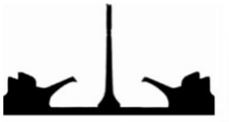
دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تحلیل دوآلیتی در تکنولوژی‌هایی با دسترسی‌پذیری ضعیف

حمیرا امیرمحمدی[۱]، علیرضا امیرتیموری[۱]، سهراب کردرستمی[۲*]، محسن واعظ قاسمی[۱]

(۱) گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۲۵

چکیده

در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها (*DEA*) در بسیاری موارد اصل دسترسی‌پذیری ضعیف به ازای خروجی‌های نامطلوب مانند آلاینده‌های محیطی به کار برده شده است. با توجه به این اصل، مدل های مختلفی برای ارزیابی کارایی واحدهای تحت ارزیابی ارائه می‌شود. در این مقاله، دوآلیتی در مدل دسترسی‌پذیری ضعیف کاسمانن (۲۰۰۵) و امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) را بیان می‌کنیم. در ادامه تعبیرهای اقتصادی دوال را در تکنولوژی‌های فوق بیان کرده و همچنین نقاط تصویر واحدهای ناکارا را معرفی می‌نماییم. سپس روش‌های مطرح شده در مثالی شرح داده می‌شود که شامل طراحی‌های مختلف در خط تولید یک کارخانه می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، دوآلیتی، دسترسی‌پذیری ضعیف، خروجی‌های نامطلوب.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: sohrabkordrostami@gmail.com

۱. مقدمه

تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) که اولین بار توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) مطرح شد، ابزاری کارآمد برای محققین در رشته‌ها و شاخه‌های مختلف علوم از جمله تحقیق در عملیات، ریاضیات کاربردی، مدیریت و اقتصاد می‌باشد. در رابطه با ساختار تکنولوژی تولید، DEA با انتخاب مناسبی از ورودی‌ها و خروجی‌ها و ساختن مفروضات کلی نظیر محدب، دسترسی‌پذیری و بازده به مقیاس به ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری می‌پردازد. هدف اصلی از به کار بردن تحلیل پوششی داده‌ها به حداقل رساندن ورودی‌های مطلوب و افزایش حداکثری سطح خروجی‌های مطلوب است.

در دو دهه اخیر یکی از موضوعات مهم و جالبی که توسط محققین مورد توجه قرار گرفته حضور عوامل نامطلوب نظیر آلودگی‌های صوتی، آلاینده‌های محیطی و ... در تکنولوژی تولید می‌باشند که به همراه خروجی‌های مطلوب تولید می‌گردند. حضور این گروه از خروجی‌ها بر روی برآورد اندازه کارایی مجموعه‌های تحت ارزیابی تأثیر بسزایی دارند. شفارد (۱۹۷۰) اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌های مطلوب و نامطلوب را با یک فاکتور کاهش یکنواخت ضربی مطرح کرد. هایلو و ویمن (۲۰۰۱) نیز روشی ناپارامتری با استفاده از خروجی‌های نامطلوب به منظور فراهم آوردن شکل کامل‌تری از تکنولوژی تولید ارائه کردند. اساس این روش، اصلاح روش غیر پارامتری بنکر و ماندیریتا (۱۹۸۶) و دیدگاه آن نسبت به خروجی‌های نامطلوب در تکنولوژی تولید، همان رویکرد کاهشی برای ورودی‌ها بود. آن‌ها با این استدلال که خروجی‌های نامطلوب نیز همانند ورودی‌ها برای واحد تصمیم‌گیرنده هزینه به همراه دارند، اصل دسترسی‌پذیری قوی را برای این خروجی‌ها در نظر گرفتند. فار و گرسکوف (۲۰۰۳) با ارائه‌ی نقدی بر کار هایلو و ویمن (۲۰۰۱) بیان کردند که در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به عنوان ورودی، متناقض با قوانین فیزیکی و اصول استاندارد تئوری تولید است. کاسمانن (۲۰۰۵) مدلی ارائه کرد که در آن از ضرایب انقباض غیر یکنواخت استفاده شده است. فار و گرسکوف (۲۰۰۹) ادعا کردند که مجموعه امکان تولیدی که در اصل دسترسی‌پذیری شفارد صدق می‌کند باید کوچکتر از مجموعه امکان تولید ارائه شده توسط کاسمانن (۲۰۰۵) باشد. کاسمانن و پودینوفسکی (۲۰۰۹) با ارائه یک مثال عددی نشان دادند که مدل تولید شده توسط فار و گرسکوف برخی از اصول مهم تئوری تولید یعنی اصل کمینه برون‌یابی و تحدب را نقض می‌کند. آن‌ها همچنین ثابت کردند که مجموعه امکان تولید تعریف شده توسط کاسمانن کوچکترین مجموعه امکان تولید است که شامل دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های مطلوب و نامطلوب می‌باشد. محققین زیادی در مورد خروجی‌های نامطلوب به مطالعه پرداخته‌اند که از آن جمله می‌توان به کاسمانن و کاظمی متین (۲۰۱۱)، کاسمانن و پودینوفسکی (۲۰۱۱)، هو و لیو (۲۰۱۵)، چن و همکاران (۲۰۱۷) و مهدیلوزاد و پودینوفسکی (۲۰۱۸)، زو وهمکاران (۲۰۱۹)، جهانی صیادنویری و همکاران (۲۰۱۹)، شیرازی و محمدی (۲۰۱۹)، هالکوس وپترو (۲۰۱۹)، طلوع و هانکلووا (۲۰۲۰)، چن ولین (۲۰۲۰) وزانگ و سو (۲۰۲۰) اشاره نمود. تعریف موجود از اصل دسترسی پذیری ضعیف شفارد به شکل ضربی به این معنا است که صفر بودن سطح خروجی نامطلوب فقط در صورتی اتفاق می‌افتد که سطح خروجی مطلوب نیز صفر شود. از سویی در بسیاری از کاربردهای واقعی با مواردی مواجه می‌شویم که در آن‌ها مقدار مشخص و معینی از خروجی‌های نامطلوب بدون تولید هیچگونه خروجی مطلوب تولید می‌شوند. به‌عنوان مثال یک کوره آجرپزی را در نظر بگیرید که از ذغال برای تولید گرما جهت ساخت آجر استفاده می‌کند. واضح است

که سوختن ذغال باعث تولید آلودگی می‌شود. برای تولید هر آجر، دمای کوره آجرپزی باید به درجه معینی برسد. بنابراین در این حالت قبل از تولید خروجی مطلوب باید خروجی نامطلوب تولید شده باشد در حالی که هیچ آجری تولید نشده است. امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) تعریفی جدید از دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها به شکل جمعی پیشنهاد کردند که بر طبق آن، با کم شدن یک فاکتور کاهش ثابت به صورت مجموع از هر خروجی، سطح فعالیت شاخص‌های نامطلوب، کاهش می‌یابد.

در این مطالعه فرم مضربی دو مدل کاسمانن (۲۰۰۵) و مدل دسترسی‌پذیری امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) را بررسی می‌کنیم. چون هر دو مدل با خطی‌سازی ساختار خطی آن حفظ می‌شود، دوآل دو مدل کاسمانن (۲۰۰۵) و مدل دسترسی‌پذیری امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷)، بدون احراز جهت مانند حالت ورودی محور محاسبه شده و بررسی می‌شود. متغیرهای مدل مضربی تفسیر اقتصادی به عنوان قیمت سایه دارند که اطلاعات مفیدی را برای تحلیل‌های اقتصادی در اختیار ما قرار می‌دهند، بنابراین به آن‌ها نیز پرداخته خواهد شد. در واقع دوالیتی در حضور عوامل نامطلوب و با تکنولوژی‌هایی با دسترسی پذیری ضعیف بررسی می‌شود. مجموعه داده‌های مربوط به خط تولید یک کارخانه استفاده می‌شود و نتایج با استفاده از روش پیشنهادی بررسی می‌شود. رتبه‌بندی طرح‌ها در مثال کاربردی با استفاده از کارایی متقاطع صورت می‌گیرد.

سازماندهی سایر بخش‌ها بدین ترتیب است: در بخش‌های ۲ و ۳ به بررسی دوال مدل‌های کاسمانن (۲۰۰۵) و امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) و همچنین معرفی نقاط تصویر برای واحدهای ناکارا پرداخته می شود. در بخش۴، در یک مثال کاربردی در رابطه با طراحی های مختلف در خط تولید یک کارخانه، دو تکنولوژی را با هم مقایسه خواهیم کرد. در بخش آخر نتیجه گیری مطرح می‌شود.

۲. دوآل تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵)

فرض کنید K تصمیم گیرنده (DMU) با N ورودی x_{nk} $(n=1,...,N\ ,\ k=1,...,K)$ برای تولید M خروجی مطلوب v_{mk} $(m=1,...,M\ ,\ k=1,...,K)$ و J خروجی نامطلوب w_{jk} $(j=1,...,J\ ,\ k=1,...,K)$ مورد استفاده قرار می‌گیرند. تکنولوژی تولید با حضور خروجی‌های نامطلوب به صورت زیر است:

$T=\{(x,v,w)|$ بوسیله x می تواند تولید شود $(v,w)\}$

که T یک مجموعه بسته و محدب فرض شده و ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب دسترسی‌پذیری قوی دارند. شفارد (۱۹۷۰) دسترسی پذیری ضعیف را به صورت زیر تعریف کرده است:

تعریف ۱- خروجی‌ها به طور ضعیف دسترس‌پذیر هستند، اگر $(x,v,w)\in T$, $0\le\theta\le 1$ آنگاه $(x,\theta v,\theta w)\in T$.

فاکتور کاهش منحصر بفرد θ باعث کاهش یکسان در خروجی‌های مطلوب و نامطلوب می‌شود. کاسمانن (۲۰۰۵) فاکتور کاهش یکنواخت را برای هر واحد تصمیم جداگانه به کار گرفت و با فرض دسترسی‌پذیری قوی ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب، دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب، تحدب T و بازده به مقیاس متغیر و کمینه برون‌یابی تکنولوژی تولید را به صورت زیر نشان داد:

$$
\begin{aligned}
T_K = \{(v,w) :\ & \sum_{k=1}^{K}\theta_k\gamma_k v_k \ge v \\
& \sum_{k=1}^{K}\theta_k\gamma_k w_k = w \\
& \sum_{k=1}^{K}\gamma_k x_k \le x \\
& \sum_{k=1}^{K}\gamma_k = 1 \\
& \gamma_k \ge 0 \qquad k=1,\dots,K \\
& 0\le\theta_k\le 1 \quad , \ k=1,\dots,K\ \}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

واضح است به دلیل وجود $\theta_k\gamma_k$ در تکنولوژی (۱)، T_K غیر خطی است. کاسمانن (۲۰۰۵) با یک تغییر متغیر ساده ولی کاربردی $\mu_k=(1-\theta_k)\gamma_k$, $\lambda_k=\theta_k\gamma_k$، مدل را به صورت خطی تبدیل نمود. در تغییر متغیر اعمال شده، $\gamma_k=\lambda_k+\mu_k$ حساسیت وزنی واحد kام می باشد که به دو قسمت دسته‌بندی می‌شود. λ_k قسمتی از خروجی واحد kام است که فعال باقی می‌ماند و μ_k نشان دهنده قسمتی از خروجی واحد kام می‌باشد که سطح فعالیت آن کاهش داده شده است. مدل خطی شده به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} T_K=\{(v,w):&\sum_{k=1}^{K}\lambda_k v_k\ge v\\ &\sum_{k=1}^{K}\lambda_k w_k=w\\ &\sum_{k=1}^{K}(\lambda_k+\mu_k)x_k\le x\\ &\sum_{k=1}^{K}(\lambda_k+\mu_k)=1\\ &\lambda_k\ ,\mu_k\ge 0\quad ,\quad k=1,\dots,K\} \end{aligned} \tag{۲}$$

با توجه به این که سمت راست در تکنولوژی فوق عاری از متغیر است، می‌توان اندازه کارایی تکنیکی برای ارزیابی متغیرهای تصمیم گیرنده (DMU) را به کار برد. به‌عنوان مثال اگر بخواهیم ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب را کاهش دهیم، می‌توانیم مدل شعاعی ورودی محور را به کار برده و به صورت زیر نشان دهیم:

$$\begin{aligned} &\theta^*=\mathrm{Min}\ \theta\\ &\sum_{k=1}^{K}\lambda_k x_{nk}\le\theta x_{no} \qquad n=1,\dots,N\\ &\sum_{k=1}^{K}\lambda_k w_{jk}=\theta w_{jo} \quad j=1,\dots,J\\ &\sum_{k=1}^{K}\lambda_k v_{mk}\ge v_{mo} \qquad m=1,\dots,M\\ &\sum_{k=1}^{K}(\lambda_k+\mu_k)=1\\ &\lambda_k\ ,\mu_k\ge 0 \end{aligned} \tag{۳}$$

تعریف ۲- واحد تحت ارزیابی (DMU_o) کارا است اگر و فقط اگر در هر جواب بهینه $\theta^*=1$ و مقدار متغیرهای کمکی متناظر قیود نامساوی برابر صفر باشد.

به آسانی می‌توان ثابت کرد اگر $DMU_o:(x_o,v_o,w_o)$ کارا نباشد آنگاه تصویر کارای آن روی مرز تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{x_o}&=\theta^* x_o-s^{(x)}\\ \tilde{w_o}&=\theta^* w_o\\ \tilde{v_o}&=v_o+s^{(v)} \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن $s^{(v)}$, $s^{(x)}$ متغیر های کمبود و مازاد متناظر با قید های اول و سوم فرمول (۳) می‌باشند. چون مدل (۳) خطی است، بنابراین می‌توان دوآل آن را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}\ &\sum_{m=1}^{M}\pi_m^{(v)}v_{mo}+u_o\\ &-\sum_{n=1}^{N}\pi_n^{(x)}x_{nk}+\sum_{j=1}^{J}\pi_j^{(w)}w_{jk}+\sum_{m=1}^{M}\pi_m^{(v)}v_{mk}+u_o\le 0\\ &-\sum_{n=1}^{N}\pi_n^{(x)}x_{nk}+u_o\le 0\\ &\sum_{n=1}^{N}\pi_n^{(x)}x_{no}-\sum_{j=1}^{J}\pi_j^{(w)}w_{jo}=1\\ &\pi_n^{(x)},\ \pi_m^{(v)}\ge 0 \qquad n,m \text{ برای همه}\\ &\pi_j^{(w)},\ u_o \quad \text{آزاد} \end{aligned} \tag{۵}$$

در مسئله پرایمال به دلیل اصل دسترسی پذیری ضعیف برای خروجی‌های نامطلوب w قید به صورت تساوی است و μ هم وزن‌های ورودی‌هایی است که در تکنولوژی کاسمانن آزاد نگه داشته شده است. در مسئله دوآل، متغیر آزاد u_o به عنوان بیشترین مقدار سود در متغیر تصمیم‌گیرنده kام تعبیر می‌شود. همچنین باید توجه داشته باشیم که قید اول، حداقل برای یک DMU نمونه برداری شده به‌عنوان DMU مرجع در مسئله پرایمال نافذ باشد. شرط محدود کننده (قید دوم) قیمت های

سایه را به جای قیمت‌های ورودی‌های مشاهده شده بیان می‌کند.

۳. دوآل تکنولوژی امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷)

در تکنولوژی امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) اصل دسترسی پذیری ضعیف به شکل دیگری به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف۳- خروجی‌ها به طور ضعیف دسترس پذیر هستند، اگر $(\alpha_m,\alpha_j)\geq 0$, $(x,v,w)\in \mathrm{T}$، آنگاه $0\leq (x,v-\alpha_m,w-\alpha_j)\in T$. که در آن $\alpha_j=(\alpha,...,\alpha)$, $\alpha_m=(\alpha,...,\alpha)$ به ترتیب بردارهای M تایی و Jتایی با $\alpha\geq 0$ هستند.

بنا به تعریف (۳) برای هر ورودی/ خروجی یک فاکتور کاهش ثابت می‌توان به کار برد و بدون از دست دادن کلیت، فرض شده است که این فاکتور ثابت، فقط برای خروجی‌های مطلوب و نامطلوب باشد. با اصول شمول مشاهدات، تحدب و دسترسی پذیری قوی برای ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب در سطحی که خروجی‌های نامطلوب بدون تغییر باقی بمانند و اصول دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌های مطلوب و نامطلوب و کمینه برون یابی، تکنولوژی زیرساخته شده است:

$$
\begin{aligned}
T_A=\{(x,v,w):\ & \sum_{k=1}^{K} z_k(v_{mk}-\alpha_m)\geq v_m \qquad m=1,...,M\\
& \sum_{k=1}^{K} z_k(w_{jk}-\alpha_j)= w_j \qquad j=1,...,J\\
& \sum_{k=1}^{K} z_k x_{nk}\leq x_n \qquad n=1,...,N\\
& \sum_{k=1}^{K} z_k=1\\
& v_k\geq \alpha_m \qquad m=1,...,M\\
& w_k\geq \alpha_j \qquad j=1,....,J\}
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

در این تکنولوژی $\alpha_m=\alpha$ mامین مولفه و $\alpha_j=\alpha$ j امین مولفه بردارهای α_m و α_j می باشد و $z_k\geq 0$ ،$K=1,...,k$ ضریب حساسیت به کار برده شده برای ارتباط ورودی‌ها وخروجی‌ها در ترکیب محدب می‌باشد. تکنولوژی تولید (۶) غیرخطی است، بافرض $\delta_k=\alpha z_k$, $\eta_k=(1-\alpha)z_k$ که در آن $\delta_k\geq 0$, η_k از نظر علامت آزاد است زیرا α محدود نمی‌باشد. با به کار بردن این تغییرات در متغیرها تکنولوژی به‌صورت خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
T_A=\{(x,v,w):\ & \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)v_{mk}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\geq v_m \quad m=1,...,M\\
& \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)w_{jk}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k=w_j \quad j=1,...,J\\
& \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)x_{nk}\leq x_n \qquad n=1,...,N\\
& \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)=1\\
& v_{mk}(\delta_k+\eta_k)\geq\delta_k \qquad m=1,...,M \quad k=1,...,K\\
& w_{jk}(\delta_k+\eta_k)\geq\delta_k \qquad j=1,...,J \quad k=1,...,K\\
& \delta_k\geq 0 \qquad k=1,...,K\}
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

حال برای ارزیابی یک واحد تصمیم‌گیری کافی است مدل فوق را برای هر DMU یک بار حل کنیم. به عنوان مثال برای کاهش ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب از مدل شعاعی ورودی محور استفاده کرده و مدل به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& \rho^* = \mathrm{Min}\ \rho\\
& \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)\,x_{nk}\leq \rho x_{no} \qquad n=1,...,N\\
& \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)\,w_{jk}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k=\rho\, w_{jo} \qquad j=1,...,J\\
& \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)\,v_{mk}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\geq v_{mo} \qquad m=1,...,M\\
& \sum_{k=1}^{K}(\delta_k+\eta_k)=1\\
& (\delta_k+\eta_k)\,v_{mk}\geq\delta_k \qquad m=1,...,M \quad k=1,...,K\\
& (\delta_k+\eta_k)\,w_{jk}\geq\delta_k \qquad j=1,...,J \quad k=1,...,K\\
& \delta_k\geq 0 \qquad \eta_k \text{ آزاد}
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

تعریف ۴- واحد تحت ارزیابی (DMU_o)کارا است اگر و فقط اگر $\rho^*=1$و تمام متغیرهای کمکی برابر صفر باشند.

اگر واحد تحت ارزیابی $DMU_o:(x_o,v_o,w_o)$ناکارا

باشد، آنگاه نقطه تصویر کارای آن روی مرز تولید به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\hat{x}_o &= \rho^* x_o - \bar{s}^{(x)} \\ \hat{w}_o &= \rho^* w_o \\ \hat{v}_o &= v_o + \bar{s}^{(v)}\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن $\bar{s}^{(v)}$ ، $\bar{s}^{(x)}$ متغیرهای کمبود و مازاد متناظر با قیدهای اول و سوم در فرمول (۸) هستند. اکنون می‌خواهیم دو مدل را به لحاظ پیچیدگی محاسباتی مقایسه کنیم. تعداد متغیرهای مدل (۳)، $2N+M+J+2$ می‌باشد، لذا ناحیه شدنی آن $R^{2N+J+M+2}$ می‌شود. تعداد متغیرهای فرمول (۸) $2N+2M+2J+2$ می‌باشد و ناحیه شدنی آن $R^{2N+2J+2M+2}$ است. بنابراین واضح است که ناحیه شدنی مدل امیرتیموری و همکاران بزرگتر می‌باشد. از آن جایی که مدل (۸) نیز خطی است، دوآل آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\text{Max} \sum_{m=1}^{M}\pi_m^{(v)} v_{mo}+\Lambda \\ &-\sum_{n=1}^{N}\pi_n^{(x)} x_{nk}+\sum_{j=1}^{J}\pi_j^{(w)} w_{jk}-\sum_{j=1}^{J}\pi_j^{(w)}+\sum_{m=1}^{M}\pi_m^{(v)} v_{mk}-\sum_{m=1}^{M}\pi_m^{(v)}+ \\ &\sum_{m=1}^{M}H_{mk}^{(v)} v_{mk}-\sum_{m=1}^{M}H_{mk}^{(v)}+\sum_{j=1}^{J}H_{jk}^{(w)} v_{jk}-\sum_{j=1}^{J}H_{jk}^{(w)}+\Lambda\le 0 \\ &-\sum_{n=1}^{N}\pi_n^{(x)} x_{nk}+\sum_{j=1}^{J}\pi_j^{(w)} w_{jk}+\sum_{m=1}^{M}\pi_m^{(v)} v_{mk}+\sum_{m=1}^{M}H_{mk}^{(v)} v_{mk}+\sum_{j=1}^{J}H_{jk}^{(w)} w_{jk}+\Lambda=0 \\ &\sum_{n=1}^{N}\pi_n^{(x)} x_{no}-\sum_{j=1}^{J}\pi_j^{(w)} w_{jo}=1 \\ &\pi_n^{(x)},\ \pi_m^{(v)},\ H_m^{(v)},\ H_j^{(w)}\ge 0 \\ &\pi_j^{(w)},\ \Lambda \quad \text{آزاد}\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

در مسئله پرایمال، ورودی‌ها و خروجی‌های بد کاهش می‌یابند در حالی که خروجی‌های خوب در سطح ثابت نگه داشته می‌شوند. همچنین $z_k\alpha$ تعدادی از خروجی‌هاست که با ورودی‌ها در سطح بهینه تولید نمی‌شود و باید برای کاهش آلودگی تعدیل شود. در فرمول دوآل، قید دوم نافذ می‌باشد که متناظر متغیر آزاد η در مسئله پرایمال است. چون متغیر مازاد این قید صفر می‌باشد لذا بنا به قضیه مکمل زائد، متغیر η در پرایمال می‌تواند مثبت باشد.

۴. مثال کاربردی

در مثالی که در ذیل ارائه می‌شود نتیجه اجرای مدل‌های مطرح شده در بخش‌های پیشین را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مجموعه داده‌های مربوط به ۲۳ خط تولید از یک کارخانه آمریکائی برای ارزیابی پایداری کارایی (چن و همکاران، ۲۰۱۲) برای بررسی انتخاب شده است. خطوط تولید کارخانه ما را به طرح‌های مختلف هدایت می‌کنند. بنابراین هر طرح می‌تواند به عنوان واحد تصمیم‌گیرنده یا DMU برای ارزیابی در نظر گرفته شود. هر طرح از دو مقیاس درونی به نام‌های فرآیند طرح صنعتی و فرآیند طرح بیولوژیک ساخته می‌شود. کارایی کلی هر طرح به وسیله ترکیب کارایی این دو فرایند اندازه‌گیری می‌شود. کارایی فرایند طرح صنعتی بر حسب معیارهای صنعتی و ویژگی‌های تولید ارزیابی می‌شود و آن عبارت است از نسبت مجموع وزنی، ویژگی‌های تولید به مجموع وزنی، معیارهای صنعتی. فرایند طرح بیولوژیک به صورت نسبت مجموع وزنی فاکتورهای محیطی به مجموع ویژگی‌های وزنی تولید ارزیابی می‌شود. ویژگی‌های تولید در فرایند طرح صنعتی در صورت کسر قرار گرفته و در فرآیند طرح بیولوژیک در مخرج کسر قرار دارد. معیارهای مهندسی در نظر گرفته شده در ارزیابی فرآیند طرح صنعتی عبارتند از: جابجایی اینچ مکعب (cid)، میزان اسب بخار (rhp)، نسبت فشار (cmp) و نسبت محور ($axle$). معادل تست وزن (etw) و اقتصاد سوخت (mpg) به‌عنوان ویژگی‌های تولید در نظر گرفته شده‌اند. در هر دو فرآیند طرح صنعتی و فرآیند طرح بیولوژیک حضور دارند، اما انتشار هیدرو کربن (hc)، مونواکسید کربن (Co)، دی اکسید کربن (Co_2) و اکسید نیتروژن (No_x)، فاکتورهای به کار برده شده در فرآیند طرح بیولوژیک هستند. مجموعه داده‌ها در جدول (۱) نشان داده شده است. با توجه به روش ارائه شده در بخش های قبل، برای بررسی کارایی

فرآیند این طرح از داده‌های جدول (۱) استفاده می‌کنیم. آغاز کار با بدست آوردن جواب‌های بهینه مسئله دوآل در دو تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) و امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) خواهد بود. قیمت‌های سایه خروجی‌های مطلوب به وسیله بردار π^v نمایش داده می‌شود. جدول (۲) آمار توصیفی، بهینه‌های π^v به دست آمده از مسئله‌های دوآل تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) و تکنولوژی امیر تیموری و همکاران (۲۰۱۷) برای دو خروجی مطلوب، معادل تست وزن (etw) و اقتصاد سوخ (mpg) را ارائه می‌کند. دو ستون اول، میانگین قسمت‌های سایه ۲۳ طرح گزارش شده است. ستون دوم تعداد طرح‌هایی که قیمت سایه آن‌ها ثابت می‌باشد را نشان می‌دهد. بقیه طرح‌ها قیمت سایه صفر دارند. نتایج جدول (۲) توضیح می‌دهد که قیمت‌های سایه مثبت برای خروجی‌های مطلوب، در هر دو مدل، هزینه اضافی به ازای مصرف بیشتر آنها به کارخانه تحمیل می‌کنند در حالی که قیمت‌های سایه صفر هیچ هزینه اضافی ندارند. با توجه به نتایج جدول (۲)، تعداد DMUها با قیمت سایه مثبت در هر دو خروجی مطلوب در تکنولوژی امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) کمتر از تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) است، همچنین میانگین دو خروجی مطلوب در تکنولوژی امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) نسبت به تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) بیشتر است.

به عبارت دیگر با توجه به تکنولوژی دسترسی پذیری امیرتیموری و همکاران، مصرف سوخت یا وزن بیشتر در طرح‌های ارائه شده برای تولید، هزینه کمتری را برای کارخانه در بر دارد و طرح‌های بیشتری مورد قبول واقع می‌شوند. در جدول (۳) اندازه کارایی دوآل تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) و تکنولوژی امیرتیموری و همکارن (۲۰۱۷) را گزارش داده و با هم مقایسه می‌کنیم. همچنین برای واحدهای ناکارا نقاط تصویر دو تکنولوژی را از فرمول‌های (۴) و (۹) محاسبه کرده و در جدول (۴) ارائه می‌کنیم. همان طور که در جدول (۳) مشاهده می‌شود واحد تحت ارزیابی اول در تکنولوژی کاسمانن ناکارا می‌باشد و واحدهای اول و هیجدهم در تکنولوژی امیرتیموری وهمکاران (۲۰۱۷) ناکارا هستند. مقدار کارایی در تکنولوژی امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) از تکنولوژی کاسمانن کمتر و تعداد واحدهای ناکارا بیشتر می‌باشد. از نتایج جدول (۳) مشخص می‌شود که از ۲۳ طرح ارائه شده برای تولید، طرح اول، طرح مناسبی نمی‌باشد.

جدول۱- مجموعه داده ها برای خط تولید

$Carline$ (DMU)	Cid (x_1)	rhp (x_2)	cmp (x_3)	$axle$ (x_4)	etw (v_1)	mpg (v_2)	Hc (w_1)	Co (w_2)	CO_2 (w_3)	NO_x (w_4)
۱	۲۶۸/۳۱	۲۴۷/۲۳	۹/۸۴	۳/۳۱	۳۹۲۳	۹/۳۲	۰/۰۲۱۶	۰/۴۱۰۸	۳۲۹/۷۷	۰/۰۰۵۴
۲	۱۴۰	۱۶۰	۹/۷	۴/۰۴	۳۵۸۳	۲۵/۸۳	۰/۰۰۶۷	۰/۱۶۶۷	۳۴۳/۶۷	۰/۰۰۳۳
۳	۱۸۲	۲۱۷	۱۰	۳/۴۶	۳۷۵۰	۲۲/۳	۰/۰۲۴	۰/۱۸	۳۹۷	۰/۰۱
۴	۱۸۲	۲۱۵/۵	۱۰	۳/۴۶	۳۹۳۸	۲۰/۸۵	۰/۰۰۷۵	۰/۰۴۲۵	۱۰۷/۵	۰/۰۰۵
۵	۲۸۱	۲۵۰	۹/۴	۳/۲۷	۴۵۰۰	۱۵/۵	۰/۰۴	۰/۵۷	۴۸۵/۵	۰/۰۰۵
۶	۱۶۱	۲۰۵/۵	۱۰	۳/۸۲	۳۶۸۸	۲۵/۵۵	۰/۰۰۵۵	۰/۱۴۵	۱۵۷	۰/۰۰۵
۷	۱۴۰	۱۵۵	۹/۷	۲	۴۲۵۰	۳۷/۴	۰/۰۰۸	۰/۲۳	۲۳۷	۰/۰۲
۸	۱۴۰	۱۵۵	۹/۷	۲	۴۰۰۰	۴۵/۲	۰/۰۰۷	۰/۱۹	۱۹۶	۰/۰۱
۹	۲۴۴	۲۱۰	۹/۷	۳/۶۴	۵۲۵۰	۱۶/۱	۰/۰۲۸	۰/۵۳	۲۸۳	۰/۰۰۵

۱۰	۲۸۰	۲۹۲	۹/۸	۳/۵۵	۵۲۵۰	۱۶/۷۵	۰/۰۲۶	۰/۳۶	۵۳۱/۵	۰/۰۱۵
۱۱	۳۳۰	۳۱۰	۹/۸	۳/۳۱	۶۰۰۰	۱۵/۲۷	۰/۰۴	۰/۷۴۶۷	۵۲۲/۳۳	۰/۰۱
۱۲	۲۸۰	۲۶۲/۶۷	۹/۴	۳/۶۹	۵۵۵۶	۱۶/۹	۰/۰۰۶۲	۰/۱۳۳۳	۱۱۷	۰/۰۰۱۱
۱۳	۲۸۰	۲۹۲	۹/۸	۳/۵۵	۵۰۰۰	۱۷/۹	۰/۰۲۶	۰/۲۱	۴۹۵	۰/۰۱
۱۴	۳۳۰	۳۱۰	۹/۸	۳/۳۱	۶۰۰۰	۱۷/۱	۰/۰۳۹	۰/۹۴۵	۵۱۷/۵	۰/۰۱
۱۵	۳۳۰	۳۱۰	۹/۸	۳/۱۵	۵۳۷۵	۱۷/۸۵	۰/۰۲۱۵	۰/۴۴۵	۲۵۰/۵	۰/۰۰۵
۱۶	۳۳۰	۳۱۰	۹/۸	۳/۵۳	۵۹۰۰	۱۶/۹۲	۰/۰۱۳۲	۰/۲۲۸	۱۰۵	۰/۰۰۲
۱۷	۳۳۰	۳۱۰	۹/۸	۳/۳۱	۶۰۰۰	۱۱/۶	۰/۰۴۲	۰/۳۵	۵۳۲	۰/۰۱
۱۸	۳۳۰	۳۱۰	۹/۸	۳/۱۵	۵۳۷۵	۱۲/۹	۰/۰۱۴۵	۰/۲۳۵	۲۴۴/۵	۰/۰۰۵
۱۹	۳۳۰	۳۱۰	۹/۸	۳/۵۳	۵۹۰۰	۱۲/۲۲	۰/۰۰۷	۰/۰۸۴	۱۰۲/۸	۰/۰۰۴
۲۰	۱۴۰	۱۷۱	۹/۷	۴/۱۳	۳۶۲۵	۲۸/۳	۰/۰۱۱	۰/۲۹	۱۱۴	۰/۰۱
۲۱	۱۴۰	۱۷۱	۹/۷	۴/۰۹	۳۸۷۵	۲۳/۷۵	۰/۰۲۳۵	۰/۳۳۵	۳۷۴	۰/۰۱
۲۲	۱۴۰	۱۴۳	۹/۷	۴/۰۱	۳۵۹۴	۲۴/۲۸	۰/۰۲۲۵	۰/۲۳۲۵	۱۶۶/۷۵	۰/۰۱
۲۳	۲۴۴	۲۰۷	۹/۷	۳/۸۵	۴۲۵۰	۱۷/۶	۰/۰۳۲	۰/۵۷۶۷	۳۳۴	۰/۰۰۳۳

جدول ۲- قیمت‌های سایه دو خروجی مطلوب

	تکنولوژی کاسمانن		تکنولوژی امیرتیموری	
	میانگین	تعداد DMUها با $\pi^{v} > 0$	میانگین	تعداد DMUها با $\pi^{v} > 0$
معادل تست وزن (etw)	۰/۰۰۰۰۱۳	۱۵	۰/۰۰۰۲۹۵	۹
اقتصاد سوخت (mpg)	۰/۰۱۰۲۶۱	۱۲	۰/۰۱۴۸۲۶	۳

با توجه به نتایج جدول (۳) واحدهای کارا را با روش کارایی متقاطع رتبه‌بندی می‌کنیم. در این روش ابتدا وزن‌های واحدها را از فرم مضربی دو تکنولوژی که توسط فرمول‌های (۵) و (۱۰) داده شده است محاسبه کرده، سپس اندازه کارایی متقاطع واحد k ام را با وزن‌های واحد p ام با کمک فرمول زیر به دست می‌آوریم:

$$ce_k^{(p)} = \frac{\sum_{m=1}^{M} \pi_m^{(p)} v_{mk} + u_o}{\sum_{n=1}^{N} \pi_n^{(p)} x_{nk} - \sum_{j=1}^{J} \pi_j^{(p)} w_{jk}} \qquad (۱۱)$$

در واقع روش کارایی متقاطع یک روش دوفازی است که فاز اول آن به دست آوردن کارایی واحد تحت ارزیابی توسط مدل می‌باشد و فاز دوم آن به کار بردن مدل (۱۱) است. اگر این تکنیک برای تمام واحدها اعم از کارا و ناکارا انجام شود ممکن است میانگین یک واحد ناکارا بالاتر از میانگین واحد کارا شود و رتبه بندی نادرست می‌شود لذا این کار را فقط برای واحدهای کارا انجام می‌دهیم. محاسبه کارایی متقاطع واحدها از فرمول (۱۱) منجر به تشکیل جدول‌های (۵) و (۶) که در آن ماتریس کارایی متقاطع دو تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) و امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) قرار دارد می شود، میانگین کارایی هر واحد محاسبه شده و با توجه به میانگین، رتبه هر واحد در سطر آخر جدول‌ها گزارش شده است. با توجه به جدول‌های (۵) و (۶)، واحد۱۲ در تکنولوژی‌های کاسمانن (۲۰۰۵) و امیر تیموری و همکاران(۲۰۱۷) رتبه اول را دارد، قیمت سایه برای دو خروجی مطلوب در این واحد صفر می‌باشد و بدین معنی است که هزینه اضافی را به

کارخانه تحمیل نمی‌کند و به این ترتیب بهترین طرح می‌باشد. طبق جدول (۵) طرح ۱۰ ضعیف‌ترین طرح در تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) می‌باشد که بیشترین قیمت سایه برای دو خروجی مطلوب در این واحد می‌باشد و طبق جدول (۶) طرح ۵ ضعیف‌ترین طرح در تکنولوژی امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) می‌باشد قیمت سایه دو خروجی مطلوب در این واحد نیز بیشترین مقدار مثبت را دارد که هزینه اضافی را به کارخانه تحمیل می‌کند و چون هر دوی این واحدها آخرین رتبه را در جدول رتبه‌بندی واحدهای کارا دارند، خود دلیلی بر تایید روش رتبه‌بندی کارایی متقاطع می‌باشد.

جدول ۳- کارایی دوآل تکنولوژی‌های کاسمانن (۲۰۰۵) و امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷)

خط تولید	دوآل تکنولوژی کاسمانن	دوآل تکنولوژی امیرتیموری
۱	۰/۹۷۲۰	۰/۹۶۵۸
۲	۱	۱
۳	۱	۱
۴	۱	۱
۵	۱	۱
۶	۱	۱
۷	۱	۱
۸	۱	۱
۹	۱	۱
۱۰	۱	۱
۱۱	۱	۱
۱۲	۱	۱
۱۳	۱	۱
۱۴	۱	۱
۱۵	۱	۱
۱۶	۱	۱
۱۷	۱	۱
۱۸	۱	۰/۹۸۷۲
۱۹	۱	۱
۲۰	۱	۱
۲۱	۱	۱
۲۲	۱	۱
۲۳	۱	۱

جدول ۴- نقاط تصویر واحدهای ناکارای دو تکنولوژی کاسمانن و امیرتیموری

کاسمانن	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	w_1	w_2	w_3	w_4
DMU_1	۲۴۴/۳۶	۲۳۳/۷۳	۹/۵۶	۳/۲۲	۴۴۹۵/۲۳	۲۰/۵۰	۰/۰۲۱۰	۰/۳۹۹۳	۳۲۰/۵۵	۰/۰۰۵۲
امیرتیموری										
DMU_1	۲۵۵/۷۵	۲۳۸/۷۷	۹/۵۰	۳/۱۷	۴۷۹۴/۴۷	۱۹/۷۱	۰/۰۲۰۹	۰/۳۹۶۷	۳۱۸/۴۸	۰/۰۰۵۲
DMU_{18}	۲۶۷/۰۷	۲۵۷/۰۴	۹/۶۷	۳/۱۱	۵۳۰۶/۱۳	۲۱/۷۳	۰/۰۱۴۳	۰/۲۳۲۰	۲۴۱/۳۷	۰/۰۰۴۹

جدول ۵- ماتریس کارایی متقاطع کاسمانن

P \ K	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۲	۱	۰/۴۰۴۹	۱	۰/۱۸۹۰	۰/۹۲۳۶	۰/۵۰۲۵	۱	۰/۲۲۷۰	۰/۲۰۵۰	۰/۱۴۳۰	۱
۳	۱	۱	۰/۸۳۹۹	۰/۰۹۱۹	۰/۳۰۲۷	۰/۲۳۷۳	۰/۲۷۲۸	۰/۰۸۱۲	۰/۲۱۳۳	۰/۰۶۳۶	۰/۲۵۴۴
۴	۰/۷۵۶۸	۰/۲۹۷۶	۱	۰/۱۴۵۷	۰/۹۰۵۲	۰/۷۸۰۱	۱	۰/۲۱۱۲	۰/۲۵۷۶	۰/۱۶۱۰	۰/۹۵۵۴
۵	۱	۰/۸۱۹۰	۰/۹۰۱۵	۱	۰/۷۹۷۴	۰/۴۵۶۰	۰/۷۰۳۳	۱	۰/۵۸۰۹	۰/۷۳۱۹	۱
۶	۰/۵۶۹۰	۰/۰۸۹۶	۰/۲۸۵۲	۰/۰۸۷۰	۱	۱	۰/۹۲۴۶	۰/۱۹۰۰	۰/۱۴۶۱	۰/۱۴۶۲	۱
۷	۰/۲۷۱۸	۰/۲۳۹۱	۱	۰/۱۶۲۴	۰/۷۰۱۷	۱	۱	۰/۳۳۲۵	۰/۱۸۳۰	۰/۱۸۷۶	۰/۷۷۸۷
۸	۰/۶۳۵۱	۰/۳۰۰۳	۱	۰/۰۹۱۲	۰/۷۳۴۶	۰/۶۹۴۴	۱	۰/۱۱۳۸	۰/۱۵۴۱	۰/۰۷۶۳	۰/۴۹۶۴
۹	۱	۰/۶۷۳۰	۰/۷۰۱۸	۰/۷۸۴۴	۰/۷۵۱۵	۰/۸۱۱۵	۰/۹۳۸۵	۱	۰/۵۷۳۲	۰/۶۸۳۰	۰/۷۱۶۷
۱۰	۱	۰/۸۶۶۵	۰/۸۴۶۲	۰/۷۵۲۶	۰/۸۲۵۸	۱	۰/۹۵۱۱	۰/۸۶۴۰	۱	۰/۸۷۱۰	۱
۱۱	۱	۰/۸۴۲۹	۰/۷۸۵۰	۰/۸۸۸۶	۰/۸۰۶۲	۰/۸۸۳۷	۰/۹۲۱۳	۱	۰/۹۳۶۵	۱	۰/۹۳۷۵
۱۲	۰/۵۷۳۳	۰/۳۵۸۴	۱	۰/۱۹۳۴	۰/۵۶۵۱	۰/۲۹۲۶	۰/۴۸۹۰	۰/۲۳۴۱	۰/۲۳۸۵	۰/۱۷۳۱	۱
۱۳	۰/۲۹۵۰	۰/۸۵۰۴	۱/۰۰۰۰	۰/۲۷۱۲	۰/۳۶۲۷	۱	۰/۵۶۵۶	۰/۳۹۲۳	۰/۶۹۳۶	۰/۳۸۷۰	۰/۷۵۸۵
۱۴	۰/۸۸۸۰	۰/۵۸۹۲	۰/۵۹۹۷	۰/۷۲۴۳	۰/۷۱۶۵	۰/۶۹۴۶	۰/۸۱۸۸	۱	۰/۵۷۳۵	۰/۸۱۲۸	۰/۶۴۳۶
۱۵	۰/۳۹۷۸	۰/۶۳۶۰	۰/۷۰۶۷	۱	۰/۵۵۳۴	۱	۱	۱	۰/۵۴۲۶	۰/۹۸۴۸	۰/۶۳۸۷
۱۶	۰/۲۳۴۷	۰/۱۸۷۷	۰/۶۲۸۱	۰/۱۹۳۱	۰/۴۲۵۸	۰/۲۳۶۶	۰/۳۲۴۸	۰/۳۴۲۱	۰/۱۸۷۹	۰/۲۱۸۱	۱
۱۷	۰/۹۱۳۵	۰/۷۹۶۴	۰/۸۵۴۲	۰/۸۴۵۴	۰/۷۳۰۴	۰/۶۷۶۹	۰/۸۳۰۷	۱	۰/۶۹۲۲	۰/۷۴۶۶	۱
۱۸	۰/۹۵۷۰	۰/۷۰۷۶	۰/۶۲۳۷	۱	۰/۶۱۸۱	۰/۶۸۸۴	۱	۰/۷۴۰۹	۰/۸۸۰۰	۰/۹۹۹۹	۰/۸۷۵۸
۱۹	۰/۳۰۷۵	۰/۴۵۱۷	۱	۰/۳۶۸۴	۰/۳۴۰۷	۰/۱۴۵۸	۰/۲۵۵۸	۰/۳۰۹۰	۰/۲۰۰۰	۰/۱۹۹۸	۱
۲۰	۱	۰/۶۳۵۳	۰/۷۰۴۱	۰/۶۵۶۸	۰/۸۴۲۵	۰/۹۲۰۷	۱	۰/۹۴۵۷	۰/۶۴۱۷	۰/۷۸۰۴	۰/۷۳۹۵
۲۱	۱	۰/۸۲۰۵	۰/۸۸۲۹	۰/۸۰۱۲	۰/۹۳۳۴	۰/۶۳۷۱	۱	۰/۸۴۲۲	۰/۴۴۴۵	۰/۵۲۶۳	۰/۶۴۲۸
۲۲	۱	۱	۰/۹۷۶۵	۰/۶۶۱۰	۰/۷۶۳۲	۰/۵۰۳۵	۱	۰/۴۵۴۶	۰/۳۰۳۸	۰/۲۶۳	۰/۶۷۷۷
۲۳	۰/۲۷۳۷	۰/۰۶۴۳	۰/۱۱۴۴	۰/۱۸۵۵	۰/۱۵۶۶	۰/۰۵۲۱	۰/۱۳۱۰	۰/۱۷۶۹	۰/۰۳۳۳	۰/۰۶۳۴	۱
میانگین	۰/۷۳۰۶	۰/۵۷۴۱	۰/۷۹۳۱	۰/۵۰۴۲	۰/۶۷۰۷	۰/۶۴۶۱	۰/۷۷۸۵	۰/۵۶۶۳	۰/۴۴۰۰	۰/۴۶۴۵	۰/۸۲۳۴
رتبه	۴	۱۰	۲	۱۸	۷	۸	۳	۱۱	۲۲	۲۱	۱

ادامه جدول ۵

P \ K	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
۲	۰/۳۰۸۹	۰/۱۴۰۴	۰/۲۹۵۴	۰/۵۴۹۵	۰/۱۵۰۹	۰/۳۲۸۲	۰/۵۹۶۰	۰/۵۱۰۵	۰/۳۵۵۲	۰/۴۱۶۳	۰/۲۳۹۳
۳	۱	۰/۰۴۶۸	۰/۰۹۰۱	۰/۱۴۵۶	۰/۲۲۲۲	۰/۱۸۷۹	۰/۳۲۴۹	۰/۲۰۲۹	۰/۱۸۷۵	۰/۴۲۱۴	۰/۰۷۷۶
۴	۰/۲۹۴۵	۰/۱۵۲۶	۰/۲۷۸۴	۰/۵۱۱۱	۰/۱۸۳۳	۰/۴۱۳۳	۱	۰/۴۷۳۰	۰/۲۶۸۷	۰/۳۰۰۰	۰/۱۶۸۸
۵	۰/۷۷۴۷	۰/۶۴۸۰	۰/۷۳۲۲	۰/۹۲۷۳	۰/۹۹۲۰	۰/۷۲۹۶	۰/۸۰۵۹	۰/۶۱۶۹	۰/۸۴۶۰	۰/۸۵۵۲	۱
۶	۰/۱۱۱۳	۰/۲۲۵۱	۰/۲۸۱۱	۰/۴۱۶۷	۰/۰۸۵۹	۰/۳۰۶۸	۰/۵۸۰۷	۰/۴۹۱۵	۰/۱۲۴۸	۰/۱۰۱۹	۰/۱۲۷۰
۷	۰/۱۸۵۷	۰/۲۰۲۸	۰/۴۰۳۷	۱	۰/۱۵۹۷	۰/۳۴۶۰	۰/۹۶۲۰	۰/۳۷۳۸	۰/۲۷۵۷	۰/۲۷۵۲	۰/۲۵۰۵
۸	۰/۲۱۵۶	۰/۰۷۳۶	۰/۱۵۵۱	۰/۲۶۸۹	۰/۰۸۵۳	۰/۱۹۴۰	۰/۴۵۱۷	۰/۴۰۶۸	۰/۲۳۷۸	۰/۳۰۱۵	۰/۱۱۲۳
۹	۰/۵۶۸۸	۰/۷۳۲۱	۰/۶۲۸۴	۰/۶۳۱۲	۰/۶۰۲۲	۰/۵۸۸۲	۰/۵۹۰۵	۰/۸۷۵۶	۰/۹۱۵۶	۱	۱
۱۰	۱	۰/۸۱۸۳	۰/۷۹۷۲	۰/۸۹۸۲	۱	۰/۸۷۴۱	۰/۹۶۰۶	۰/۸۸۳۸	۰/۹۱۲۷	۰/۸۹۴۲	۰/۷۰۰۰
۱۱	۰/۹۲۰۸	۱	۰/۸۲۵۸	۰/۸۷۰۴	۱	۰/۸۲۰۵	۰/۸۵۲۷	۰/۸۹۸۶	۱	۰/۹۲۲۷	۰/۸۵۱۷
۱۲	۰/۳۷۸۱	۰/۱۴۵۴	۰/۲۸۳۳	۰/۶۰۸۶	۰/۲۹۲۹	۰/۴۴۰۷	۱	۰/۲۹۱۴	۰/۲۵۸۱	۰/۳۱۲۳	۰/۱۹۷۹

۰/۲۱۲۲	۰/۵۱۷۰	۰/۳۹۱۰	۰/۲۵۹۷	۱	۰/۵۹۳۸	۱	۰/۶۶۷۳	۰/۳۹۹۹	۰/۲۹۶۳	۱	۱۳
۰/۹۱۰۵	۰/۷۸۳۲	۱	۰/۸۶۵۵	۰/۵۳۱۹	۰/۵۲۷۴	۰/۵۹۱۴	۰/۶۰۳۰	۰/۱۵۸۶	۱	۰/۵۲۹۵	۱۴
۰/۹۰۱۶	۰/۵۶۹	۰/۵۷۶۴	۰/۴۶۸۰	۰/۷۱۴۴	۰/۷۳۵۶	۰/۹۵۵۳	۰/۹۰۸۲	۱	۱	۰/۵۵۳۸	۱۵
۰/۲۵۲۰	۰/۱۸۸۵	۰/۱۹۵۳	۰/۲۰۹۳	۱	۰/۴۳۱۷	۰/۲۳۱۰	۱	۰/۳۹۲۶	۰/۲۱۲۲	۰/۲۰۹۳	۱۶
۰/۸۷۱۵	۱	۰/۸۴۹۱	۰/۶۸۳۴	۰/۸۹۴۲	۰/۷۸۱۵	۱	۰/۹۰۲۳	۰/۷۳۲۲	۰/۶۶۲۷	۰/۸۰۶۹	۱۷
۰/۶۸۸۰	۰/۵۶۸۹	۰/۵۸۰۱	۰/۵۸۴۷	۰/۸۱۲۲	۱	۱	۰/۸۰۵۴	۰/۸۹۳۱	۱	۱	۱۸
۰/۲۹۹۲	۰/۳۱۸۸	۰/۲۴۲۸	۰/۱۷۲۷	۱	۰/۴۵۹۶	۱	۱	۰/۳۱۵۱	۰/۱۴۴۳	۰/۴۶۸۶	۱۹
۰/۷۹۸۱	۰/۸۲۰۴	۱	۱	۰/۶۲۴۷	۰/۵۹۶۲	۰/۶۰۷۶	۰/۶۷۳۲	۰/۶۵۷۷	۰/۹۰۹۸	۰/۵۸۲۵	۲۰
۱	۱	۱	۰/۸۲۸۸	۰/۴۷۷۰	۰/۴۸۲۳	۰/۵۳۰۱	۰/۵۹۳۷	۰/۵۶۴۸	۰/۵۲۴۵	۰/۵۳۷۶	۲۱
۰/۶۰۹۹	۱	۰/۶۸۸۷	۰/۵۷۰۱	۰/۴۰۴۵	۰/۳۶۲۵	۰/۶۷۴۹	۰/۵۸۵۷	۰/۳۹۹۸	۰/۲۱۸۱	۰/۶۵۲۰	۲۲
۱	۰/۰۷۲۱	۰/۰۷۴۷	۰/۰۸۶۸	۰/۰۸۹۵	۰/۰۸۸۲	۰/۰۳۶۸	۰/۵۰۶۳	۰/۱۶۷۰	۰/۰۸۴۰	۰/۰۵۲۵	۲۳
۰/۵۵۷۶	۰/۵۷۴۵	۰/۵۴۴۶	۰/۵۳۴۲	۰/۷۱۲۴	۰/۵۱۳۱	۰/۵۶۳۸	۰/۶۸۴۹	/۴۹۵۸	۰/۴۶۵۴	۰/۵۵۲۳	میانگین
۱۳	۹	۱۵	۱۶	۵	۱۷	۱۲	۶	۱۹	۲۰	۱۴	رتبه

جدول ۶ - ماتریس کارایی متقاطع امیرتیموری

k / P	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۲	۱	۰/۹۶۳۲	۰/۹۴۳۹	۱	۰/۹۴۹۵	۱/۰۰۳۳	۰/۹۸۷۵	۰/۹۵۸۳	۱	۰/۹۶۴۶	۱
۳	۱	۱	۱	۰/۹۰۸۱	۰/۹۵۵۴	۰/۹۳۹۷	۱	۰/۸۵۵۵	۰/۹۰۸۱	۰/۷۹۳۷	۰/۹۹۸۱
۴	۱	۰/۹۶۷۰	۱	۰/۹۳۱۸	۰/۹۸۱۱	۰/۹۷۷۴	۱	۰/۹۲۷۴	۰/۹۰۴۱	۰/۸۵۱۷	۱
۵	۱	۰/۹۶۲۵	۰/۹۶۲۳	۱	۰/۹۶۶۶	۱	۰/۹۹۹۹	۰/۹۷۸۲	۰/۹۶۱۸	۰/۹۵۲۰	۱
۶	۰/۹۱۴۹	۰/۸۶۳۹	۱	۰/۸۶۱۶	۱	۰/۸۹۷۴	۱	۰/۹۹۰۰	۰/۶۷۳۹	۰/۷۴۹۸	۰/۸۷۱۰
۷	۰/۹۸۳۲	۰/۹۳۸۸	۰/۹۵۱۰	۱	۰/۹۶۴۰	۱	۱	۰/۹۹۸۳	۰/۹۳۵۵	۰/۹۶۳۵	۰/۹۸۷۰
۸	۰/۹۸۳۰	۰/۹۳۸۶	۰/۹۵۰۹	۱	۰/۹۶۴۱	۰/۹۹۸۸	۱	۰/۹۹۹۱	۰/۹۳۲۴	۰/۹۶۲۲	۰/۹۸۴۶
۹	۰/۹۱۰۸	۰/۸۹۸۵	۰/۹۴۱۰	۱	۰/۹۳۱۰	۰/۹۸۵۱	۱	۱	۰/۸۹۹۷	۰/۹۷۲۰	۱
۱۰	۰/۹۸۲۳	۰/۹۳۹۳	۰/۹۰۹۳	۱	۰/۹۲۶۴	۱	۰/۹۷۲۰	۰/۹۵۶۳	۱	۰/۹۸۵۰	۰/۹۷۰۸
۱۱	۵/۳۰۸۸	۷/۶۷۰۷	۱۸/۹۱۳۹	-۶/۷۷۷۶	۱۲/۷۶۴۶	۱	۱	-۲/۰۷۴۴	۱/۴۴۰۷	۱	۳۲/۹۲۸۸
۱۲	۰/۸۸۹۲	۰/۷۵۲۴	۰/۸۲۷۴	۰/۷۳۷۵	۰/۷۳۷۰	۱	۱	۱	۰/۷۸۴۴	۰/۷۹۵۰	۱
۱۳	۱	۰/۸۳۵۹	۰/۸۴۹۷	۰/۵۴۸۳	۰/۶۶۶۱	۱	۰/۹۲۹۴	۰/۶۹۶۰	۰/۸۵۹۲	۰/۶۱۹۹	۰/۹۹۸۴
۱۴	۰/۹۸۵۳	۰/۹۴۹۶	۰/۹۲۷۵	۱	۰/۹۳۲۳	۱	۰/۹۸۵۳	۰/۹۹۴۳	۰/۹۹۵۷	۰/۹۹۹۹	۱
۱۵	۰/۴۲۲۳	۰/۴۰۴۶	۰/۶۸۹۳	۰/۵۳۶۰	۰/۶۶۶۷	۰/۹۴۳۷	۱	۰/۹۰۷۴	۰/۳۸۰۸	۰/۶۴۱۵	۰/۷۵۵۷
۱۶	۰/۴۶۲۴	۰/۳۹۶۵	۰/۹۵۲۲	۰/۳۴۸۱	۰/۸۳۷۱	۱	۱	۰/۵۶۵۷	۰/۳۴۰۱	۰/۳۶۰۳	۰/۹۳۱۰
۱۷	۰/۹۲۸۰	۰/۹۴۴۰	۰/۹۴۵۴	۰/۹۰۶۳	۰/۸۹۵۸	۱	۱	۰/۸۷۲۲	۰/۹۵۸۷	۰/۸۶۹۶	۱
۱۸	۰/۸۵۳۴	۰/۸۷۴۸	۰/۸۹۵۴	۰/۹۷۳۸	۰/۸۶۰۶	۱	۱	۰/۹۶۷۹	۰/۹۳۶۱	۱	۱
۱۹	۰/۹۴۵۹	۰/۸۹۵۳	۰/۸۹۵۷	۰/۸۱۸۱	۰/۸۷۶۱	۱	۰/۹۳۶۹	۰/۸۲۵۵	۱	۰/۸۴۱۰	۱
۲۰	۰/۹۸۲۵	۰/۹۳۷۹	۰/۹۴۱۰	۱	۰/۹۶۳۴	۰/۹۹۹۴	۱	۱	۰/۹۳۳۳	۰/۹۶۴۰	۰/۹۸۴۸
۲۱	۰/۹۸۳۰	۰/۹۳۸۶	۰/۹۵۰۹	۱	۰/۹۶۴۱	۰/۹۹۸۷	۱	۰/۹۹۹۱	۰/۹۳۲۴	۰/۹۶۲۲	۰/۹۸۴۶
۲۲	۰/۹۸۹۱	۰/۹۳۷۲	۰/۹۳۹۶	۱	۰/۹۵۱۷	۱	۱	۰/۹۹۶۷	۰/۹۲۷۳	۰/۹۵۰۶	۰/۹۷۲۶
۲۳	۰/۸۸۵۶	۰/۹۴۲۳	۱	۱	۰/۹۰۴۱	۰/۸۰۱۵	۱	۰/۹۷۵۱	۰/۷۲۱۸	۰/۷۸۱۲	۱
میانگین	۱/۱۲۱۷	۱/۱۹۴۱	۱/۷۸۵۸	۰/۵۱۵۲	۱/۴۶۶۵	۰/۹۷۸۳	۰/۹۹۱۰	۰/۷۸۲۰	۰/۸۸۰۵	۰/۸۵۶۲	۲/۴۹۳۷
رتبه	۸	۶	۲	۲۱	۴	۱۱	۱۰	۱۸	۱۵	۱۷	۱

ادامه جدول ۶

P \ K	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
۲	۰/۹۹۳۲	۰/۹۵۹۷	۰/۹۵۴۲	۰/۹۴۸۰	۰/۹۷۴۷	۰/۹۶۱۰	۰/۹۹۵۵	۰/۹۸۶۹	۰/۹۹۰۱	۰/۹۵۶۸
۳	۱	۰/۷۲۹۴	۰/۸۶۱۰	۰/۹۲۸۷	۰/۹۶۶۶	۰/۹۶۳۴	۰/۹۳۴۴	۰/۹۴۸۷	۱	۰/۸۵۸۳
۴	۰/۹۳۷۵	۰/۸۲۳۴	۰/۸۹۹۳	۰/۹۳۹۱	۰/۹۱۴۵	۰/۹۵۴۱	۰/۹۷۶۵	۰/۹۸۱۰	۱	۰/۹۲۲۷
۵	۰/۹۶۱۸	۰/۹۵۲۱	۰/۹۵۱۹	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۲۰	۰/۹۵۱۸	۱	۱	۰/۹۹۹۹	۰/۹۷۸۳
۶	۰/۶۹۷۷	۰/۷۷۱۲	۰/۸۰۳۰	۰/۸۳۸۷	۰/۷۱۰۵	۰/۷۷۳۳	۰/۹۴۲۷	۱	۰/۹۷۷۶	۱
۷	۰/۹۲۳۴	۰/۹۸۶۷	۰/۹۵۶۴	۰/۹۴۶۵	۰/۹۲۰۳	۰/۹۳۱۶	۱	۰/۹۹۸۷	۰/۹۸۷۳	۰/۹۹۸۷
۸	۰/۹۲۰۷	۰/۹۸۵۷	۰/۹۵۴۴	۰/۹۴۴۳	۰/۹۱۸۳	۰/۹۲۸۳	۱	۱	۰/۹۸۸۲	۱
۹	۰/۸۹۴۷	۱	۰/۹۹۶۲	۰/۹۸۹۶	۰/۹۲۰۵	۰/۹۶۳۲	۰/۹۲۷۷	۰/۹۲۹۷	۰/۹۲۰۲	۰/۹۹۱۸
۱۰	۰/۹۷۳۳	۱	۰/۹۴۸۴	۰/۹۲۳۰	۰/۹۵۶۲	۰/۹۲۹۱	۰/۹۹۰۳	۰/۹۷۷۳	۰/۹۷۱۳	۰/۹۵۶۳
۱۱	۲/۲۶۵۵	۰/۹۹۹۱	-۲/۰۲۰۵	۱	۰/۹۹۹۹	۲/۱۴۸۲	۶/۰۳۴۳	۱۳/۱۳۲۴	۹/۹۶۱۴	-۴/۷۷۳۲
۱۲	۰/۸۰۴۰	۰/۷۳۸۴	۰/۷۵۰۲	۰/۸۹۹۰	۰/۹۳۹۰	۰/۹۳۰۲	۰/۷۷۲۹	۰/۸۷۷۱	۱	۰/۷۸۰۰
۱۳	۱	۰/۵۲۰۹	۰/۶۱۴۲	۰/۸۱۸۷	۱	۱	۰/۶۶۷۴	۰/۷۳۸۱	۰/۹۷۴۲	۰/۴۹۵۷
۱۴	۰/۹۸۲۰	۱	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۴۰	۱	۰/۹۵۳۹	۰/۹۸۴۰	۱	۰/۹۸۸۰	۰/۹۲۹۶
۱۵	۰/۳۴۷۹	۱	۱	۱	۰/۳۷۳۵	۰/۷۴۶۷	۰/۵۱۶۷	۰/۴۶۷۳	۰/۴۲۵۱	۰/۷۷۰۸
۱۶	۰/۳۳۱۶	۰/۳۹۷۹	۰/۶۶۲۲	۱	۰/۳۰۳۱	۱	۰/۵۳۸۱	۰/۴۳۰۲	۰/۴۲۱۵	۰/۴۷۶۵
۱۷	۱	۰/۸۱۶۴	۰/۹۰۶۱	۰/۹۵۱۳	۱	۱	۰/۸۸۲۲	۰/۸۸۸۸	۰/۹۱۶۰	۰/۸۳۳۷
۱۸	۰/۹۳۱۷	۱	۰/۹۹۳۱	۱	۱	۰/۹۹۲۹	۰/۸۵۱۲	۰/۸۶۸۴	۰/۸۶۰۲	۰/۹۱۲۲
۱۹	۱	۰/۷۹۶۸	۰/۸۵۸۷	۰/۹۱۸۶	۰/۹۴۶۱	۱	۰/۹۰۸۴	۰/۸۷۵۵	۰/۸۹۴	۰/۷۶۴۸
۲۰	۰/۹۲۰۸	۰/۹۸۸۲	۰/۹۵۴۹	۰/۹۴۴۷	۰/۹۱۸۹	۰/۹۲۸۵	۱	۱	۰/۹۸۷۷	۱
۲۱	۰/۹۲۰۷	۰/۹۸۵۷	۰/۹۵۴۴	۰/۹۴۴۳	۰/۹۱۸۳	۰/۹۲۸۳	۱	۱	۰/۹۸۸۲	۱
۲۲	۰/۹۱۷۳	۰/۹۶۸۶	۰/۹۳۷۴	۰/۹۲۶۰	۰/۹۱۶۷	۰/۹۱۳۵	۰/۹۹۸۰	۱	۱	۱
۲۳	۰/۸۶۳۰	۰/۷۰۷۰	۰/۸۶۶۸	۱	۱	۰/۹۱۳۰	۰/۸۱۸۲	۰/۹۲۳۷	۰/۹۹۵۳	۱
میانگین	۰/۹۳۶۰	۰/۸۶۳۲	۰/۷۵۰۵	۰/۹۴۱۲	۰/۸۸۳۳	۰/۹۹۱۳	۱/۱۳۷۵	۱/۴۸۳۶	۱/۳۵۱۸	۰/۶۱۷۸
رتبه	۱۳	۱۶	۱۹	۱۲	۱۴	۹	۷	۳	۵	۲۰

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله دوآل تکنولوژی دسترسی‌پذیری ضعیف کاسمانن (۲۰۰۵) در جهت کاهش ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب مانند حالت شعاعی ورودی محور بیان شد. همچنین دوآل تکنولوژی دسترسی پذیری امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۷) را نیز محاسبه کرده و با توجه به این که هر دو تکنولوژی‌ها محدب بودند، قضیه اساسی دوآلیتی برنامه‌ریزی خطی برای آن‌ها به کار برده شد. چون هر دو تکنولوژی در اصول شمول مشاهدات، تحدب، دسترسی‌پذیری قوی برای ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و دسترسی پذیری ضعیف برای خروجی‌های مطلوب و نامطلوب و اصل کمینه برون یابی صدق می‌کردند و تنها تفاوت آن‌ها در تعریف اصل دسترسی‌پذیری ضعیف بود لذا تفسیر اقتصادی قیمت‌های سایه با توجه به تابع هدف دوآل در هر دو تکنولوژی به هم بسیار نزدیک بودند. تکنولوژی کاسمانن کوچکترین تکنولوژی است که در اصول فوق صدق می‌کند. در قسمت مثال کاربردی مقاله، داده‌های یک کارخانه آمریکایی برای خط تولید را بررسی کردیم و با توجه به تعداد قیمت‌های سایه مثبت برای خروجی مطلوب تعبیر اقتصادی برای دو

تکنولوژی به صورت حالت مقایسه‌ای ارائه دادیم. تکنولوژی امیرتیموری و همکاران تقریب خوبی نسبت به تکنولوژی کاسمانن در این داده‌های کاربردی به دست می‌دهند که ممکن است نتایج در داده‌های دیگر متفاوت باشد. به‌عنوان پیشنهاد، می‌توان به تعبیرهای اقتصادی دوال در تکنولوژی‌هایی با دسترسی‌پذیری مدیریتی اشاره نمود. همچنین، تعبیر اقتصادی دوال در فضای عدم قطعیت (داده‌های فازی، نادقیق و بازه‌ای) می‌تواند موضوع جالبی برای بررسی باشد.

فهرست منابع

[1] A. Amirteimoori, S. Kordrostami, M. Fooladvand, Efficiency measurement using nonparametric production analysis in the presence of undesirable outputs: An application to power plants, Operations Research and Decisions, 3 (2017) 5-20.

[2] A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research 2 (1978) 429-444.

[3] A. Hailu, T.S. Veeman, Non-parametric productivity Analysis with Undesirable Outputs: An Application to the Canadian Pulp and Paper Industry, American Journal of Agricultural Economies 83 (2001) 605616.

[4] C. Chen, J. Zhu, J.Y. Yu, H. Noori, A new methodology for evaluating sustainable product design performance with two-stage network data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 221 (2) (2012) 384-359.

[5] F. Shirazi, E. Mohammadi, Evaluating efficiency of airlines: A new robust DEA approach with undesirable output, Research in Transportaion Business & Management, 33 (11) (2019).

[6] G. Halkos, K. N. Petrou, Treating undesirable outputs in DEA: A critical review, Economic Analysis and Policy 62 (5) (2019) 97-104.

[7] G. Zhang, J. C. Cui, Ageneral inverse DEA model for non- radial DEA, Computers & Industrial Engineering 142 (4) (2020)

[8] L. Chen, Y.M. Ming, F. Lai, Semi-disposability of undesirable outputs in data envelopment analysis for environmental assessments, European Journal of Operational Research, (2017) 1-10.

[9] M.Toloo, J. Hanclova, Multi-valued measures in DEA in the presence of undesirable outputs, Omega, 94 (6) (2020) 102041.

[10] M. Mehdiloozad, V.V. Poninovski, Nonparametric production technologies with weakly disposable inputs, European Journal of Operational Research, 266 (1) (2018) 246-258.

[11] R.D. Banker, A. Maindiratta, Piecewise loglinear estimation of efficient production surfaces, Management Science, 32 (1) (1986) 126–135.

[12] R. Fare, S. Grosskopf, Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: Comment, American Journal of Agricultural Economics, 85 (2003) 1070-1074.

[13] R. Fare, S. Grosskopf, A comment on weak disposability in nonparametric production analysis, American Journal of Agricultural Economic, 91 (2) (2009) 539-545.

[14] M. Jahani Sayyad Noveiri, S. Kordrostami, J. Wu, A. Amirteimoori, Supply chains performance with undesirable factors and reverse flows: A DEA-based approach, Journal of the Operational Research Society 70(1) (2019) 125-135.

[15] T. Kuosmanen, Weak Disposability in Nonparametric Production Analysis with Undesirable Outputs, American Journal of Agricultural Economic, 87 (2005) 1077-1082.

[16] T. Kousmanen, R. Kazemi Matin, duality of weakly disposable tecgnology, Omega, 39 (5) (2011) 504-512.

[17] T. Kousmanen, V. V. Podinovski, Weak Disposability in Nonparametric Production Analysis; replay to Fare and Grosskopf, American Journal of Agricultural Economic, 91 (2) (2009) 539-545.

[18] R.W. Shephard, Theory of Cost and Production Functions. Princeton: Princeton University Press, (1970).

[19] V.V. Podinovski, T. Kousmanen, Modelling weak disposability in data envelopment analysis under relaxed convexity assumptions, Eropean Journal of Operational Research, 211 (3) (2011) 577-585.

[20] X. Hu, C. Liu, Managing undesirable outputs in the Australian construction industry using Data Envelopment Analysis models, Journal of Cleaner Production (2015).

[21] X.Chen, B.Lin, Energy and Co2 emission performance: A regional comparrsion of chinas non-ferrous metals industry, Journal of Cleaner Production 274 (10) (2020).

[22] Z. Zouh, G. Xu, C.Wang, J. Wu, Modeling undesirable output with a DEA approach based on an exponential transformation: An application to measure the energy efficiency of Chines industry, Journal of Cleaner Production 236 (10) (2019).