دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مطالعه‌ای بر g-قاب‌های کنترل شده و قاب‌های تلفیقی کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی

مهدی رشیدی کوچی *

باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد کهنوج، دانشگاه آزاد اسلامی، کهنوج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۱/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۱۱

چکیده

قاب‌های کنترل شده ارائه شدند تا حل عددی از الگوریتم‌های بازگشتی برای یافتن معکوس عملگر قاب روی فضای مجرد هیلبرت بهبود یابد. قاب‌های تلفیقی و g-قاب‌ها تعمیمی از مفهوم قاب‌ها می‌باشند. فضاهای C^*-مدول هیلبرتی دسته وسیعی ما بین فضاهای هیلبرت و فضاهای باناخ هستند. این فضاها تعمیمی از فضاهای هیلبرت می‌باشند با این تفاوت که ضرب داخلی در C^*-جبر قرار می‌گیرد نه لزوماً در مجموعه اعدا مختلط.

در این مقاله g-قاب‌های کنترل شده و قاب‌های تلفیقی کنترل شده در C^*-مدول هیلبرتی تعریف و مشخص گردیده‌اند. مشابه فضای هیلبرت نشان داده می‌شود که در فضای C^*-مدول هیلبرتی هر g-قاب کنترل شده‌ای یک g-قاب معمولی است و بلعکس. همچنین رابطه بین قاب‌های تلفیقی کنترل شده در فضای C^*-مدول هیلبرتی و قاب‌های تلفیقی مورد بررسی قرار گرفته شده است. در نهایت شرط کافی که بیان می‌دارد چگونه خانواده‌ای از زیر مدول‌های بسته قاب تلفیقی کنترل شده را تشکیل می‌دهند بیان گردیده است.

واژه‌های کلیدی: C^*-مدول هیلبرتی، قاب، g-قاب، قاب تلفیقی، قاب کنترل شده.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: m_rashidi@kahnoojiau.ac.ir

۱- مقدمه

قاب‌ها در فضای هیلبرت برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین و شیفر[۱] برای مطالعه سری‌های فوریه غیر هارمونیک معرفی گردیدند. دابوشی، گراسمان و میر در سال ۱۹۸۶ مجدداً آنها را معرفی و گسترش دادند[۲] و از آن به بعد مفهوم قاب‌ها مورد توجه ویژه قرار گرفت. می‌توان برای مشاهده نتایج اولیه در مورد قاب‌ها به [۳] مراجعه نمود.

فضاهای C^*-مدول هیلبرتی، فضاهایی ما بین فضای هیلبرت و باناخ می‌باشند. ساختار این فضاها اولین بار توسط کاپلانسکی در سال ۱۹۵۲ معرفی گردید[۴]. فضاهای C^*-مدول هیلبرتی به عنوان ابزاری در نظریه عملگرها و عملگرهای جبری مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین آنها به عنوان منبع مهمی از مثال‌ها در نظریه عملگرها کاربرد دارند.

مفهوم قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرتی توسط فرانک و لارسن در [۵] معرفی شدند. آنها قاب‌های کلاسیک در C^*-مدول‌های هیلبرتی را تعریف کردند و یک سری از نتایج برای این قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرتی متناهی یا شما را تولید شده روی C^*-جبرهای یکه بدست آوردند. تعمیم نتایج از فضای هیلبرت به C^*-مدول هیلبرتی کار ساده‌ای نیست چون تفاوت‌های اساسی و مهمی بین فضای هیلبرت و C^*-مدول هیلبرتی وجود دارد. به‌عنوان مثال، هر زیر فضای بسته‌ای در فضای هیلبرت دارای متمم متعامد است اما این موضوع در مورد C^*-مدول‌های هیلبرتی برقرار نیست. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد C^*-مدول‌های هیلبرتی می‌توان مراجع [۶] و [۷] را مطالعه نمود. همچنین برای مشاهده خواص قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرتی به منابع [۸-۱۰] مراجعه نمایید.

قاب‌های تلفیقی و g-قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرتی در [۱۱] معرفی گردیدند. اخیراً قاب‌های کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی [۱۲] معرفی شده‌اند.

در این مقاله g -قاب‌های کنترل شده و قاب‌های تلفیقی کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی تعریف و بعضی از ویژگی‌های آنها بررسی می‌گردد. در بخش ۲، تعریف‌ها و مفاهیم اولیه مورد نیاز قاب‌های تلفیقی، g-قاب‌ها و قاب‌های کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی یادآوری می‌گردد. سپس در بخش ۳، g-قاب‌های کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی معرفی و در بخش ۴، قاب‌های تلفیقی کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی تعریف می‌شوند.

۲- پیش نیازها و مفاهیم اولیه

در این بخش ابتدا برخی از خواص پایه و تعریف‌های لازم از C^*-مدول‌های هیلبرتی ارائه می‌گردد. فضاهای C^*-مدول هیلبرتی تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند با این تفاوت که ضرب داخلی در یک C^*-جبر قرار می‌گیرد نه لزوماً در مجموعه اعداد مختلط.

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک فضای C^*-جبر باشد. یک فضای پیش $\mathcal{A}$-مدول هیلبرتی عبارت است از $\mathcal{A}$-مدول چپ $\mathcal{H}$ با نگاشت ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle: \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathcal{A}$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $f,g,h \in \mathcal{H}$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$،
$\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$؛

۲) برای هر $f,g \in \mathcal{H}$ و $a \in \mathcal{A}$،
$\langle af, g\rangle = a\langle f, g\rangle$؛

۳) برای هر $f,g \in \mathcal{H}$، $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle^*$؛

۴) برای هر $f \in \mathcal{H}$، $\langle f, f\rangle \geq 0$.

برای هر $f \in \mathcal{H}$ نرم روی $\mathcal{H}$ به صورت $\|f\|_{\mathcal{H}} = \|\langle f, f\rangle\|_{\mathcal{H}}^{1/2}$ تعریف می‌گردد. اگر $\mathcal{H}$ با این نرم کامل باشد، آنگاه $\mathcal{H}$ را C^*-مدول هیلبرتی (چپ) روی $\mathcal{A}$ یا $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرتی (چپ) گویند.

فرض کنید * عملگر الحاقی روی C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشد یعنی برای هر $a,b \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

(۱) $(a^*)^* = a$،

(۲) $(a+b)^* = a^* + b^*$،

(۳) $(ab)^* = b^* a^*$

(۴) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$.

عضو a از C^*-جبر $\mathcal{A}$ را مثبت گویند هرگاه $a^* = a$

و طیف a زیر مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. در این حالت می‌نویسیم $a \geq 0$. که طیف a به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{معکوس پذیر نیست } \lambda 1 - a\right\}.$$

همچنین تعریف می‌کنیم $|f| = \langle f, f\rangle^{1/2}$. مرکز $\mathcal{A}$ عبارت است از $Z(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A}: \mathrm{ab} = \mathrm{ba}, \forall \mathrm{b} \in \mathcal{A}\}$. اگر $a \in Z(\mathcal{A})$، آنگاه $a^* \in Z(\mathcal{A})$ و اگر a عضو معکوس‌پذیری از $Z(\mathcal{A})$ باشد، آنگاه $a^{-1} \in Z(\mathcal{A})$، همچنین اگر a عضو مثبتی از $Z(\mathcal{A})$ باشد، آنگاه $a^{1/2} \in Z(\mathcal{A})$. نماد $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ نشان دهنده مجموعه تمام عملگرهای $\mathcal{A}$ –خطی از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ است.

در این مقاله J مجموعه اندیس گذار متناهی یا شمارا، $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ به ترتیب مجموعه اعداد مختلط و مجموعه اعداد طبیعی می باشند. مجموعه $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر یکه با عضو همانی $1_{\mathcal{A}}$ و $|a| = (aa^*)^{1/2}$ برای هر $a \in \mathcal{A}$، U, V و $\mathcal{H}$ فضاهای $\mathcal{A}$–مدول هیلبرتی متناهی یا شمارا تولید شده و $\{V_j: j \in J\}$ دنباله‌ای از زیر مدول‌های هیلبرتی بسته از V می‌باشند. برای هر $j \in J$، مجموعه $Hom_{\mathcal{A}}^*(U, V_j)$ خانواده نگاشت‌های A–خطی‌الحاق پذیر از U به V_j می‌باشند. همچنین $Hom_{\mathcal{A}}^*(U, U)$ با $Hom_{\mathcal{A}}^*(U)$ نمایش داده می‌شود. همچنین فرض کنید

$$\bigoplus_{j\in J} V_j = \left\{g = \{g_j\}_{j\in J}: g_j \in V_j, \sum_{j\in J}\langle g_j, g_j\rangle < \infty\right\}$$

برای هر $f = \{f_j\}_{j\in J}$ و $g = \{g_j\}_{j\in J}$ در $\bigoplus_{j\in J} V_j$، اگر حاصل ضرب داخلی به‌صورت $\langle f, g\rangle = \sum_{j\in J}\langle g_j, g_j\rangle$ تعریف شود، آنگاه $\bigoplus_{j\in J} V_j$ یک $\mathcal{A}$–مدول هیلبرتی است.

در ادامه g–قابها و قاب‌های تلفیقی در C^*–مدول‌های هیلبرتی یادآوری می‌گردد:

دنباله $\{\Lambda_j \in Hom_{\mathcal{A}}^*(U, V_j): j \in J\}$ را g–قاب در $\mathcal{A}$–مدول هیلبرتی U نسبت به V_j گویند هرگاه مقادیر ثابت $0 < C \leq D < \infty$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$C\langle f, f\rangle \leq \sum_{j\in J}\langle \Lambda_j \mathrm{f}, \Lambda_j \mathrm{f}\rangle \leq D\langle f, f\rangle$$

برای هر $f \in U$.

مقادیر C و D را به ترتیب کران پایین و بالای g–قاب گویند. اگر تنها نامساوی سمت راست برقرار باشد، آنگاه $\{\Lambda_j: j \in J\}$ را دنباله g–بسل با کران D گویند. اگر $C = D$، آنگاه $\{\Lambda_j: j \in J\}$ را g–قاب کیپ و اگر $C = D = 1$ آن را g–قاب پارسوال گویند.

مثال۲-۱: فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت $\mathcal{H}$ فضای $\mathbb{C}$–مدول هیلبرتی است. اگر $\{e_j: j \in J\}$ پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\{e_j: j \in J\}$ قاب پارسوال برای $\mathbb{C}$–مدول هیلبرتی $\mathcal{H}$ است.

زیر مدول بسته $\mathcal{M}$ از C^*–مدول هیلبرتی $\mathcal{H}$ دارای متمم توپولوژیکی است هرگاه زیر مدول بسته $\mathcal{N}$ از $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. زیر مدول بسته $\mathcal{M}$ از $\mathcal{H}$ دارای متمم متعامد است هرگاه $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ در این صورت $\Pi_{\mathcal{M}} \in Hom_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{H}, \mathcal{M})$ جایی که $\Pi_{\mathcal{M}}: \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ نگاشت تصویر از $\mathcal{H}$ به روی $\mathcal{M}$ است.

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر یکه، $\mathcal{H}$ فضای $\mathcal{A}$–مدول هیلبرتی و $\{w_j\}_{j\in J}$ خانواده ای از وزن‌ها در $\mathcal{A}$ باشد یعنی هر یک عضو معکوس پذیر مثبت در مرکز $\mathcal{A}$ باشد و $\{\mathcal{M}_j: j \in J\}$ خانواده‌ای از زیر مدول‌های $\mathcal{H}$ باشد که دارای متمم متعامد است. در این صورت $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ را قاب تلفیقی گویند، هرگاه مقادیر ثابت $0 < C \leq D < \infty$ وجود داشته باشند به طوری که

$$C\langle f, f\rangle \leq \sum_{j\in J} w_j^2 \langle \Pi_{\mathcal{M}_j}(\mathrm{f}), \Pi_{\mathcal{M}_j}(\mathrm{f})\rangle \leq D\langle f, f\rangle$$

برای هر $f \in U$.

به طور مشابه مقادیر C و D را به ترتیب کران پایین و بالای قاب تلفیقی گویند. اگر تنها نامساوی سمت راست برقرار باشد، آنگاه $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ را دنباله بسل

تلفیقی با کران D گویند. اگر $C = D$، آنگاه $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ را قاب تلفیقی کیپ و اگر $C = D = 1$ آن را قاب تلفیقی پارسوال گویند.
اگر $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ یک دنباله بسل تلفیقی باشد، آنگاه $\Pi_{\mathcal{M}_j}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}_j$ الحاق پذیر است.

۳- g-قاب‌های کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی

ابتدا به تعریف g-قاب‌های کنترل شده در C^*-مدولهای هیلبرتی می‌پردازیم.

تعریف۳-۱: فرض کنید U و $\{V_j: j \in J\}$ فضاهای C^*-مدول هیلبرتی و $T, T' \in GL^+(U)$. خانواده $\Lambda = \{\Lambda_j \in Hom_{\mathcal{A}}^*(U, V_j): j \in J\}$ را g-قاب (T, T')- کنترل شده برای U نسبت به V_j گویند، هرگاه Λ یک دنباله g-بسل بوده و مقادیر ثابت $0 < C \leq D < \infty$ موجود باشند به‌طوری که

$$C\langle f, f\rangle \leq \sum_{j\in J}\langle \Lambda_j \mathrm{T}\mathrm{f}, \Lambda_j \mathrm{T}'\mathrm{f}\rangle \leq D\langle f, f\rangle$$

برای هر $f \in U$.
مقادیر C و D را به ترتیب کران پایین و بالای g-قاب(T, T')- کنترل شده گویند. اگر تنها نامساوی سمت راست برقرار باشد، آنگاه $\{\Lambda_j: j \in J\}$ را دنباله g-بسل (T, T')- کنترل شده با کران D گویند. اگر $C = D$، آنگاه $\{\Lambda_j: j \in J\}$ را g-قاب (T, T')- کنترل شده کیپ و اگر $C = D = 1$ آن را g-قاب (T, T')- کنترل شده پارسوال گویند. اگر $T' = I$، آنگاه $\Lambda = \{\Lambda_j: j \in J\}$ را یک g-قاب T-کنترل شده گویند.
با توجه به تعریف به سادگی می‌توان گزاره زیر را مشاهده نمود.

گزاره ۳-۲: فرض کنید U و $\{V_j: j \in J\}$ فضاهای C^*-مدول هیلبرتی و $T \in GL^+(U)$. در این صورت دنباله $\Lambda = \{\Lambda_j \in Hom_{\mathcal{A}}^*(U, V_j): j \in J\}$ یک دنباله g- بسل (T, T)- کنترل شده (g-قاب (T, T)- کنترل شده) است اگر و تنها اگر مقدار ثابت $D < \infty$ (و $0 < C$) موجود باشد به طوری که

$$\sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{T}\mathrm{f}\right|^2 \leq D|f|^2$$

$$C|f|^2 \leq \sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{T}\mathrm{f}\right|^2 \leq D|f|^2$$

برای هر $f \in U$.
g-قاب (T, T)- کنترل شده را g-قاب T^2- کنترل شده گویند.

لم۳-۳: فرض کنید U و $\{V_j: j \in J\}$ فضاهای C^*-مدول هیلبرتی و $T, T' \in GL^+(U)$. دنباله $\Lambda = \{\Lambda_j \in Hom_{\mathcal{A}}^*(U, V_j): j \in J\}$ یک دنباله g-بسل (T, T')-کنترل شده در C^*-مدول هیلبرتی U نسبت به V_j است اگر و تنها اگر عملگر

$$S_{T,T'}f = \sum_{j\in J} T'^*\Lambda_j^*\Lambda_j Tf$$

عملگر خوش تعریفی از U به U باشد و مقدار ثابت $D < \infty$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\sum_{j\in J}\langle \Lambda_j \mathrm{T}\mathrm{f}, \Lambda_j \mathrm{T}'\mathrm{f}\rangle \leq D\langle f, f\rangle$$

برای هر $f \in U$.
با توجه به لم قبل تعریف زیر را داریم:

تعریف۳-۴: فرض کنید U و $\{V_j: j \in J\}$ فضاهای C^*-مدول هیلبرتی و $T, T' \in GL^+(U)$. همچنین فرض کنید

$$\Lambda = \{\Lambda_j \in Hom_{\mathcal{A}}^*(U, V_j): j \in J\}$$

یک دنباله g-بسل (T, T')-کنترل شده در U نسبت به V_j باشد. در این صورت عملگر $S_{\mathrm{T},\mathrm{T}'}: \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ را که به صورت

$$S_{T,T'}f = \sum_{j\in J} T'^*\Lambda_j^*\Lambda_j Tf$$

تعریف می‌گردد را عملگر g-قاب(T, T')- کنترل شده گویند.

گزاره ۳–۵: فرض کنید U و $\{V_j: j \in J\}$ فضاهای *C–مدول هیلبرتی و $T, T' \in GL^{+}(U)$. همچنین فرض کنید دنباله $\Lambda = \{\Lambda_j \in Hom^{*}_{\mathcal{A}}(U, V_j): j \in J\}$ یک دنباله g–بسل (T, T')–کنترل شده در *C–مدول هیلبرتی U نسبت به V_j با کران‌های C و D باشد. در این صورت عملگر g–قاب (T, T')–کنترل شده $S_{T,T'}$ الحاق‌پذیر، معکوس پذیر، مثبت و خود الحاق است.

برهان: فرض کنید $f, h \in U$. در این صورت

$$\langle S_{T,T'} f, h\rangle = \langle \sum_{j\in J} T'^{*}\Lambda_j^{*}\Lambda_j T f\, , h\rangle = \sum_{j\in J}\langle T'^{*}\Lambda_j^{*}\Lambda_j T f, h\rangle = \sum_{j\in J}\langle f, T^{*}\Lambda_j^{*}\Lambda_j T' h\rangle = \langle f, T^{*} S_{\Lambda} T' h\rangle$$

بنابراین عملگر g–قاب (T, T')–کنترل شده $S_{T,T'}$ الحاق پذیر است و $S^{*}_{\mathrm{T,T'}} = T^{*} S_{\Lambda} T'$.

از آنجا که

$$\langle S_{T,T'} f, f\rangle = \sum_{j\in J}\langle T'^{*}\Lambda_j^{*}\Lambda_j T f, f\rangle = \sum_{j\in J}\langle \Lambda_j \mathrm{T f}, \Lambda_j \mathrm{T' f}\rangle$$

داریم

$$C\langle f, f\rangle \le \langle S_{T,T'} f, f\rangle \le D\langle f, f\rangle$$

و

$$CId_U \le S_{T,T'} \le DId_U.$$

بنابراین عملگر $S_{T,T'}$ مثبت و معکوس پذیر است. از آنجا که هر عملگر مثبتی خود الحاق است، بنابراین عملگر g–قاب (T, T')–کنترل شده $S_{T,T'}$ خود الحاق است.

گزاره بعد نشان می‌دهد که در فضای *C–مدول هیلبرتی هر g–قابی یک g–قاب کنترل شده است و بلعکس.

گزاره۳–۶: فرض کنید U و $\{V_j: j \in J\}$ فضاهای *C–مدول هیلبرتی و $T \in GL^{+}(U)$. خانواده $\Lambda = \{\Lambda_j \in Hom^{*}_{\mathcal{A}}(U, V_j): j \in J\}$ یک g–قاب T^2–کنترل شده است اگر و تنها اگر Λ یک g–قاب باشد.

برهان: فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_j: j \in J\}$ یک g–قاب T^2–کنترل شده با کران‌های C و D باشد. در این صورت بنا به گزاره ۲–۳ برای هر $f \in U$ داریم:

$$C|f|^2 \le \sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{Tf}\right|^2 \le D|f|^2.$$

از آنجا که

$$C|f|^2 = C|TT^{-1}f|^2 \le C\|T\|^2|T^{-1}f|^2 \le \|T\|^2\sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{T}T^{-1}\mathrm{f}\right|^2 = \|T\|^2\sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{f}\right|^2.$$

بنابراین

$$C\|T\|^{-2}|f|^2 \le \sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{f}\right|^2.$$

از طرف دیگر

$$\sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{f}\right|^2 = \sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{T}T^{-1}\mathrm{f}\right|^2 \le D|T^{-1}f|^2 \le D\|T^{-1}\|^2|f|^2.$$

بنابراین Λ پیک g–قاب با کران‌های $C\|T\|^{-2}$ و $D\|T^{-1}\|^2$ می‌باشد.

حال بلعکس فرض کنید Λ یک g–قاب با کران‌های C' و D' باشد. در این صورت برای هر $f \in U$ داریم

$$C'|f|^2 \le \sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{f}\right|^2 \le D'|f|^2.$$

بنابراین

$$\sum_{j\in J}\left|\Lambda_j T\mathrm{f}\right|^2 \le D'|Tf|^2 \le D'\|T\|^2|f|^2.$$

حال برای کران پایین داریم

$$C'|f|^2 = C'|T^{-1}Tf|^2 \le C'\|T^{-1}\|^2|Tf|^2 \le \|T^{-1}\|^2\sum_{j\in J}\left|\Lambda_j \mathrm{Tf}\right|^2.$$

بنابراین Λ یک g–قاب T^2–کنترل شده با کران‌های $C'\|T^{-1}\|^{-2}$ و $D'\|T\|^2$ می‌باشد.

گزاره۳–۷: فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_j: j \in J\}$ یک g–قاب برای فضای *C–مدول هیلبرتی U نسبت به V_j باشد و $T, T' \in GL^{+}(U)$ با یکدیگر و با S_{Λ} جابه جا شود. در این صورت $\Lambda = \{\Lambda_j \in Hom^{*}_{\mathcal{A}}(U, V_j): j \in J\}$ یک g–قاب (T, T')– کنترل شده است.

برهان: فرض کنید Λ یک g–قاب با کران‌های C و D

باشد و $m, m' > 0$ و $M, M' < \infty$ موجود است به طوری که

$$m \le T \le M, \quad m' \le T' \le M'.$$

در این صورت با توجه به اینکه T با S_Λ جا به جا می‌شود

$$mC \le TS_\Lambda \le MD,$$

و چون T' با TS_Λ جابه جا می‌شود

$$mm'C \le S_{\mathrm{T,T'}} \le MM'D.$$

۴- قاب‌های تلفیقی کنترل شده در C^*-مدول هیلبرتی

در این بخش قاب‌های تلفیقی کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی معرفی شده است که تعمیمی از قاب‌های تلفیقی کنترل شده در فضای هیلبرت [۱۳] و قاب‌های کنترل شده در فضای C^*-مدول‌های هیلبرتی [۱۲] می‌باشد.

تعریف۴-۱: فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر یکه، $\mathcal{H}$ فضای $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرتی و $\{w_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از وزن‌ها در $\mathcal{A}$ باشد یعنی هر w_j عضو معکوس پذیر مثبتی در مرکز $\mathcal{A}$ است و $\{\mathcal{M}_j : j \in J\}$ خانواده ای از زیر مدول‌های $\mathcal{H}$ باشد که دارای متمم متعامد است و $T, T' \in GL^+(\mathcal{H})$. در این صورت $\mathcal{M} = \{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ را قاب تلفیقی کنترل شده با T و T' یا قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده گوییم هرگاه مقادیر ثابت $0 < C \le D < \infty$ موجود باشند به طوری که

$$C\langle f, f\rangle \le \sum_{j\in J} w_j^2 \langle \Pi_{\mathcal{M}_j}\mathrm{T}f, \Pi_{\mathcal{M}_j}\mathrm{T'}f\rangle \le D\langle f, f\rangle$$

برای هر $f \in \mathcal{H}$.

مجموعه $\mathcal{M}$ را w-یکنواخت گویند هرگاه برای هر $j \in J$ داشته باشیم $w = w_j$.

عملگر قاب تلفیقی (T,T') -کنترل شده $S_{T,T'}$ روی $\mathcal{H}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S_{T,T'}f = \sum_{j\in J} w_j^2 T'^* \Pi_{\mathcal{M}_j}\mathrm{T}f$$

برای هر $f \in \mathcal{H}$.

به راحتی می‌توان نشان داد که $S_{T,T'}$ خوش تعریف است و

$$CId_{\mathcal{H}} \le S_{T,T'} \le DId_{\mathcal{H}}$$

لذا $S_{T,T'}$ کراندار، معکوس‌پذیر، خود-الحاق و مثبت است. بنابراین $S_{T,T'} = S^*_{T,T'} = S_{T',T}$.

در حالت خاصی که $T' = Id_{\mathcal{H}}$ مجموعه $\mathcal{M}$ قاب تلفیقی T-کنترل شده برای $\mathcal{A}$-مدول هیلبرتی $\mathcal{H}$ است.

مثال ۴-۲: فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای C^*-مدول‌های هیلبرتی روی C^*-جبر یکه $\mathcal{A}$، $T \in GL(\mathcal{H})$ و $\{f_j\}_{j\in J}$ قاب T- کنترل شده برای $\mathcal{H}$ باشد. اگر $\mathcal{M}_j = \{\mathrm{a}f_j : \mathrm{a} \in \mathcal{A}\}$ برای هر $j \in J$ در این صورت

$$\Pi_{\mathcal{M}_j}(f) = \langle f, f_j\rangle f_j$$

برای هر $f \in \mathcal{H}$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $\{(\mathcal{M}_j, |f_j|): \mathrm{j} \in \mathrm{J}\}$ قاب تلفیقی $(\mathrm{T}, Id_{\mathcal{H}})$- کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است. زیرا مقادیر ثابت $0 < C \le D < \infty$ موجودند به‌طوری که

$$C\langle f, f\rangle \le \sum_{j\in J} \langle \mathrm{T}f, f_j\rangle\langle f_j, \mathrm{f}\rangle \le D\langle f, f\rangle$$

برای هر $f \in \mathcal{H}$. اما این معادل است با

$$C\langle f, f\rangle \le \sum_{j\in J} |f_j|^2 \langle \Pi_{\mathcal{M}_j}\mathrm{T}f, \Pi_{\mathcal{M}_j}\mathrm{f}\rangle \le D\langle f, f\rangle$$

لذا نتیجه برقرار است.

مشابه فضاهای هیلبرت می‌توان نشان داد که قاب‌های تلفیقی کنترل شده در C^*-مدول‌های هیلبرتی تعمیمی از قاب‌های تلفیقی می‌باشند.

قضیه۴-۳: الف) فرض کنید $T, T' \in GL^+(\mathcal{H})$ و $\mathcal{M} = \{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است. در این صورت $\mathcal{M}$ قاب تلفیقی برای $\mathcal{H}$ است. بعلاوه $T^*S_{\mathcal{M}}T = T'^*S_{\mathcal{M}}T$.

ب) فرض کنید $T \in GL^+(\mathcal{H})$. در این صورت $\mathcal{M} = \{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (دنباله بسل تلفیقی) است اگر وتنها اگر $\mathcal{M}$ قاب تلفیقی (T,T)-کنترل شده (دنباله بسل تلفیقی (T,T)-کنترل شده) باشد.

برهان: الف) فرض کنید f عضو دلخواهی از $\mathcal{H}$ باشد. از آنجا که $\mathcal{M}$ یک قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است عملگر $S_{T,T'}$ مثبت است و چون $(T^*)^{-1} \in GL(\mathcal{H})$، نگاشت $S: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ تعریف شده به صورت

$$S(f) = (T^*)^{-1} S_{T,T'} (T')^{-1}(f) = \sum_{j\in J} w_j^2\, \Pi_{\mathcal{M}_j} f$$

خوش تعریف است. به راحتی می‌توان دید که S عملگر خطی مثبت و کراندار روی $\mathcal{H}$ است و همچنین

$$\|S^{-1}\| = \left\|T' S_{T,T'}^{-1} T^*\right\| \le \|T'\| \left\|S_{T,T'}^{-1}\right\| \|T^*\| \le \frac{1}{C} \|T'\| \|T^*\|$$

بنابراین $S \in GL^+(\mathcal{H})$. در نتیجه $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی و $S = S_{\mathcal{M}}$ عملگر قاب تلفیقی است. بعلاوه

$$T^* S_{\mathcal{M}} T' = S_{T,T'} = S_{T,T'}^* = T'^* S_{\mathcal{M}} T$$

ب) از آنجا که $S_{T,T} = T^* S_{\mathcal{M}} T$، پس $C Id_{\mathcal{H}} \le S_{\mathcal{M}} \le D Id_{\mathcal{H}}$ معادل است با

$$C T^* T \le S_{T,T} \le D T^* T$$

بعلاوه

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|^2} Id_{\mathcal{H}} \le T^* T \le \|T\|^2 Id_{\mathcal{H}}$$

و نتیجه برقرار است.

نتیجه۴-۴: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک قاب تلفیقی برای $\mathcal{H}$ و $T, T' \in GL^+(U)$ خودالحاق باشند. همچنین $T, T', S_{\mathcal{M}}$ با یکدیگر جابه جا شوند و TT' مثبت باشد. در این صورت $\mathcal{M}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است.

برهان: از آنجا که $S_{T,T'} = T S_{\mathcal{M}} T' = T T' S_{\mathcal{M}}$، نتیجه برقرار است.

قضیه بعد شرط کافی برای اینکه خانواده‌ای از زیر مدولهای بسته تشکیل قاب تلفیقی کنترل شده دهند بیان می‌دارد.

قضیه۴-۵: فرض کنید $T, T' \in GL^+(\mathcal{H})$ و $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ با کران‌های C و D باشند. همچنین فرض کنید $\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از زیر مدول‌های بسته $\mathcal{H}$ است. اگر مقدار $0 < R < C$ موجود باشد به‌طوری که

$$0 \le \sum_{j\in J} w_j^2 \left\langle T^* \left(\pi_{\mathcal{N}_j} - \pi_{\mathcal{M}_j}\right) T' f, f \right\rangle \le R\|f\|^2$$

برای هر $f \in \mathcal{H}$، آنگاه $\{(\mathcal{N}_j, w_j): j \in J\}$ نیز یک قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است.

برهان: فرض کنید f عضو دلخواهی از $\mathcal{H}$ است. از آنجا که $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است داریم

$$C\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} w_j^2 \langle T^* \pi_{\mathcal{M}_j} T' f, f \rangle \le D\|f\|^2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in J} w_j^2 \langle T^* \pi_{\mathcal{N}_j} T' f, f \rangle \\ &= \sum_{j\in J} w_j^2 \left\langle T^* \left(\pi_{\mathcal{N}_j} - \pi_{\mathcal{M}_j}\right) T' f, f \right\rangle \\ &+ \sum_{j\in J} w_j^2 \langle T^* \pi_{\mathcal{M}_j} T' f, f \rangle \\ &\le R\|f\|^2 + D\|f\|^2 = (R+D)\|f\|^2 \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in J} w_j^2 \langle T^* \pi_{\mathcal{N}_j} T' f, f \rangle = \\ &\sum_{j\in J} w_j^2 \langle T^* \pi_{\mathcal{M}_j} T' f, f \rangle \\ &+ \sum_{j\in J} w_j^2 \left\langle T^* \left(\pi_{\mathcal{N}_j} - \pi_{\mathcal{M}_j}\right) T' f, f \right\rangle \\ &\ge \sum_{j\in J} w_j^2 \langle T^* \pi_{\mathcal{M}_j} T' f, f \rangle \\ &- \sum_{j\in J} w_j^2 \left\langle T^* \left(\pi_{\mathcal{N}_j} - \pi_{\mathcal{M}_j}\right) T' f, f \right\rangle \\ &\ge C\|f\|^2 - R\|f\|^2 = (C-R)\|f\|^2 \end{aligned}$$

لذا نتیجه حاصل می‌گردد.

قضیه ۴-۶: فرض کنید $T,T' \in GL^{+}(\mathcal{H})$ و $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ با کران‌های C و D باشند. همچنین فرض کنید $\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از زیر مدول‌های بسته $\mathcal{H}$ است. اگر

$\varphi: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ که به‌صورت

$$\varphi(f) = \sum_{j\in J} w_j^2 T\left(\pi_{\mathcal{N}_j} - \pi_{\mathcal{M}_j}\right) T' f.$$

برای هر $f \in \mathcal{H}$ تعریف می‌شود، مثبت و فشرده باشد، آنگاه $\{(\mathcal{N}_j, w_j): j \in J\}$ نیز یک قاب تلفیقی (T,T') -کنترل شده برای $\overline{span}\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ است.

برهان: فرض کنید $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است. در این صورت بنا به قضیه ۴-۳ قاب تلفیقی برای $\mathcal{H}$ نیز می‌باشد. ازطرف دیگر چون φ عملگر فشرده است عملگر $T^{-1}\varphi T'^{-1}$ نیز فشرده می‌باشد. اما

$$T^{-1}\varphi T'^{-1} f = \sum_{j\in J} w_j^2 \left(\pi_{\mathcal{N}_j} - \pi_{\mathcal{M}_j}\right) f$$

در نتیجه $\{(\mathcal{N}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی برای $\overline{span}\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ است.

فرض کنید $S_{\mathcal{N}}$ عملگر قاب تلفیقی متناظر باشد. از آنجا که $\varphi = TS_{\mathcal{N}}T' - T'S_{\mathcal{M}}T$ لذا $TS_{\mathcal{N}}T' = \varphi + T'S_{\mathcal{M}}T$. اما φ و $T'S_{\mathcal{M}}T$ عملگرهای مثبتی هستند. بنابراین $TS_{\mathcal{N}}T'$ نیز عملگر کراندار مثبت است. در نتیجه $\{(\mathcal{N}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\overline{span}\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ است.

در قضیه بعد قاب‌های کنترل شده موضعی مورد توجه قرار گرفته‌اند تا قاب‌های کنترل شده کلی بدست آیند.

قضیه ۴-۷: فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای C^*-مدولهای هیلبرتی، $T.T' \in GL^{+}(\mathcal{H})$، مجموعه $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته $\mathcal{H}$ و $\{w_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از وزن‌ها باشند. در نظر بگیرید که $\{f_{jk}: k \in K_j\}$قابی برای $\mathcal{M}_j$ با عملگر قاب S_j برای هر $j \in J$ باشد. در این صورت $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است اگر وتنها اگر $\{w_j S_j^{-\frac{1}{2}} f_{jk}: j \in J, k \in K_j\}$ قاب (T,T')-کنترل شده باشد.

برهان. فرض کنید $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی با کران‌های C و D باشد. از آنجا که برای هر $j \in J$ دنباله $\{f_{jk}: k \in K_j\}$ قابی برای $\mathcal{M}_j$ با عملگر قاب S_j است. لذا $\{S_j^{-\frac{1}{2}} f_{jk}: k \in K_j\}$ قاب پارسوال برای $\mathcal{M}_j$ است. در نتیجه برای هر $f \in \mathcal{H}$داریم

$$\pi_{\mathcal{M}_j} T' f = \sum_{k\in K_j} \langle T' f, S_j^{-\frac{1}{2}} f_{jk}\rangle S_j^{-\frac{1}{2}} f_{jk}$$

از طرف دیگر

$$C\langle f,f\rangle \le \sum_{j\in J} w_j^2 \langle \pi_{\mathcal{M}_j} T' f, Tf\rangle \le D\langle f,f\rangle$$

معادل است با

$$C\langle f,f\rangle \le \sum_{j\in J}\sum_{k\in K_j} \langle T' f, w_j S_j^{-\frac{1}{2}} f_{jk}\rangle \langle w_j S_j^{-\frac{1}{2}} f_{jk}, Tf\rangle \le D\langle f,f\rangle$$

که نشان می‌دهد $\{w_j S_j^{-\frac{1}{2}} f_{jk}: j \in J, k \in K_j\}$ قاب (T,T')-کنترل شده است اگر وتنها اگر $\{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')-کنترل شده برای $\mathcal{H}$ باشد.

در قضیه بعد قاب‌های تلفیقی کنترل شده مشخص گردیده‌اند.

قضیه ۴-۸: فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای C^*-مدولهای هیلبرتی، $T,T' \in GL^{+}(\mathcal{H})$، مجموعه $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته $\mathcal{H}$ و $\{w_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از وزن‌ها باشند. هرگاه $\{e_{jk}: k \in K_j\}$ پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathcal{M}_j$ برای هر $j \in J$ باشد. آنگاه $\mathcal{M} = \{(\mathcal{M}_j, w_j): j \in J\}$ قاب تلفیقی (T,T')- کنترل شده برای $\mathcal{H}$ است اگر وتنها اگر $\Psi = T^*(T'^*)^{-1}$- قاب $\{w_j T'^* e_{jk}: j \in J, k \in K_j\}$ کنترل شده برای $\mathcal{H}$ با عملگر قاب کنترل شده $T^* S_{\mathcal{M}} T'$ باشد.

برهان. فرض کنید $\{e_{jk}: k \in K_j\}$ پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathcal{M}_j$ برای هر $j \in J$ باشد. در این صورت برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$\pi_{\mathcal{M}_j}(Tf) = \sum_{k\in K_j} \langle \pi_{\mathcal{M}_j} Tf, e_{jk}\rangle\, e_{jk} = \sum_{k\in K_j} \langle Tf, e_{jk}\rangle e_{jk}$$

همچنین

$$\pi_{\mathcal{M}_j}(T'f) = \sum_{k\in K_j} \langle \pi_{\mathcal{M}_j} T'f, e_{jk}\rangle\, e_{jk} = \sum_{k\in K_j} \langle T'f, e_{jk}\rangle e_{jk}$$

از این رو

$$\langle \pi_{\mathcal{M}_j}(T'f),\ \pi_{\mathcal{M}_j}(Tf)\rangle = \sum_{k\in K_j} \langle T'f, e_{jk}\rangle \langle e_{jk}, Tf\rangle = \sum_{k\in K_j} \langle f, T'^* e_{jk}\rangle \langle T^* e_{jk}, f\rangle$$

حال با در نظر گرفتن $f_{jk} = w_j T'^* e_{jk}$ و $C = T^*(T'^*)^{-1}$ داریم

$$C\langle f, f\rangle \le \sum_{j\in J} w_j^2\, \langle \pi_{\mathcal{M}_j} T'f, \pi_{\mathcal{M}_j}\, Tf\rangle \le D\langle f, f\rangle$$

معادل است با

$$C\langle f, f\rangle \le \sum_{j\in J} \sum_{k\in K_j} \langle f, f_{jk}\rangle\, \langle Cf_{jk}, f\rangle \le D\langle f, f\rangle$$

و لذا قسمت اول قضیه ثابت می‌گردد. بعلاوه چون Ψ قابی با عملگرقاب $T^*(T'^*)^{-1} S_\Psi$ است و $S_\Psi = {T'}^* S_{\mathcal{M}} T'$ در نتیجه قسمت آخر قضیه ثابت می‌گردد.

فهرست منابع

[1] R. J. Duffin. A.C. Schaeffer. A class of nonharmonic Fourier series. Transactions of the American Mathematical Society 72. 341-366. (1952).

[2] I. Daubechies. A. Grossmann.Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. Journal of Mathematical Physics. 27. 1271-1283. (1986).

[3] O. Christensen. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Birkhauser. Boston. (2003).

[4] I. Kaplansky. Algebra of type I. Annals of Mathematics.. 56. 460-472. (1952).

[5] M. Frank. D.R. Larson. A module frame concept for Hilbert C*-modules. in: Functional and Harmonic Analysis of Wavelets. San Antonio. TX. January 1999. Contemp. Math. 247. Amer. Math. Soc. Providence. RI 207-233. (2000).

[6] E. C. Lance. Hilbert C*-Modules: A Toolkit for Operator Algebraists. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 210. Cambridge Univ. Press. (1995).

[7] N. E. Wegge-Olsen. K-theory and C*-algebras a Friendly Approach. Oxford University Press. Oxford. England. (1993).

[8] M. Frank. D.R. Larson. Frames in Hilbert C*-modules and C*-algebras. Journal of Operator Theory 48. 273–314. (2002).

[9] W. Jing. Frames in Hilbert C*-modules. Ph. D. thesis. University of Central Florida Orlando. Florida (2006).

[10] M. Rashidi-Kouchi. A. Nazari. M. Amini. On stability of g-frames and g-Riesz bases in Hilbert C*-modules. International Journal of Wavelets. Multiresolution and Information Processing. 12(6). 1-16. (2014).

[11] A. Khosravi. B. Khosravi. Fusion frames and g-frames in Hilbert C*-modules. International Journal of Wavelets. Multiresolution and Information Processing. 6 (2008) 433–466.

[12] M. Rashidi-Kouchi and A. Rahimi. Controlled frames in Hilbert C*-modules. International Journal of Wavelets. Multiresolution and Information Processing. 15(4). 1-15. (2017).

[13] A. Khosravi and K. Musazadeh. Controlled fusion frames. Methods of Functional Analysis and Topology. 18(3). 256-265. (2012).