

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸۸

JNRM
JOURNAL OF
NUMERICAL
RATIONAL
METHODS

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

تعیین اندازه‌ی کارآیی فنی راسل با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر مبتنی بر متغیرهای کمکی

مجید صدیقی حسن‌کیاده^۱، صابر ساعتی^{۲*}، سهراب کرد رستمی^۱

(^۱) گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، لاهیجان

(^۲) گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، تهران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

در بسیاری از کاربردهای واقعی تحلیل پوششی داده‌ها، وضعیت بعضی از شاخص‌ها به عنوان ورودی یا خروجی کاملاً معلوم نیست. یعنی در برخی از موقعیت‌ها، یک شاخص می‌تواند برای برخی از واحدهای تصمیم‌گیری نقش ورودی و برای برخی دیگر نقش خروجی داشته باشد. این نوع شاخص‌ها را شاخص‌های انعطاف‌پذیر می‌نامند. برای توسعه مدل‌های تعیین نوع شاخص‌های انعطاف‌پذیر، در تحلیل پوششی داده‌ها، در این مقاله مدلی مطرح می‌شود که به طور هم‌زمان فاکتورهای انقباض ورودی‌ها کمینه و فاکتورهای انبساط خروجی‌ها در اندازه‌ی راسل با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر بیشینه شود. اندازه‌ی مطرح شده در تابع هدف پیشنهادی، خطی است. به عبارت دیگر، رابطه‌ی بین شاخص‌ها را به صورت یک تابع جمعی بیان می‌کند. در واقع این مدل، غیرخطی بودن تابع هدف اندازه‌ی راسل و اندازه‌ی بهبود یافته‌ی راسل را ندارد. در پایان، با ارائه مثال، مدل پیشنهادی با مدل‌های موجود مشابه مقایسه شده و مزایای آن به بحث گذاشته خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، شاخص‌های انعطاف‌پذیر، مساله برنامه‌ریزی صفر-یک، اندازه‌ی کارآیی مبتنی بر متغیرهای کمکی (SBM)، اندازه‌گیری راسل.

۱. مقدمه

نمی‌داند. آیا FRM [۸]، بهترین (یا دست کم مناسب‌ترین) اندازه کارایی را دارد؟ مدل‌های FRM [۸] نشان داد که کارایی FSBM کمتر از کارایی FRM است. به هر حال مدل پیشنهادی SFRM، نوع جدیدی از اندازه‌گیری کارایی را ارائه می‌دهد. همچنین در این مقاله نشان داده می‌شود که اندازه کارایی مدل پیشنهادی SFRM، ناکمتر از اندازه کارایی مدل FSBM است. در ادامه و در بخش ۲ به پیشینه پژوهش و در بخش ۳ به ساختار کلی فرآیند مدل پیشنهادی و ارائه آن پرداخته شده است. بخش ۴ اختصاص به مثال معروف عددی و توصیفی دارد که نتایج مدل پیشنهادی با دیگر مدل‌های اینچینی قابل مقایسه و نتیجه‌گیری باشد و در ادامه نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه شده است.

۲- پیشینه پژوهش

۲-۱- مروری بر اندازه‌ی راسل (RM)

اندازه‌ی راسل به طور همزمان ورودی‌ها را کاهش و خروجی‌ها را افزایش می‌دهد، بنابر این در RM تابع هدف به صورت ترکیب فاکتورهای انقباض ورودی، θ_r ، $(i = 1, \dots, m)$ و فاکتورهای انبساط خروجی، φ_r ، $(r = 1, \dots, s)$ ، در یک روش جمعی توسط Cooper و همکاران [۱۰]، به صورت زیر فرموله شده است:

$$\min \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\varphi_r} \right) \quad (1)$$

$$-\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \theta_i x_{io} \geq 0, \quad \forall i,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - \varphi_r y_{ro} \geq 0, \quad \forall r,$$

$$\theta_i \leq 1, \quad \forall i,$$

$$\varphi_r \geq 1, \quad \forall r,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j.$$

۲-۲- رویکرد اندازه‌ی گراف بهبود یافته‌ی

راسل (ERGM)

درمدل (۱)، علیرغم تمام محاسن موجود، غیر خطی بودن تابع هدف مشکلاتی را در حل آن به وجود می‌آورد که برای اصلاح آن، Pastor [۱]، به جای ترکیب شدن

انتخاب مدل برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری یکی از مسائل بسیار مهمی است که بایستی درست انتخاب گردد، که این موضوع دلیل بر انتخاب مدل‌های متفاوتی می‌شود. مدل‌ها با ماهیت ورودی یا خروجی، کدام انتخاب شوند؟ [۱]. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، می‌توانند به دو دسته‌ی مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی طبقه‌بندی شوند. اندازه‌ی کارایی حاصل از مدل‌های غیرشعاعی، اندازه‌گیری راسل (RM) نامیده می‌شود [۲]. RM یک مقیاس کارایی جمعی است بنابراین مستقل از آرایش ورودی و خروجی در چارچوب اندازه‌گیری (مقیاس) شعاعی است [۱]. تلاش‌های تحقیقاتی Pastor [۳] و Cooper و Pastor [۴]، گویای این مطلب بود که RM یک مشکل عمده در اندازه‌گیری کارایی دارد چرا که تابع هدف آن به صورت یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فرموله‌بندی شده است. و می‌تواند محبوبیت مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها را که با برنامه‌ریزی خطی فرموله شده باشند، را نداشته باشد چون فاقد عملی بودن محاسبات است، حتی اگر دارای خواص اقتصادی مطلوب باشد، مطالعات اخیر توسط Sekitani و Sueyoshi و [۵]، منجر به فرمول‌بندی دوباره‌ی RM با تبدیل به مدل برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم (SOCP) و الگوریتم درونی پرایمال-دوال شد [۵]. این یافته می‌تواند مطلب بیان شده‌ی Tone [۶]، را که عنوان کرده بود، RM برنامه‌ی دوال مشخصی ندارد و به این دلیل، رسیدن به یک تعبیر اقتصادی دشوار است [۵]، را اصلاح کند. یک مشکل عمده این است که مدل‌های متفاوت DEA کامل نیستند. از این رو، پیوسته در تلاش برای توسعه‌ی یک مدل جدید تحلیل پوششی داده‌ها هستیم [۷]. چنان که در جستجوی روی RM توانستیم، مدل‌های FRM [۸]، همچنین مدل پیشنهادی این پژوهش به نام اندازه‌ی کارایی تکنیکی راسل با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر مبتنی بر متغیرهای کمکی (SFRM) را بیابیم. هیچ کس بهترین ملاک برای مقایسه‌ی FRM [۸]، FSBM [۹]، ERGM [۵]، SOCP [۵] و مدل‌های پیشنهادی SFRM را

خروجی‌های هنرمندانه می‌توان نتایج قابل اطمینان بدست آورد. واقعیت آن است که در کاربردهای واقعی تحلیل پوششی داده‌ها، یک شاخص می‌تواند نقش ورودی را برای بعضی واحدهای تصمیم‌گیری و نقش خروجی را بقیه‌ی واحدهای تصمیم‌گیری بازی کند [۸]، مثلاً Cook و Zhu [۱۴]، این فرآیند را در مطالعه‌ی شعب بانکی که هدف اندازه‌گیری کارآیی شعب است بررسی می‌کنند، بدیهی است که شاخص‌های ورودی، منابعی مانند کارکنان و شاخص‌های خروجی، تراکنش‌های استاندارد باجه، مانند واریز و برداشت می‌باشند. اما فرض کنید که بخواهیم کارآیی هر شعبه برای جذب سرمایه‌گذاری ارزیابی شود. در این حالت، عاملی مانند تعداد مشتریان پرارزش می‌تواند یا به عنوان ورودی و یا به عنوان خروجی در نظر گرفته شود. از یک دیدگاه، چنین شاخصی ممکن است نقش پشتیبان را برای سرمایه‌گذاری آینده ایفا کند، لذا می‌توان آن را به‌طور معقول به عنوان خروجی محسوب کرد. از سوی دیگر، به‌طور مشروع می‌توان آنرا یک ورودی در نظر گرفت که به یک شعبه در تولید سبد سرمایه‌گذاری فعلی آن کمک می‌کند. همین بحث را در بانک‌ها در مورد شاخص‌هایی مانند سپرده‌ها نیز می‌توان مطرح کرد به‌طور معمول چنین شاخصی به‌عنوان خروجی است، زیرا منبعی برای درآمد آن شعبه است. در عین حال، وقت کارکنان که برای دریافت سپرده‌ی مشتریان و بازکردن حساب سپرده صرف می‌شود، یک شاخص ورودی است، چون این وقت (زمان)، کارکنان، می‌تواند برای فروش محصولات سودآورتر به گونه‌ی بهتری مورد استفاده گیرد [۸]. امیر تیموری و همکاران [۹]، شرایطی در مدل اندازه‌ی کارآیی مبتنی بر متغیرهای کمکی، که الحاق شاخص‌های انعطاف‌پذیر در SBM، [۱۰]، امکان‌پذیر شود، را فراهم نموده و آن را مدل FSBM نامیدند.

صدیقی و همکاران [۸]، در ارائه مدل‌های FRM، در مجموعه‌ای از مدل جمعی-غیرخطی، اندازه‌ی راسل (RM)، شاخص‌های انعطاف‌پذیر، با آن الحاق نموده و طی فرآیندی و با اضافه نمودن چندین محدودیت به آن، و همچنین با استفاده از متغیرهای کمکی با تغییرات عمده، مدل FRM به صورت زیر ارائه شد:

فاکتورهای انقباض ورودی و انبساط خروجی اندازه راسل در یک روش جمعی، مانند مدل (۱)، در اندازه‌ی جدید (ERGM) رابطه‌ی آن‌ها را به صورت کسری تعریف نمود که معادل مدل SBM است [۱]. یعنی ابتدا میانگین فاکتورهای انقباض ورودی‌ها و فاکتورهای انبساط خروجی‌ها را محاسبه کرده و سپس مولفه‌های این دو کارآیی در یک فرم کسری با هم ترکیب شدند. که به اندازه‌ی ERGM به عنوان اندازه‌ی کارآیی گراف بهبود یافته‌ی راسل نامیده می‌شوند. نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که ERGM با RM معادل نیست زیرا تابع هدف آنها متفاوت است. پس ERGM به درستی نمی‌تواند اندازه راسل (RM) را فراهم می‌کند. همچنین ذکر چند نکته ضروری است: (۱) کارآیی ERGM ناپیوسته از کارآیی RM است. (۲) یک واحد تصمیم‌گیری که توسط RM به عنوان کارآیی ارزیابی شود در ERGM نیز کارآست و برعکس است [۵].

۳-۲ شاخص‌های انعطاف‌پذیر — طبقه‌بندی

ورودی‌ها و خروجی‌ها

در کاربردهای استاندارد DEA، فرض می‌شود که وضعیت ورودی یا خروجی هر اندازه‌ی عملکرد مربوط به واحدهای تصمیم‌گیری معلوم است. اما در برخی از شرایط ممکن است نقش یک متغیر انعطاف‌پذیر باشد. مثلاً اندازه‌گیری کارآیی نیروگاه‌ها را که توسط Cook و همکاران [۱۲] و Green [۱۳]، بررسی شده است، در نظر بگیرید. یکی از خروجی‌ها، تابع چیزی است که «خاموشی» نامیده می‌شود. این اندازه به صورتی طراحی شده است که نشان دهنده‌ی درصدی از اوقات باشد که یک کارخانه برای عملیات آماده است، و لذا می‌توان آن را نوعی دستاورد (خروجی) از سوی مدیریت دانست. اما در عین حال، می‌توان این متغیر را یک ورودی محیطی دانست که تأثیر مستقیمی بر عملکرد نیروگاه دارد. آنچه مسلم است وقتی نگرش ارزیابی، عوض شود، آنگاه نوع ورودی و خروجی می‌تواند تغییر کند. مثلاً اگر در بانک، منظور بالا بردن میزان سود خالص باشد، یا این‌که منظور بالا بردن جمع سپرده‌ها، ورودی‌ها کلاً متفاوت هستند. با انتخاب ورودی و

انعطاف‌پذیر (FRM) و اندازه‌ی گراف بهبود یافته‌ی راسل با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر (FSBM) معرفی شدند. همانطوری‌که که دیدید در هر چهار اندازه‌ی مطرح شده در تابع هدف، رابطه‌ی بین شاخص‌ها، یا جمعی یا ضربی است. مدل پیشنهادی در این مقاله، بدین ترتیب است که به طور هم‌زمان فاکتورهای انقباض ورودی‌ها کمینه و فاکتورهای انبساط خروجی‌ها در اندازه‌ی راسل با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر (FRM)، تابع هدف مدل (۸) ارائه شده صدیقی و همکاران [۸]، بیشینه شود. پس دو تابع هدف زیر را می‌توانیم داشته باشیم:

$$\theta_{fo} = \min \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right), \quad (3)$$

$$\varphi_{fo} = \max \frac{1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right).$$

که این هدف دوگانه هم‌ارز با:

$$\min \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right) \right\}$$

است. که می‌توان به جای:

$$\max \frac{1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right)$$

از:

$$\min \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right)$$

$$\begin{aligned} \min Z_0 &= \frac{1}{m+s+K} \\ &\times \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko}}{z_{ko} + g_k^{(2)}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro}}{y_{ro} + q_r} \right) \\ \text{s.t. } x_{io} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i, \quad \forall i, \\ y_{ro} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - q_r, \quad \forall r, \\ z_{ko} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)}, \quad \forall k, \\ 0 \leq g_k^{(1)} &\leq M d_k^{(1)}, \quad \forall k, \\ 0 \leq g_k^{(2)} &\leq M d_k^{(2)}, \quad \forall k, \\ d_k^{(1)} + d_k^{(2)} &= 1, \quad \forall k, \\ d_k^{(1)}, d_k^{(2)} &\in \{0,1\}, \quad \forall k, \\ \lambda_j, g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, q_r, s_i &\geq 0, \quad \forall j, k, r, i. \end{aligned} \quad (2)$$

مدل پیشنهادی (۲)، اولین مدل جمعی و غیر شعاعی مساله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی است که تاکنون با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه شده است. مدلی که ضمن تشخیص وضعیت بهینه‌ی ورودی یا خروجی برای هر یک از این شاخص‌های انعطاف‌پذیر، امکان محاسبه حداکثر کارایی واحدهای تصمیم‌گیری دارای شاخص‌های انعطاف‌پذیر را داشته باشد [۸].

نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که FSBM با FRM معادل نیست زیرا تابع هدف آنها متفاوت است. پس FSBM به درستی نمی‌تواند اندازه راسل (FRM) را فراهم می‌کند. همچنین ذکر چند نکته ضروری است: (۱) کارایی FSBM نابیشتر از کارایی FRM است و (۲) یک واحد تصمیم‌گیری که توسط FRM به عنوان کاراً ارزیابی شود در FSBM نیز کاراست و برعکس است [۸].

۳- مدل پیشنهادی برای اندازه‌ی راسل با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر

اندازه‌ی راسل (RM) و اندازه‌ی گراف بهبود یافته‌ی راسل (ERGM) و اندازه‌ی راسل با حضور شاخص‌های

نیز استفاده نمود. با استفاده از روش متغیرهای انحرافی داریم:

$$\mu = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right), \\ \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right) \end{array} \right.$$

که در واقع این مدل، غیر خطی بودن هدف اندازه‌ی راسل و اندازه‌ی بهبود یافته‌ی راسل را ندارد. در این مدل رابطه بین شاخص‌ها به گونه‌ای است که روی میانگین عمل نموده و ابتدا بیشینه مقدار از بین میانگین کارآیی ورودی‌ها و میانگین کارآیی خروجی‌ها انتخاب می‌شود و مقدار این بیشینه را μ نامیده و سپس $\min \mu$ را به عنوان هدف بر می‌گزینیم. که اندازه‌ی راسل با حضور شاخص انعطاف‌پذیر (FRM) مبتنی بر متغیرهای کمکی است و آن را SFRM می‌نامیم.

بنابراین:

$$\begin{aligned} \mu &\geq \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right), \\ \mu &\geq \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right). \end{aligned}$$

در نتیجه‌ی این تغییرات، اندازه‌ی راسل با حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر مبتنی بر متغیرهای کمکی، به کمک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.t.} \quad & x_{io} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i, \quad \forall i, \\ & y_{ro} = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - q_r, \quad \forall r, \\ & z_{ko} = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{kj} + g_k^{(1)} - g_k^{(2)}, \quad \forall k, \\ & 0 \leq g_k^{(1)} \leq M d_k^{(1)}, \quad \forall k, \\ & 0 \leq g_k^{(2)} \leq M d_k^{(2)}, \quad \forall k, \\ & d_k^{(1)} + d_k^{(2)} = 1, \quad \forall k, \\ & d_k^{(1)}, d_k^{(2)} \in \{0, 1\}, \quad \forall k, \\ & \mu \geq \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right) \\ & \mu \geq \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right) \\ & \lambda_j, g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, q_r, s_i \geq 0, \quad \forall j, k, r, i. \end{aligned} \tag{۴}$$

تعریف ۱-۳: یک $DMU_o(x_o, y_o)$ ، کارای

SFRM است اگر و تنها اگر

$$s_i = 0, q_r = 0, g_k^{(1)} = g_k^{(2)} = 0$$

تعریف ۲-۳: اگر $g_k^{(1)} > 0$ ، مدل تشخیص می‌دهد

که شاخص انعطاف‌پذیر z_{ko} ورودی، و اگر $g_k^{(2)} > 0$ شود، شاخص انعطاف‌پذیر z_{ko} ، را خروجی نشان می‌دهد. اگر $g_k^{(1)} = g_k^{(2)} = 0$ آنگاه مدل، شاخص انعطاف‌پذیر z_{ko} را می‌تواند ورودی و یا خروجی در نظر بگیرد. توجه به فرآیند مدل پیشنهادی، امکان $g_k^{(1)} > 0$ و $g_k^{(2)} > 0$ با هم وجود ندارد.

همان‌طوری که اشاره شد نوع، K شاخص انعطاف‌پذیر z_{ko} توسط مدل می‌تواند ورودی و یا خروجی تعیین شود. در این صورت می‌توان نماد θ^* را برای $(m+K)$ شاخص ورودی و φ^* را برای $(s+K)$ شاخص خروجی در نظر گرفت.

قضیه ۱-۳: $DMU_o(x_o, y_o)$ در مدل پیشنهادی

(۴)، کارآ است اگر و تنها اگر در مدل FRM یا FSBM کارآ باشد.

برهان: در بخش ۲ گفته شد $DMU_o(x_o, y_o)$ که توسط FRM کارآ ارزیابی شود در FSBM کارآ است و بالعکس. پس کافی است در این جا مدل پیشنهادی به دلخواه با FRM یا FSBM مقایسه شود. فرض کنیم $DMU_o(x_o, y_o)$ در (۴) کارآ است نشان داده

$$\begin{aligned}
 (b) \mu &= \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right) \right\} \\
 &= \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^{m+K} \theta_i^* \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{r=1}^{s+K} \varphi_r^* \right) \right\} \\
 &= \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^{m+K} \theta_i^* \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{r \neq \hat{r}} \varphi_r^* + \varphi_{\hat{r}}^* \right) \right\} \\
 &= \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^{m+K} \theta_i^* \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{r \neq \hat{r}} \varphi_r^* + 1 \right) \right\} \leq 1
 \end{aligned}$$

در نتیجه از $(a) \& (b) \Rightarrow \mu < 1$. بنابر این جواب بهینه‌ی مدل پیشنهادی در هر دو حالت، کمتر از واحد است. عکس نقیض عبارت بالا ثابت می‌کند $DMU_0: (x_o, y_o)$ که توسط مدل پیشنهادی کاراً ارزیابی شود، در FSBM نیز کاراً است.

قضیه ۲-۳: مقدار کارایی FSBM نایبتر از کارایی مدل پیشنهادی مدل (۴) است.

برهان: کافی است نشان دهیم:

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{1}{m+k} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right) \\
 & 1 + \frac{1}{s+k} \left(\sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{q_r}{y_{ro}} \right) \\
 & \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

با فرض:

می‌شود که در FSBM نیز کاراً است. نشان می‌دهیم اگر $DMU_0: (x_o, y_o)$ در FSBM ناکاراً ارزیابی شود در مدل (۴) نیز ناکاراً است. ناکارایی توسط FSBM برای یک جواب بهینه‌ی داده شده‌ی $(\theta^*, \varphi^*, \lambda^*)$ نشان می‌دهد که:

$$\pi_o = \frac{1 - \frac{1}{m+k} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right)}{1 + \frac{1}{s+k} \left(\sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{q_r}{y_{ro}} \right)} < 1$$

چون $\theta_i^* \leq 1, \forall i$ و همچنین $\varphi_r^* \geq 1, \forall r$ حداقل یکی از حالت‌های زیر روی یک اندیس از ورودی‌ها یا خروجی‌ها رخ می‌دهد: (a) یک اندیس $\hat{i} \in \{1, 2, \dots, m\}$ وجود دارد به طوری که $\theta_{\hat{i}}^* \leq 1$ و (یا) (b) یک اندیس $\hat{r} \in \{1, 2, \dots, s\}$ وجود دارد به طوری که $\varphi_{\hat{r}}^* \geq 1$. چون جواب بهینه‌ی $(\theta^*, \varphi^*, \lambda^*)$ یک جواب شدنی در مدل پیشنهادی است، جواب بهینه‌ی با توجه به دو حالت بیان شده در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}
 (a) \mu &= \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \right) \right\} \\
 &= \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^{m+K} \theta_i^* \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{r=1}^{s+K} \varphi_r^* \right) \right\} \\
 &= \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i \neq \hat{i}} \theta_i^* + \theta_{\hat{i}}^* \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{r=1}^{s+K} \varphi_r^* \right) \right\} \\
 &< \max \left\{ \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i \neq \hat{i}} \theta_i^* + 1 \right), \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{r=1}^{s+K} \varphi_r^* \right) \right\} \leq 1
 \end{aligned}$$

۴- مثال توصیفی

مدل پیشنهادی SFRM را برای مجموعه داده‌های استفاده شده [۱۵]، در سنجش موسسات آموزش عالی انگلستان، به کار گرفته تا ضمن بررسی نتایج مدل پیشنهادی ارائه شده، نتایج آن با مدل‌های مشابه دیگر نیز مقایسه شود. دو شاخص ورودی: مخارج عمومی و مخارج تجهیزات و سه شاخص به عنوان خروجی: دانشجویان کارشناسی و پژوهش و آموزش و شاخص انعطاف‌پذیر در اینجا درآمد پژوهشی است.

این مجموعه داده‌ها در نمودار ستونی ۱، رسم شده است. مجموعه‌ی داده‌ها متشکل از ۵۰ دانشگاه است. نتایج مدل پیشنهادی SFRM در نمودار چندبر ۲، ارائه شده است. مدل پیشنهادی SFRM، ۷ دانشگاه از ۵۰ دانشگاه کاراً تشخیص داده شده و در نتایج اجرای این مدل، واحدهای تصمیم‌گیری ۱، ۷، ۱۹، ۳۳، ۳۵، ۴۱ و ۴۴ کاراً بوده که واحدهای تصمیم‌گیری، شاخص‌های انعطاف‌پذیر را به عنوان ورودی مشخص کرده‌اند تا حداکثر نمره‌ی کارایی ممکن را داشته باشند. در مدل پیشنهادی، ۴۲ دانشگاه از ۵۰ دانشگاه، درآمد پژوهشی (شاخص انعطاف‌پذیر)، را به عنوان یک شاخص ورودی و ۸ دانشگاه دیگر درآمد پژوهشی را به عنوان شاخص خروجی لحاظ کرده است. بنابراین مدل SFRM، درآمد پژوهشی را به عنوان ورودی لحاظ می‌کند. همچنین در ۷ تا از ۵۰ دانشگاه، $g_k^{(1)} = g_k^{(2)} = 0$ یعنی به‌طور شهودی در مدل SFRM می‌توان ۷ شاخص انعطاف‌پذیر، را به عنوان ورودی یا خروجی در نظر گرفت.

نتایج مدل ارائه شده در حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر توسط [۸، ۹، ۱۴، ۱۶، ۱۷] با مدل پیشنهادی SFRM در نمودار چند بر بالا، ارائه شده است. از بین این مدل‌های مرتبط با شاخص انعطاف‌پذیر، فقط مدل پیشنهادی و مدل‌های ارائه شده در [۸، ۹]، غیر شعاعی می‌باشند و نتایج نشان می‌دهد که ۴۳ واحد تصمیم‌گیری در دو مدل غیرشعاعی، FRM و FSBM، [۹، ۸] و ۳۸ واحد تصمیم‌گیری در مدل پیشنهادی SFRM و FRM [۸]، نوع شاخص‌های انعطاف‌پذیر را با حداکثر کارایی، یکسان لحاظ می‌کنند. از نتایج نمودار مقایسه‌ای (شکل ۲)، همانطور که در متن ثابت شد مدل‌های FRM و

$$\mu = \max \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} \right) \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}}, \\ & \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} + g_k^{(2)}}{z_{ko}} \right) \\ & + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro} + q_r}{y_{ro}} \end{aligned} \right\}$$

داریم:

$$\mu \geq \frac{1}{m+K} \left(\sum_{i=1}^{m+K} \theta_i^* \right)$$

$$, \mu \geq \frac{-1}{s+K} \left(\sum_{r=1}^{s+K} \phi_r^* \right)$$

در بخش ۲ گفته شد کارایی FSBM کمتر از یا مساوی کارایی FRM است. لذا ثابت می‌شود کارایی FSBM نیز کمتر از یا مساوی مدل پیشنهادی SFRM است چون:

$$\frac{1 - \frac{1}{m+k} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(1)}}{z_{ko}} \right)}{1 + \frac{1}{s+k} \left(\sum_{k=1}^K \frac{g_k^{(2)}}{z_{ko}} + \sum_{r=1}^s \frac{q_r}{y_{ro}} \right)} \leq \frac{1}{m+s+K} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - s_i}{x_{io}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko} - g_k^{(1)}}{z_{ko}} + \sum_{k=1}^K \frac{z_{ko}}{z_{ko} + g_k^{(2)}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro}}{y_{ro} + q_r} \right)$$

$$= \frac{1}{m+s+K} \left(\left(\sum_{i=1}^{m+K} \theta_i^* \right) + \left(\sum_{r=1}^{s+K} \frac{1}{\phi_r^*} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{m+s+K} \left(\left(\sum_{i=1}^{m+K} \theta_i^* \right) - \left(\sum_{r=1}^{s+K} \phi_r^* \right) \right)$$

$$\leq h = \begin{cases} \frac{1}{m+s+K} ((m+K)\mu + s\mu) \\ \frac{1}{m+s+K} (m\mu + (s+K)\mu) \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{(m+s+K)} (m+s+K)\mu = \mu$$

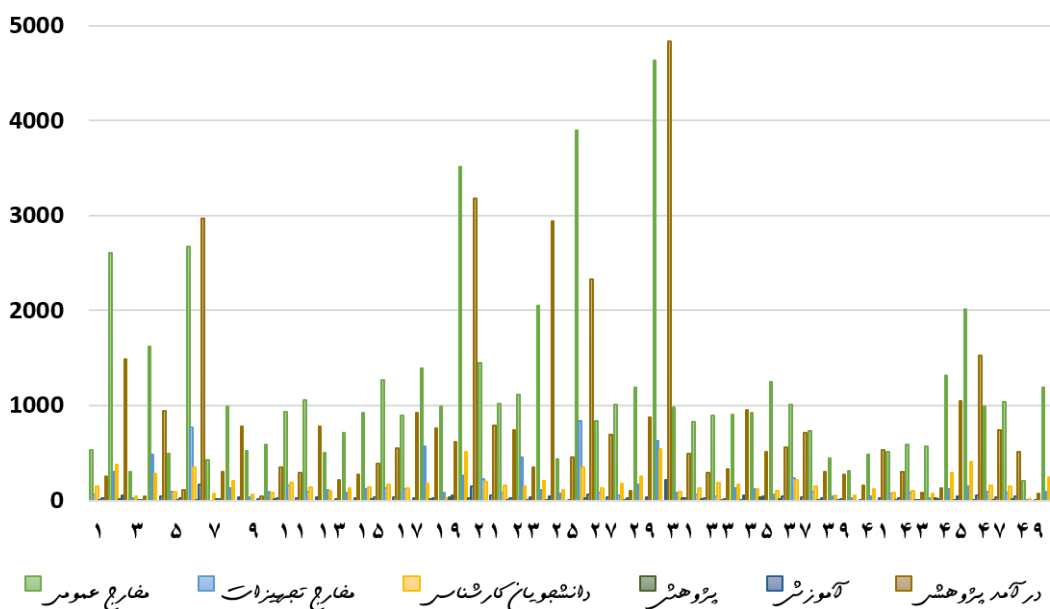
Score : SFRM ≤ Score : FRM

FSBM با مدل پیشنهادی SFRM نشان می‌دهد که

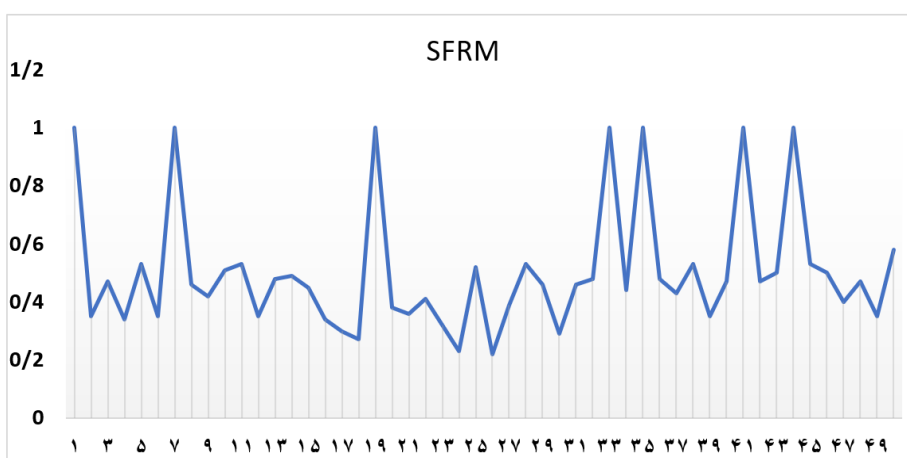
Score : FSBM ≤ Score : FRM

نمره کارآیی همه دانشگاه‌ها (۵۰ واحد تصمیم‌گیری)،

پیرو رابطه زیر است:



شکل ۱: نمودار ستونی، مجموعه داده‌های ۵۰ دانشگاه بریتانیا [۱۵]

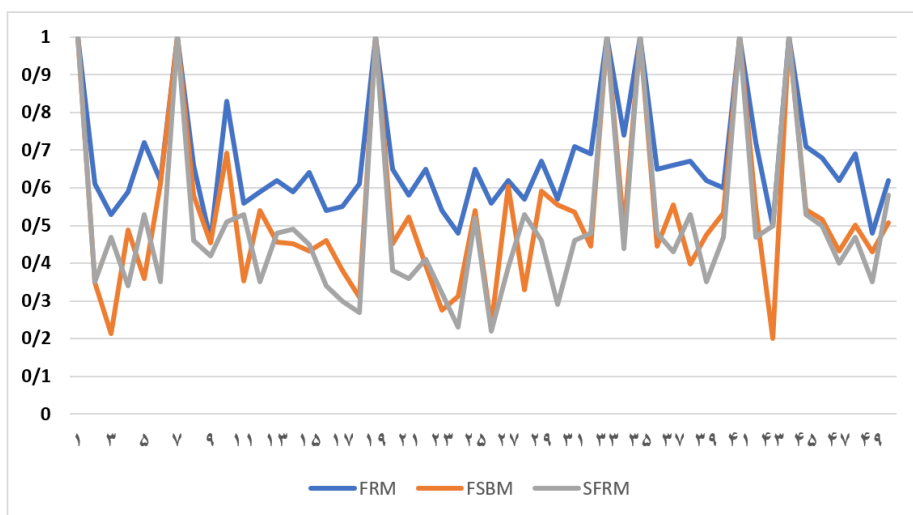


شکل ۲. نمودار نتایج مدل پیشنهادی SFRM.

نوع شاخص‌های انعطاف‌پذیر، با جزئیات بیشتری با توجه به ماهیت تصویر آن روی مرز، مورد ارزیابی دقیق‌تر قرارگیرد. این مدل مبتنی بر متغیرهای کمکی و وابسته به مجموعه‌ی گروه‌های مرجع، که کارایی و ناکارایی آن با مجموعه‌ی رفرنس خود تعیین و تمیز داده می‌شود، ارائه شده و مدل پیشنهادی، با استفاده از نرم افزار گمز (GAMS) حل شده است. همانطوری که انتظار می‌رفت نمره‌های کارایی مدل پیشنهادی ناکمتر از مدل FSBM می‌باشد. این مقاله می‌تواند با داده‌های عدم قطعیت در تحقیقات آینده، که اخیراً توسط صلاحی و همکاران [۲۶]، و [۲۷]، همچنین با داده‌های عدم قطعیت در حضور شاخص‌های انعطاف‌پذیر توسط طلوع و همکاران [۲۲]، و با مروری بر روش‌های رتبه‌بندی کارایی [۲۸ و ۲۹ و ۳۰]، و طبقه‌بندی ورودی‌ها و خروجی‌ها تحت عنوان اعداد صحیح با ارزش [۳۱]، قابل توسعه و گسترش است.

۷- نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادت

یکی از مهمترین موضوعات در تحلیل پوششی داده‌ها تعیین نوع عوامل موثر در کارایی واحدهای تصمیم‌گیری است. گاهی برای تعیین نوع برخی از شاخص‌های، ممکن است مشکل وجود داشته باشد چون واحدهای تصمیم‌گیری در مورد این نوع شاخص‌های انعطاف‌پذیر [۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۳۲]، دیدگاه‌های متفاوتی دارند. برای حل این مشکل روش‌ها و مدل‌هایی در تحلیل پوششی داده‌ها معرفی شده‌اند. در این مقاله نیز یک روش و مدل برای تعیین نوع شاخص‌های انعطاف‌پذیر، بر پایه و اساس اندازه‌گیری راسل RM و FRM ارائه شده است. اندازه‌ی مطرح شده در تابع هدف SFRM خطی است که در واقع رابطه‌ی بین شاخص‌ها، جمعی است. در مدل پیشنهادی این مقاله، به طور همزمان شاخص‌های انقباض ورودی‌ها، کمینه و شاخص‌های انبساط خروجی‌ها، بیشینه می‌شود. مدل پیشنهادی، مبتنی بر متغیرهای کمکی [۲۳ و ۲۴ و ۲۵ و ۳۲]، است تا برای تعیین



شکل ۳. نمودار مقایسه‌ای نتایج مدل‌های FRM و FSBM با مدل پیشنهادی SFRM

flexible measures in data envelopment analysis: A slack-based measure, *Measurement No* 46, 4100-4107.

[10] Cooper, W.W. Seiford, L.M. Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Springer USA.

[11] Charnes, A. Cooper, W.W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 67-88.

[12] Cook, W.D. Chai, D. Doyle, J. Green, R.H. (1998). Hierarchies and groups in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 10, 177-198.

[13] Cook, W.D. Green, R.H. (2005). Evaluating power plant efficiency: A hierarchical model. *Computers and Operations Research*, 32, 813-823.

[14] Cook, W.D. Zhu, J. (2006). Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 180(2), 692-699.

[15] Beasley, J. (1995). Determining teaching and research efficiencies. *Journal of the Operational Research Society*, 46, 441-452.

[16] Toloo, M. (2009). Classifying inputs and outputs in DEA, *European journal of operational research*, 198, 358-360

[17] Amirteimoori, A. Emrouznejad, A. (2011). Flexible measures in production process: A DEA-based approach. *RAIRO-Operations Research*, 45(1), 63-74.

[18] Khodakarami, M., Shabani, A. Farzipoor Saen, R., Azadi, M. (2015). Developing distinctive two-stage data envelopment analysis models: an

منابع و مأخذ

[۱] جهانشاهلو، غ، حسین‌زاده‌لطفی، ف، نیکومرام، ه. (۱۳۸۷). تحلیل پوششی داده‌ها و کاربردهای آن، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران.

[۷] کرد رستمی، س، امیرتیموری، ع، (۱۳۸۵). راهبرد محاسباتی اندازه‌ی کارآیی تکنیکی راسل، مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال سوم، شماره ۸.

[2] Charnes, A. Cooper, W.W. (1985). Preface to Topics in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research*, 2, 59-94.

[3] Pastor, J.T. Ruiz, J.L. Sirvent, I. (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European Journal of Operational Research*, 115, 596-607.

[4] Portela, M. Castro, P. E. Thanassoulis, E. (2003). Finding closest targets in non-oriented DEA models: The case of convex and non-convex technologies. *Journal of Productivity Analysis* 19,251-269.

[5] Sueyoshi, T. Sekitani, K. (2007). Computational Strategy for Russell Measure in DEA Second-Order Cone Programming. *European Journal of Operational search* 180, 441-452.

[6] Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 130,498-509.

[8] Sedighi, M.H.K. Saati, S. Kordrostami, S. (2019). Improvement of models for determination of flexible factor type in data envelopment analysis, *Measurement*, doi: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.01.042>

[9] Amirteimoori, A. Emrouznejad, A. Khoshandam, L. (2013). Classifying

- application to the banking sector. *OMEGA*, 60, 73–84.
- [26] Salahi, M. Toloo, M. Hesabirad, Z. (2018). Robust Russell and Enhanced Russell Measures in DEA, *Journal of the Operational Research Society*, <https://doi.org/10.1080/01605682.1489353>.
- [27] Wei, G., & Wang, J. (2017). A comparative study of robust efficiency analysis and Data Envelopment Analysis with imprecise data. *Expert Systems with Applications*, 81, 28–38.
- [28] Aldamak, A. Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. In *Measurement* 106: 161-172.
- [29] Hajiagha, S. H. S., Mahdiraji, H. A., Tavana, M., Hashemi, S. (2018). A novel common set of weights method for multi-period efficiency measurement using mean-variance criteria. In *Measurement* 129: 569-581.
- [30] Hajiagha, S. H. Mahdiraji, M. Tavana, (2019). A new bi-level data envelopment analysis model for efficiency measurement and target setting. In *Measurement* 147: 106877.
- [31] Kordrostami, S. Amirteimoori, A. Noveiri, M. (2019). Inputs and outputs classification in integervalued data envelopment analysis. In *Measurement* 139: 317-325.
- [32] Bod'a, M. (2019). Classifying flexible measures in data envelopment analysis: a slacks-based measure - a comment. In *Measurement* volume 150, January 2020, 107045.
- application in evaluating the sustainability of supply chain management. *Measurement*, 70, 62–74.
- [19] Azizi, H and R Farzipoor Saen (2015). A new approach for considering dual-role factor in supplier selection problem: DEA approach with efficient and inefficient frontiers. *Production and Operations Management (in persian)*, 6(2), 129–144.
- [20] Shabani, A and R Farzipoor Saen (2016). Developing imprecise dual-role hybrid measure of efficiency for international market selection using ternary variable. *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, 22(3), 305–331.
- [21] Toloo M. and Barat M. (2015). On considering dual-role factor in supplier selection problem, *Mathematical Methods of Operations Research* 82(1): 107-122.
- [22] Toloo, M. Keshavarz, E. Hatami, A. (2018). Dual-role factors for imprecise data envelopment analysis, *Omega* 77 15-31.
- [23] Bian, Y., Liang, N., Xu, H. (2015). Efficiency evaluation of Chinese regional industrial systems with undesirable factors using a two-stage slacks-based measure approach. *Journal of Cleaner Production*, 87, 348–356.
- [24] Mahdiloo, M, A Noorizadeh and R Farzipoor Saen. (2014). Benchmarking suppliers' performance when some factors play the role of both inputs and outputs: A new development to the slacks-based measure of efficiency. *Benchmarking: An International Journal*, 21(5), 792–813.
- [25] Lozano, S. (2016). Slacks-based inefficiency approach for general networks with bad outputs: An

