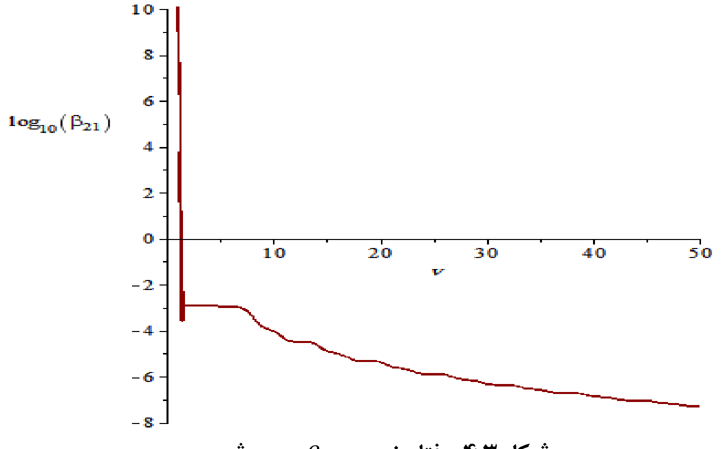
شکل ۱.۳: رفتار ضریب β_{10} در روش جدید



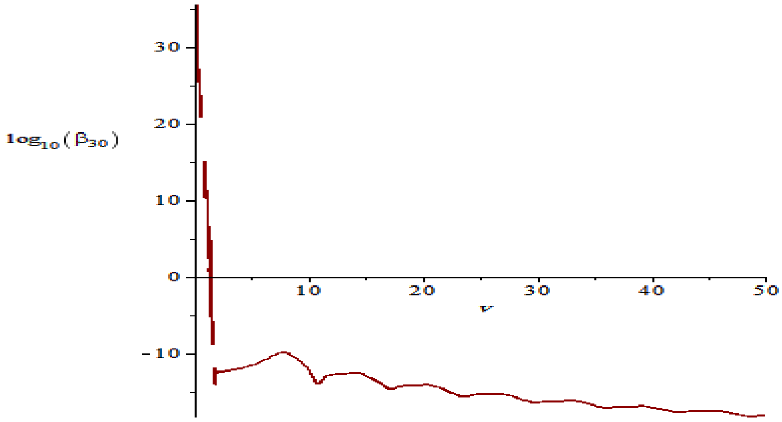
شکل ۲.۳: رفتار ضرایب β_{11} در روش جدید



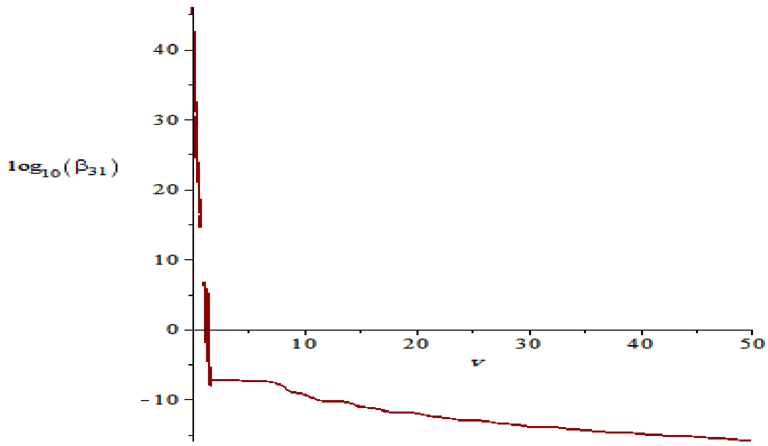
شکل ۳.۳: رفتار ضریب β_{20} در روش جدید



شکل ۴.۳: رفتار ضریب β_{21} در روش جدید



شکل ۳.۵: رفتار ضریب β_{30} در روش جدید



شکل ۳.۶: رفتار ضریب β_{31} در روش جدید

۴- آنالیز پایداری روش جدید

در این بخش، بازه و ناحیه پایداری روش جدید را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدیهی است فرکانسی که در مساله آزمون برای تجزیه و تحلیل فاز تاخیری بکار برده شد و با ω نشان دادیم باید متفاوت از فرکانسی باشد که در مساله آزمون برای بررسی پایداری روش بکار می‌رود و آن را با ϕ نشان خواهیم داد. حال در صفحه مختصات $s-v$ می‌توان ناحیه پایداری روش را رسم کرد که در آن $\upsilon=\omega h$ و $s=\phi h$ بوده و h طول گام روش است. برای بررسی پایداری روش جدید تولید شده (۸)، روش را روی مساله آزمون

$$y''=-\phi^2 y,\ \ \phi\neq\omega,$$

با فرکانسی متفاوت از فرکانس مساله آزمون (۳) اعمال می‌کنیم. لذا تابع پایداری به‌فرم

$$A_1(s,\upsilon)(y_{n+1}+y_{n11})+A_0(s,\upsilon)(y_n)=0. \qquad (۱۲)$$

تولید می‌شود که در آن توابع $A_0(s,\upsilon)$ و $A_1(s,\upsilon)$ که ضرایب تابع پایداری (۱۲) هستند، توابعی مثلثاتی نسبت به متغیرهای s و υ می‌باشند و می‌توان به‌شکل

$$A_0(s,\upsilon)=\frac{T_{00}}{6T},\quad A_1(s,\upsilon)=\frac{T_{10}}{12T},$$

نوشت که در آن

$$\begin{aligned}T_{10} &= (1440s^6\upsilon^2-3744s^4\upsilon^4+\\&3168s^2\upsilon^6-864\upsilon^8-4608s^6)\cos(\upsilon)^3\\&+(96(s+\upsilon)(s^6+(-2s^2-15)\upsilon^4\\&+(s^4+48s^2)\upsilon^2-57s^4)(s-\upsilon)\sin(\upsilon)\\&+(s^2+12)\upsilon^{12}+(-2s^4-21s^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+36)\upsilon^{10} + (s^6 + 6s^4 - 72s^2)\upsilon^8 \\
&+(-21s^6 + 900s^4)\upsilon^6 - 1152s^6\upsilon^4 \\
&-13824s^6)\cos(\upsilon)^2 + (-8((-s^4 \\
&+12s^2 + 48)\upsilon^8 + (s^6 + 360 - 87/ \\
&2s^4 - 54s^2)\upsilon^6 \\
&+\left(1512s^2 + \frac{45}{2}s^6 - 234s^4\right)\upsilon^4 \\
&+(-156s^6 - 2520s^4)\upsilon^2 - \\
&1368s^6)\upsilon\sin(\upsilon) + (180s^4 + 432s^2 + \\
&2592)\upsilon^8 \\
&+(-60s^6 - 1584s^4 - 9504s^2)\upsilon^6 \\
&+(86s^6 + 11232s^4)\upsilon^4 - 4320s^2\upsilon^6 - \\
&13824s^6)\cos(\upsilon) \\
&+20\left(\left(-\frac{12}{5}s^2 - s^4 + 24\right)\upsilon^8\right. \\
&+\left(s^6 + 72 + \frac{111}{5}s^4 - 36s^2\right)\upsilon^6 \\
&-\frac{9}{5}s^2(s^4 + 44s^2 - 168)\upsilon^4 \\
&+\left(504s^4 - \frac{336}{5}s^6\right)\upsilon^2 - \\
&\frac{1368}{5}s^6)\upsilon\sin(\upsilon) \\
&+(2s^2 + 24)\upsilon^{12} + (-4s^4 - 51s^2 - \\
&36)\upsilon^{10} \\
&+(2s^6 + 66s^4 - 360s^2 - 1728)\upsilon^8 + \\
&(9s^6 + 684s^4 + 6336s^2)\upsilon^6 \\
&+(288s^6 - 7488s^4)\upsilon^4 + 2880s^6\upsilon^2 + \\
&4608s^6,
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&T = (-72\upsilon\cos(\upsilon)^3 + (\upsilon^5 + 3\upsilon^3 \\
&-8\upsilon^2\sin(\upsilon) + 120\sin(\upsilon))\cos(\upsilon)^2 \\
&+(-32\upsilon^2\sin(\upsilon) + 216\upsilon - \\
&240\sin(\upsilon))\cos(\upsilon) \\
&+2\upsilon^5 - 3\upsilon^3 + 40\upsilon^2\sin(\upsilon) - 144\upsilon + \\
&120\sin(\upsilon))\upsilon,
\end{aligned}
$$

و بعلاوه

$$
\begin{aligned}
&T_{00} = 4608\cos(\upsilon)^4 s^6 + ((36s^4 - \\
&432s^2 + 864)\upsilon^8 \\
&+(-12s^6 + 1584s^4 - 3168s^2)\upsilon^6 \\
&+(-864s^6 + 3744s^4)\upsilon^4 - 1440s^6\upsilon^2 \\
&-13824s^6)\cos(\upsilon)^3 + (-4((-s^4 \\
&+12s^2 - 24)\upsilon^8 + (s^6 - 21s^4 - \\
&108s^2 + 360)\upsilon^6 + (27s^6 + 684s^4 - \\
&1512s^2)\upsilon^4 \\
&+(240s^6 + 2520s^4)\upsilon^2 \\
&-1368s^6)\upsilon\sin(\upsilon) \\
&+(5s^2 - 12)\upsilon^{12} + (-10s^4 + 39s^2 - \\
&36)\upsilon^{10} \\
&+(5s^6 - 42s^4 + 72s^2)\upsilon^8 \\
&+(-105s^6 - 900s^4)\upsilon^6 + 1152s^6\upsilon^4 \\
&+13824s^6)\cos(\upsilon)^2 + (40((-\frac{12}{5}s^2 \\
&-s^4 + \frac{48}{5})\upsilon^8 + \left(\left(s^6 + 72 - \frac{3}{10}s^4 - \right.\right. \\
&\left.\frac{234}{5}s^2\right)\upsilon^6 - \frac{63}{10}s^2\left(s^4 - \frac{116}{7}s^2 + 48\right)\upsilon^4 \\
&+(12s^6 + 504s^4)\upsilon^2 - \frac{1368}{5}s^6)\upsilon\sin(\upsilon) \\
&-72(s^2 - 6)^2\upsilon^8 + (24s^6 - 3168s^4 + \\
&9504s^2)\upsilon^6 + (1728s^6 - 11232s^4)\upsilon^4 + \\
&4320s^6\upsilon^2 - 4608s^6)\cos(\upsilon) \\
&+10(s + \upsilon)(s - \upsilon)\left(\left(\left(48 - \frac{144}{5}s^2 + \right.\right.\right. \\
&\left.\frac{12}{5}s^4\right)\upsilon^6 + \left(-96s^2 + \frac{288}{5}s^4 + 144\right)\upsilon^4 \\
&+\left(-\frac{2304}{5}s^2 + 48s^4\right)\upsilon^2 + \\
&\frac{2736}{5}s^4)\sin(\upsilon) \\
&+\left(-s^2 + \frac{12}{5}\right)\upsilon^8 + \left(-\frac{9}{10}s^2 + s^4 - \right. \\
&\left.\frac{18}{5}\right)\upsilon^6 \\
&+\left(\frac{33}{2}s^4 + \frac{234}{5}s^2 - \frac{864}{5}\right)\upsilon^4 \\
&+\left(-\frac{1008}{5}s^4 + \frac{2304}{5}s^2\right)\upsilon^2 - 288s^4)\upsilon)\upsilon.
\end{aligned}
$$

با توجه به اینکه اکثر معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با شرایط اولیه که دارای جواب‌های نوسانی یا متناوب بوده و از مسائل طبیعی فرمول‌بندی شده‌اند، دارای یک فرکانس هستند لذا مطالعه ناحیه پایداری روش در نزدیکی نیمساز ربع اول از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بنابراین مطاله خود را به بررسی ناحیه پایداری در اطراف نیمساز ربع اول معطوف می‌کنیم. به‌عبارت دیگر ناحیه پایداری روش را در حالتی که $s = \upsilon$ باشد مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ناحیه پایداری روش جدید در شکل ۷.۳ نشان داده شده است که در آن بخش سفید رنگ ناحیه ناحیه ناپایداری و بخش رنگی، ناحیه پایداری روش را نشان می‌دهد. از نظر هندسی، برای مسائلی که دارای یک فرکانس هستند، روش را P–پایدار خوانیم هرگاه نیمساز ربع اول بطور کامل داخل بخش رنگی باشد.

با توجه به شکل ۷.۳ می‌توان دید نیمساز ربع اول صفحه مختصات $s - \upsilon$ کاملاً در ناحیه پایداری (ناحیه پررنگ) قرار گرفته است که این یعنی بازه تناوبی روش $(0, +\infty)$ بوده و لذا روش P–پایدار است. البته این مطلب را به‌صورت

جبری در قضیه بعدی ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۳.۲: روش دوگامی ابرشکف جدید P-پایدار است.

اثبات: با فرض $s = v$، معادله مشخصه روش جدید که با ChE نشان داده‌ایم به‌فرم

$$ChE = \frac{-2T_0}{T_1}(\lambda^2 - 2\cos(v)\,\lambda + 1),$$

خواهد بود که در آن

$$\begin{aligned}T_0 &= s^6\cos(s)^2 - 3s^5\cos(s)\sin(s)\\ &-5s^6\cos(s) + 12s^4\cos(s)^2\\ &-15s^5\sin(s) - 2s^6 -\\ &132s^3\cos(s)\sin(s)\\ &+12s^4\cos(s) + 132s^3\sin(s) - 24s^4\\ &+192\cos(s)^3 - 576\cos(s)^2 +\\ &576\cos(s) - 192,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}T_1 &= s(-s^5\cos(s)^2 +\\ &8s^2\cos(s)^2\sin(s)\\ &-3s^3\cos(s)^2 - 2s^5 + 72s\cos(s)^3 +\\ &32s^2\cos(s)\sin(s)\\ &-120\cos(s)^2\sin(s) - 40\sin(s) + 3s^3\\ &+240\cos(s)\sin(s) - 216s\cos(s)\\ &-120\sin(s) + 144s).\end{aligned}$$

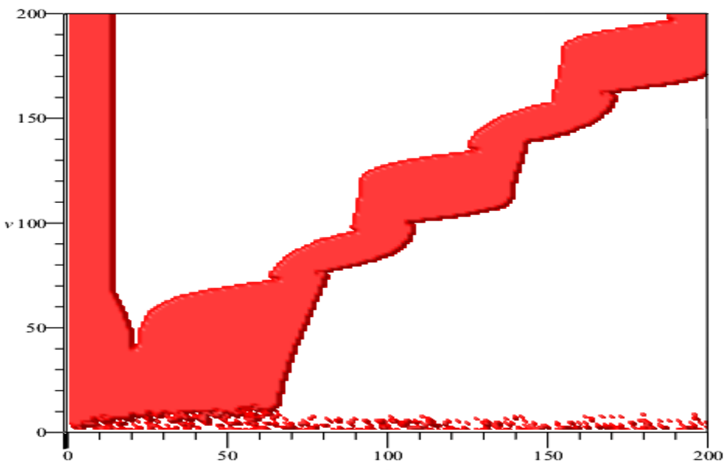
بنابراین با استفاده از رابطه (۵) و با توجه به روابط فوق، بدیهی است بازه تناوبی روش جدید برابر با $(0, +\infty)$ بوده و این همان P-پایداری بوده و اثبات کامل است. ■

۵- نتایج عددی

در این بخش، با استفاده از نتایج عددی حاصل از اعمال روش جدید روی برخی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم شناخته شده که دارای جواب‌های تناوبی یا نوسانی هستند، بالا بودن دقت و کارائی آن را نسبت به روش‌های مشابه که توسط افراد معروفی در این زمینه طراحی شده‌اند نشان خواهیم داد. روش‌هایی که مورد مقایسه قرار خواهند گرفت به قرار زیر هستند:

- روش ابرشکف از مرتبه جبری دوازده که توسط سیموس [۲۲] ارائه شده و در جدول با نماد *روش آ* نشان داده شده است.
- روش ابرشکف از مرتبه جبری دوازده که توسط وان دائله [۲۳] ارائه شده و در جدول با نماد *روش ب* نشان داده شده است.
- روش ابرشکف از مرتبه جبری دوازده که توسط وانگ [۲۴] ارائه شده و در جدول با نماد *روش پ* نشان داده شده است.

شکل (۷.۳): ناحیه پایداری روش جدید



- روش ابرشکف از مرتبه جبری دوازده که توسط شکری [۲۵] ارائه شده و در جدول با نماد *روش ت* نشان داده شده است.
- روش ابرشکف کلاسیک از مرتبه جبری دوازده که در بخش ۲ در به آن اشاره شد و در جدول با نماد *کلاسیک* نشان داده شده است.
- روش جدید که در جدول با نماد روش *جدید* نشان داده شده است.

مثال۵.۱: معادله دیفرانسیل غیرخطی نامیرا شده دافینگ به‌فرم

$$y'' = -y - y^3 + B\cos(\omega x),$$

را در نظر بگیرید که در آن $y(0) = 0.200426728067$، $B = 0.002$، $\omega = 1.01$ و $x \in \left[0, \frac{40.5\pi}{1.01}\right]$. جواب دقیق معادله دافینگ به‌فرم

$$g(x) = \sum_{i=0}^{3} K_{2i+1}\cos((2i+1)\omega x),$$

است که در آن

$$K_1 = 0.200179477536,$$
$$K_3 = 0.246946143 \times 10^{-3},$$
$$K_5 = 0.304016 \times 10^{-6},$$
$$K_7 = 0.374 \times 10^{-9},$$

برای اینکه بتوان دسته روش‌های ایرشکوف را روی مساله دافینگ پیاده کرد، باید مقدار y' را که در جمله $y^{(4)}$ ظاهر می‌شود نیز داشته باشیم. مشتقات مراتب بالای معادله غیرخطی دافینگ که برحسب جملات y' و y'' هستند، به‌صورت

$$y^{(3)} = -(1+3y^2)y' - B\omega\sin(\omega x),$$

و

$$y^{(4)} = -(1+3y^2)y'' - 6yy'^2 - B\omega^2\cos(\omega x),$$

می‌باشند. خطاهای مطلق روش جدید در مقایسه با روش‌های بیان شده در نقطه $x \in \left[0, \frac{40.5\pi}{1.01}\right]$ در جدول ۱ و واحد زمان صرف شده برای حصول نتایج عددی در جدول ۲ نشان داده شده‌اند.

مثال۵.۲: معادله دیفرانسیل غیرخطی

$$y'' = -100y + 99\sin(x), y(0) = 1,$$
$$y'(0) = 11,$$

را در نظر بگیرید. جواب دقیق این معادله به‌صورت

$$y(x) = \cos(10x) + \sin(10x) + \sin(x)$$

است. این معادله در بازه $0 \le x \le 10\pi$ و با استفاده از مقادیر آغازین دقیق و با طول گام‌های $\frac{\pi}{50}$، $\frac{\pi}{100}$، $\frac{\pi}{200}$، $\frac{\pi}{300}$، $\frac{\pi}{400}$ و $\frac{\pi}{500}$ حل شده است. نتایج عددی مربوط به این مثال جدول ۳ و واحد زمان صرف شده برای حصول نتایج عددی در جدول ۴ نشان داده شده‌اند. با توجه به جدول ۳، می‌توان دید که با کاهش طول گام در روش جدید، دقت روش نیز افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان تخمینی از مرتبه روش که با فرمول

$$p = \log_2\left(\left\|e_h(T)/e_{\frac{h}{2}}(T)\right\|\right),$$

قابل محاسبه است، بدست آورد که در آن $\|e_h(T)\|$ بیانگر نرم بردار خطا در انتهای بازه حل با طول گام h است ([۲۶]). به سادگی می‌توان از جدول ۳، مقادیر عددی ۱۰/۱، ۱۱/۲، ۱۱/۸، ۱۱/۹۶ و ۱۱/۹۸ را نتیجه گرفت که مرتبه همگرایی روش جدید را به‌صورت عددی تأیید می‌کنند.

مثال ۵.۳: مساله مقدار اولیه

$$y'' = \frac{8y^2}{1+2x}, y(0) = 1, y'(0) = -2,$$
$$x \in [0,4.5],$$

را در نظر بگیرید. جواب دقیق این معادله به‌فرم

$$y = \frac{1}{1+2x}.$$

است. خطاهای مطلق روش جدید در مقایسه با روش‌های بیان شده در نقطه $x = 4.5$ در جدول ۵ و واحد زمان صرف شده برای حصول همین نتایج در جدول ۶ نشان داده شده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تکنیک صفر کردن فاز تاخیری و مشتق‌های مراتب اول، دوم و سوم آن، در دسته

روش‌های ابرشکف یا همان دسته روش‌های چندمشتقی، توانستیم روش جدیدی از مرتبه جبری دوازده بسازیم که دارای خاصیت مهم P–پایداری است و برای حل عددی مسائل مقدار اولیه مرتبه دوم با جواب‌های نوسانی یا متناوب مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به نتایج عددی ارائه شده در جدول‌های شش‌گانه که با استفاده از نرم‌افزار میپل تهیه شده‌اند، روش ارائه شده در این مقاله، بسیار کاراتر از روش‌های مشابه که در سال‌های اخیر و در مجلات معتبر توسط افراد فعال در این زمینه ارائه شده‌اند، می‌باشد. قابل ذکر است حصول دقت بالا در روش جدید ارائه شده در این مقاله به همراه پائین آمدن واحد زمان صرف شده (مدت زمان CPU) می‌باشد که این عمل اساسی‌ترین هدف در مباحث آنالیز عددی است.

جدول (۱): خطای مطلق تولید شده در نقطه آخر برای مثال ۱.۵

h	روش جدید	کلاسیک	روش آ	روش ب	روش پ	روش ت
$\frac{M}{500}$	۸/۴۳e-۱۴	۱/۰۵e-۰۵	۳/۱۵e-۰۴	۴/۰۶e-۰۵	۴/۰۸e-۰۵	۹/۳۱e-۱۱
$\frac{M}{1000}$	۷/۶۲e-۱۵	۲/۳۵e-۰۶	۱/۸۱e-۰۵	۱/۸۷e-۰۶	۱/۲۷e-۰۶	۸/۰۳e-۱۲
$\frac{M}{2000}$	۶/۳۲e-۱۵	۲/۹۷e-۰۶	۱/۰۸e-۰۶	۳/۸۳e-۰۸	۳/۹۳e-۰۸	۵/۵۲e-۱۲
$\frac{M}{3000}$	۷/۱۶e-۱۵	۷/۸۸e-۰۶	۲/۰۹e-۰۷	۵/۱۳e-۰۹	۵/۱۷e-۰۹	۷/۲۵e-۱۲
$\frac{M}{4000}$	۵/۱۸e-۱۵	۲/۰۲e-۰۷	۶/۵۵e-۰۸	۳/۱۹e-۰۹	۱/۲۳e-۰۹	۶/۹۹e-۱۲
$\frac{M}{5000}$	۴/۹۸e-۱۵	۵/۹۵e-۰۷	۲/۶۷e-۰۸	۹/۸۹e-۱۰	۴/۰۷e-۱۰	۶/۶۵e-۱۲

جدول (۲): واحد زمان صرف شده برای مثال ۱.۵

h	روش جدید	کلاسیک	روش آ	روش ب	روش پ	روش ت
$\frac{M}{500}$	۱/۱	۱/۱	۱/۴	۱/۵	۱/۴	۱/۱
$\frac{M}{1000}$	۲/۱	۲/۲	۲/۹	۲/۹	۲/۹	۲/۲
$\frac{M}{2000}$	۳/۵	۴/۴	۶/۲	۶/۳	۶/۲	۴/۳
$\frac{M}{3000}$	۵/۲	۷/۵	۹/۸	۹/۷	۹/۵	۷/۲
$\frac{M}{4000}$	۸/۱	۹/۸	۱۳/۵	۱۳/۳	۱۳	۱۰
$\frac{M}{5000}$	۱۰/۶	۱۴	۱۷	۱۷	۱۶/۵	۱۲

جدول (۳): خطای مطلق تولید شده در نقطه آخر برای مثال ۲.۵

h	روش جدید	کلاسیک	روش آ	روش ب	روش ت
$\frac{\pi}{50}$	۸/۴۵e-۱۸	۳/۰۳e-۰۶	۳/۰۵e-۱۱	۱/۲۰e-۱۱	۹/۶۳e-۱۶
$\frac{\pi}{100}$	۹/۳۱e-۲۱	۱/۱۵e-۰۸	۲/۲۸e-۱۳	۷/۳۴e-۱۳	۱/۴۷e-۱۹
$\frac{\pi}{200}$	۲/۲۶e-۲۵	۴/۵۰e-۱۱	۴/۴۰e-۱۳	۸/۶۲e-۱۳	۹/۰۷e-۲۳
$\frac{\pi}{300}$	۸/۰۹e-۲۸	۱/۷۶e-۱۲	۲/۱۱e-۱۲	۲/۶۳e-۱۲	۱/۴۴e-۲۴
$\frac{\pi}{400}$	۳/۲۴e-۳۲	۱/۷۶e-۱۳	۱/۳۸e-۱۲	۲/۹۳e-۱۲	۴/۷۷e-۲۶
$\frac{\pi}{500}$	۱/۳۱e-۳۶	۲/۹۵e-۱۴	۶/۴۶e-۱۲	۲/۸۹e-۱۲	۴/۱۴e-۲۷

جدول (۴): واحد زمان صرف شده برای مثال ۲.۵

h	روش جدید	روش ت	کلاسیک	روش آ	روش ب
$\frac{\pi}{50}$	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۲	۰/۱۷	۰/۲۵
$\frac{\pi}{100}$	۰/۳۶	۰/۴۴	۰/۳۳	۰/۵۱	۰/۵۳
$\frac{\pi}{200}$	۰/۴۱	۰/۸۹	۰/۹	۰/۸۶	۰/۸۳
$\frac{\pi}{300}$	۱/۰۲	۱/۳۵	۱/۴	۱/۱۴	۱/۱۵
$\frac{\pi}{400}$	۱/۱۶	۱/۸	۱/۹	۱/۳۹	۱/۴۰
$\frac{\pi}{500}$	۱/۳۶	۲/۳	۲/۳	۱/۷۰	۱/۷۸

جدول (۵): خطای مطلق تولید شده در نقطه آخر برای مثال ۳.۵

h	روش جدید	روش ت	کلاسیک	روش آ	روش ب	روش پ
$\frac{4.5}{500}$	۷/۳۱e-۱۷	۶/۶۱e-۱۴	۱/۸۵e-۰۶	۱/۲۴e–۰۷	۱/۲۶e-۰۷	۱/۲۴e-۰۷
$\frac{4.5}{1000}$	۶/۲۱e-۱۹	۴/۸۱e-۱۶	۱/۶۵e-۰۶	۳/۸۲e-۰۹	۳/۹۰e-۰۹	۳/۸۲e-۰۹
$\frac{4.5}{2000}$	۵/۴۲e-۲۱	۲/۶۰e-۱۸	۳/۹۴e-۰۷	۱/۱۹e-۱۰	۱/۲۳e-۱۰	۱/۱۹e-۱۰
$\frac{4.5}{3000}$	۸/۹۷e-۲۳	۱/۱۳e-۱۹	۳/۷۶e-۰۷	۱/۹۲e-۱۱	۲/۰۲e-۱۱	۱/۹۲e-۱۱
$\frac{4.5}{4000}$	۹/۳۴e-۲۵	۱/۲۰e-۲۰	۳/۰۵e-۰۸	۷/۸۵e-۱۲	۷/۸۵e-۱۲	۷/۸۵e-۱۲
$\frac{4.5}{5000}$	۷/۳۶e-۲۷	۲/۰۷e-۲۱	۲/۷۱e-۰۸	۱/۶۳e-۱۲	۱/۶۳e-۱۲	۱/۶۳e-۱۲

جدول (۶): واحد زمان صرف شده برای مثال ۳.۵

h	روش جدید	روش ت	کلاسیک	روش آ	روش ب	روش پ
$\frac{4.5}{500}$	۰/۱۷	۰/۱۹	۰/۲	۰/۳۷	۰/۳۴	۰/۳۱
$\frac{4.5}{1000}$	۰/۲۶	۰/۳۴	۰/۳۷	۰/۶۲	۰/۶۱	۱/۲۳
$\frac{4.5}{2000}$	۰/۵۳	۰/۷۲	۰/۷۲	۰/۶۲	۰/۶۱	۱/۲۳
$\frac{4.5}{3000}$	۰/۹۷	۱/۱	۱	۱/۲۳	۱/۹۲	۱/۸۷
$\frac{4.5}{4000}$	۱/۲	۱/۴	۱/۵	۱/۸۹	۲/۵۹	۲/۵۶
$\frac{4.5}{5000}$	۱/۶	۱/۸	۱/۸	۲/۵۹	۳/۲۹	۳/۲۴

فهرست منابع

[1] Achar, S. D., Symmetric multistep Obrechkoff methods with zero phase-lag for periodic initial value problems of second order differential equations, Applied Mathematics and Computation 218 (2011) 2237-2248.

[2] Alolyan, I., Simos, T. E., Mulitstep methods with vanished phase-lag and its first and second derivatives for the numerical integration of the Schrödinger equation, Journal of Mathematical Chemistry 48(4) (2010) 1092-1143.

[3] Anantha Krishnaiah, U. A., P-stable Obrechkoff methods with minimal phase-lag for periodic initial value problems, Mathematics of Computation 49(180) (1987) 553-559.

[4] Chawla, M. M., Rao, P. S., A Numerov-type method with minimal phase-lag for the integration of second order periodic initial value problems. ii: Explicit method, Journal of Computational and Applied Mathematics 15 (1986) 329-337.

[5] Dahlquist, G., On accuracy and unconditional stability of linear multistep methods for second order differential equations, BIT Numerical Mathematics 18(2) (1978) 133-136.

[6] Ramos, H., Vigo-Aguiar, J., On the frequency choice in trigonometrically fitted methods, Applied Mathematics Letters 23(11) (2010) 1378-1381.

[7] Raptis, A. D., Allison, A. C., Exponential-fitting methods for the numerical solution of the Schrödinger equation., Computer Physics Communications 14 (1978) 1-5.

[8] Raptis, A. D., Exponentially-fitted solutions of the eigenvalue Schrödinger equation with automatic error control, Computer Physics Communications 28 (1983) 427-431.

[9] Shokri, A., A new eight-order symmetric two-step multiderivative method for the numerical solution of second-order IVPs with oscillating solutions, Numerical Algorithms 77(1) (2018) 95-109.

[10] Shokri, A., The symmetric two-step P-stable nonlinear predictor-corrector methods for the numerical solution of second order initial value problems, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 41(1) (2015) 191-205.

[11] Shokri, A., Saadat, H., Trigonometrically fitted high-order predictor corrector method with phase-lag of order infinity for the numerical solution of radial Schrödinger equation, Journal of Mathematical Chemistry 52(7) (2014) 1870-1894.

[12] Shokri, A., Shokri, A. A., Implicit one-step L-stable generalized hybrid methods for the numerical solution of first order initial value problems, Iranian Journal of Mathematical Chemistry 4(2) (2013) 201-212.

[13] Shokri, A., Shokri, A. A., Mostafavi, Sh., Saadat, H., Trigonometrically fitted two-step obrechkoff methods for the numerical solution of periodic initial value problems, Iranian Journal of Mathematical Chemistry 6(2) (2015) 145-161.

[14] Shokri, A., Tahmourasi, M., A new two-step Obrechkoff method with vanished phase-lag and some of its derivatives for the numerical solution of radial Schrödinger equation and related IVPs with oscillating solutions, Iranian Journal of Mathematical Chemistry 8(2) (2017) 137-159.

[15] Shokri, A., Mehdizadeh Khalsaraei,

M., Tahmourasi, M., Garcia-Rubio, R., A new family of three-stage two-step P-stable multiderivative methods with vanished phase-lag and some of its derivatives for the numerical solution of radial Schrödinger equation and IVPs with oscillating solutions, Numerical Algorithms 80(2) (2019) 557-593.

[16] Mehdizadeh Khalsaraei, M., Shokri, A., An explicit six-step singularly P-stable Obrechkoff method for the numerical solution of second-order oscillatory initial value problems, Numerical Algorithms (2019) https://doi.org/10.1007/s11075-019-00784-w.

[17] Mehdizadeh Khalsaraei, M., Shokri, A., A new explicit singularly P-stable four-step method for the numerical solution of second order IVPs, Iranian Journal of Mathematical Chemistry (2020) DOI:10.22052/ijmc.2020.207671.1472.

[18] Mehdizadeh Khalsaraei, M., Shokri, A., Molayi, M., The new high approximation of stiff systems of first order IVPs arising from chemical reactions by k-step L-stable hybrid methods, Iranian Journal of Mathematical Chemistry 10(2) (2019) 181-193.

[19] Shokri, A., Mehdizadeh Khalsaraei, M., A new family of explicit linear two-step singularly P-stable Obrechkoff methods for the numerical solution of second-order IVPs, Applied Mathematics and Computation (2020) DOI: 10.1016/ j.amc.2020.125116.

[20] Vanden Berghe, G., Van Daele, M., Trigonometric polynomial or exponential fitting approach, Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2009) 969-979.

[21] Lambert, J. D., Watson, I. A., Symmetric multistep methods for periodic initial value problems, IMA Journal of Applied Mathematics 18(2) (1976) 189-202.

[22] Simos, T. E., A P-stable complete in phase Obrechkoff trigonometric fitted method for periodic initial value problems, Proceedings: Mathematical and Physical Sciences 441(1912) (1993) 283-289.

[23] Van Daele, M., Vanden Berghe, G., P-stable exponentially fitted Obrechkoff methods of arbitrary order for second order differential equations, Numerical Algorithms 46 (2007) 333-350.

[24] Wang, Z., Zhao, D., Dai, Y. and Wu, D., An improved trigonometrically fitted P-stable Obrechkoff method for periodic initial value problems Proceedings of The Royal Society A 461 (2005) 1639-1658.

[25] Shokri, A., Saadat, H., High phase-lag order trigonometrically fitted two-step Obrechkoff methods for the numerical solution of periodic initial value problems, Numerical Algorithms 68 (2015) 337-354.

[۲۶] عبدی، علی، حسینی، سید احمد، (۱۳۹۶)، روش‌های عددی همتافته و متقارن برای حل عددی برخی مدل‌های ریاضی اجرام سماوی. پژوهش‌های نوین در ریاضی، دوره ۳ شماره ۱۱ صفحه ۱۰۹–۱۱۸.