دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

انژکتیوی S – سیستم‌های مرتب جزیی اول مرتب منظم

غلامرضا مقدسی[۱*]، نسرین سروقد[۲]

[(۱و۲)] گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۹/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۲/۰۴

چکیده

مفهوم انژکتیوی یک شی در یک رسته نسبت به رده‌های مختلفی از تکریختی‌های آن رسته همواره مورد مطالعه بوده است. ما در این مقاله، مفهوم تکریختی‌های اول مرتب منظم را در رسته S - سیستم‌های مرتب جزیی روی تکواره مرتب جزیی S تعریف کرده و به مطالعه M- انژکتیوی اشیاء آن رسته می‌پردازیم، که M یک رده از تکریختی های اول مرتب منظم می‌باشد. بعلاوه، رفتار این تکریختی‌ها را نسبت به ساختارهایی مانند حاصلضرب، هم‌حاصلضرب و مجموع مستقیم و عقب‌بر و جلوبر S–سیستم‌های مرتب جزیی مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف نهایی ما، پیدا کردن رابطه بین انژکتیوی اول مرتب منظم یک شی و توسیع‌های اول مرتب از آن است.

واژه‌های کلیدی: S- سیستم‌های مرتب جزیی اول مرتب، تکریختی‌های اول مرتب منظم، انژکتیوی اول مرتب منظم.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: r.moghadasi@hsu.ac.ir

۱- مقدمه

یک تکواره (نیم‌گروه) S تکواره مرتب جزیی (نیم‌گروه مرتب جزیی) نامیده می‌شود، هرگاه یک مجموعه مرتب جزیی بوده به طوری که رابطه مرتب جزیی آن، $\leq$، سازگار با عمل دوتایی باشد. به عبارت دیگر برای هر $s,t,s',t' \in S$ اگر $s' \leq t'$ و $s \leq t$، آن‌گاه $ss' \leq tt'$. یک مجموعه ناتهی I از تکواره مرتب جزیی S را یک ایده‌آل راست گوییم، هرگاه $IS \subseteq I$. یک ایده‌آل راست I از تکواره مرتب جزیی S را یک ایده‌آل راست مرتب گوییم، هرگاه برای $s \in S$ و $s' \in I$، $s \leqslant s'$ ایجاب کند $s \in I$ [۱]. برای یک زیرمجموعه X از تکواره مرتب جزیی S، ایده‌آل مرتب تولید شده توسط X را با $(XS)\downarrow$ نمایش می‌دهیم و برابر مجموعه

$$\{t \in S \,|t \leq xs,\ x \in X , s \in S \text{ به ازای } \}$$

می‌باشد. اگر X مجموعه‌ای متناهی باشد، $(XS)\downarrow$ را ایده‌آل راست مرتب متناهیا تولید شده گوییم و هرگاه $X = \{x\}$ آن‌گاه به آن ایده‌آل راست مرتب اصلی گوییم و با $(xS)\downarrow$ نمایش می‌دهیم [۱]. برای یک تکواره مرتب جزیی S، یک S- سیستم مرتب جزیی راست A، یک مجموعه مرتب جزیی A است به همراه تابع $A \times S \to A$ به طوری که برای هر $s \in S$ و هر $a \in A$، اگر as نشان دهنده تصویر (a,s) تحت تابع فوق باشد، آن‌گاه برای هر $s,t \in S$ و هر $a,b \in A$ داشته باشیم:

۱) $(as)t = a(st)$،

۲) $a1 = a$،

۳) اگر $a \leq b$ آن‌گاه $as \leq bs$، و

۴) اگر $s \leq t$ آن‌گاه $as \leq at$.

یک S– سیستم مرتب جزیی B را یک زیر S– سیستم مرتب جزیی از A نامیم، هرگاه B یک زیرمجموعه از A باشد و نسبت به عمل ضرب با همان ترتیب در A بسته باشد. در این مقاله به ترتیب منظور از S– سیستم مرتب جزیی و ایده‌آل، S– سیستم مرتب جزیی راست و ایده‌آل راست می‌باشد. فرض کنید A و B دو S- سیستم مرتب جزیی باشند. در این صورت نگاشت $f : A \to B$ یک S- همریختی مرتب جزیی نامیده می‌شود، در صورتی که برای هر $s \in S$ و $a,a' \in A$، $f(as) = f(a)s$ و نامساوی $a \leq a'$، نتیجه دهد که $f(a) \leq f(a')$. به علاوه یک تکریختی منظم (برابرساز) دقیقا یک نشاننده ترتیب جزیی است؛ یعنی همریختی (تکریختی)$f : A \to B$ که در آن برای هر $a,a' \in A$، $f(a) \leq f(a')$ اگر و تنها اگر $a \leq a'$. رسته همه S- سیستم‌های مرتب جزیی و همریختی های بین آن‌ها را با Pos-S نمایش می‌دهیم. جهت یادآوری، حاصلضرب یک خانواده از S- سیستم‌های مرتب جزیی، ضرب دکارتی آن‌ها با عمل مرتب مولفه‌ای می‌باشد. همچنین هم‌حاصلضرب یک خانواده از S- سیستم‌های مرتب جزیی، اجتماع منفصل آن‌ها با عمل مرتب مولفه‌ای است. معمولا برای حاصلضرب و هم‌حاصلضرب به ترتیب از نمادهای $\prod$ و $\coprod$ استفاده می‌شود. برای مطالعه‌ی جزییات بیشتر در مورد این مفاهیم می‌توان به [۲] رجوع کرد. عضو θ از یک S- سیستم مرتب جزیی A را یک عضو ثابت یا صفر گوییم هرگاه برای هر $s \in S$، $\theta s = \theta$. فرض کنید A یک S- سیستم مرتب جزیی باشد. در این صورت A را مرکزی گوییم، هرگاه A دارای یک عضو صفر یکتا باشد. یک S- سیستم مرتب جزیی A را باوفا نامیم، هرگاه

$$(\Theta\colon A) = \{\, s \in S | As = \Theta\} = \{0\}$$

که در آن $\Theta = \{\theta\}$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی از A است. ما در این مقاله سیستم‌های مرتب جزیی مرکزی را مورد مطالعه قرار می‌ده‌یم. یک همنهشتی S- سیستم مرتب جزیی ρ روی A، در واقع یک همنهشتی S- سیستمی است که S- سیستم $A/_{\rho}$ بتواند یک S- سیستم مرتب جزیی باشد به گونه‌ای که همریختی کانونی S- سیستمی

$A \to A/\rho$ یـک همـریـختـی S- سیستم مرتب جزیی باشد. برای یک رابطه‌ی دوتایی R روی A، رابطه‌ی $\leq_R$ را روی A به این صورت تعریف می‌کنیم: $a \leq_R a'$ اگر و تنها اگر عضوهای $a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n \in A$ چنان موجود باشند که $a \leq a_1 R a'_1 \leq \cdots \leq a_n R a'_n \leq a'$.

بنابراین یک همنهشتی S- سیستمی ρ روی A یک همنهشتی S- سیستم مرتب جزیی است اگر و تنها اگر $a\rho a'$ هرگاه $a \leq_\rho a' \leq_\rho a$. به همین ترتیب، A/ρ یک S- سیستم مرتب جزیی خارج قسمتی دقیقاً یک S- سیستم خارج قسمتی است که دارای ترتیب جزیی $[a]_\rho \leq [b]_\rho$ اگر و تنها اگر $a \leq_\rho b$ باشد. همچنین همنهشتی S- سیستمی مرتب جزیی $\rho(H)$ روی A تولید شده توسط $H \subseteq A \times A$ به صورت زیر می‌باشد (گزاره ۳ .۳ از مرجع [۳] را ملاحظه کنید): $a\rho(H)a'$ اگر و تنها اگر $a = a'$ یا عضوهای $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_m \in S$ چنان موجود باشند به طوری که

$$\begin{aligned}
& a \leq c_1 s_1 \\
& d_1 s_1 \leq c_2 s_2 \\
& d_2 s_2 \leq c_3 s_3 \\
& d_3 s_3 \leq c_4 s_4 \\
& \dots\ d_n s_n \leq a'
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
& a' \leq p_1 t_1 \\
& q_1 t_1 \leq p_2 t_2 \\
& q_2 t_2 \leq p_3 t_3 \\
& q_3 t_3 \leq p_4 t_4 \\
& \dots\ q_m t_m \leq a
\end{aligned}$$

که برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$ داریم $(c_i,\ d_i), (p_j, q_j) \in H \cup H^{-1}$. بعلاوه، رابطه‌ی ترتیبی $\rho(H)$ را روی A می‌توان به این شکل تعریف نمود: $[a]_\rho \leq [b]_\rho$ اگر و تنها اگر $a \leq_\rho a'$ یا عضوهای $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ چنان موجود باشد به طوری که

$$\begin{aligned}
& a \leq c_1 s_1 \\
& d_1 s_1 \leq c_2 s_2 \\
& d_2 s_2 \leq c_3 s_3 \\
& d_3 s_3 \leq c_4 s_4 \\
& \dots\ d_n s_n \leq a'
\end{aligned}$$

که برای هر عدد طبیعی $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $(c_i,\ d_i) \in H \cup H^{-1}$.

۲- پیشینه تحقیق

اکنون نیم نگاهی به تاریخچه S- زیرسیستم‌های اول می‌اندازیم و با ایده گرفتن از آن زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از یک S- سیستم مرتب جزیی را تعریف می‌کنیم. ایده‌آل‌های اول ابزارهای مفیدی در نظریه نیم‌گروه ها هستند که کلیفورد و پریستون در [۴] به آن‌ها پرداخته اند. یادآوری می‌کنیم که یک ایده‌آل I از نیم گروه S را اول نامند هرگاه برای $s, s' \in S$، شمول $sSs' \subseteq I$ ایجاب کند $s \in I$ یا $s' \in I$. به طور معادل، I اول است اگر و تنها اگر برای هر دو ایده‌آل A و B از S، شمول $AB \subseteq I$ ایجاب کند $A \subseteq I$ یا $B \subseteq I$ (به مرجع [۴] مراجعه کنید). همان طور که این مفهوم به مدول‌های اول توسط داونز [۵] تعمیم داده شده، به S- سیستم های اول نیز توسط احسن [۶] تعمیم داده شده است. فرض کنید B یک زیرسیستمی از سیستم A باشد. در این صورت مجموعه

$$(B : A) = \{s \in S :\ As\ \subseteq B\}$$

یک ایده‌آل از S است که به آن ایده‌آل وابسته گوییم. یک زیرسیستم B از سیستم A را زیرسیستم اول است هرگاه برای هر $s \in S$ و $a \in A$ شمول $aSs \subseteq B$، ایجاب کند $a \in B$ یا $s \in (B : A)$. یک ایده‌آل I از S اول است اگر و تنها اگر I یک زیرسیستم اولی از S باشد[۶].

در طول دهه های اخیر، حجم وسیعی از متون در علم جبر به بررسی آنچه که معمولا به آن انژکتیوی یک شی از یک رسته می‌نامند، پرداختـه شـده است. بناشفسکی مفهوم M- انژکتیوی در یک رسته را در

[۷] بیان کرده است به طوری که M یک زیر رده از تکریختی ها می‌باشد (که به عضو های آن M- ریخت گوییم) و به صورت زیر تعریف می‌شود: یک شی A از یک رسته را M- انژکتیو گویند، هرگاه برای هر M- ریخت $\mathrm{g : B \to C}$، هم‌ریختی $\mathrm{f : B \to A}$ را بتوان به همریختی $\mathrm{\bar{f} : B \to A}$ توسیع داد یعنی $\mathrm{\bar{f}g = f}$ [۷].

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g\in\mathcal{M}"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[dl, dotted, "\bar{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

ما در این مقاله M- انژکتیوی S- سیستم‌های مرتب جزیی، زمانی که M زیررده‌ای از تمام تکریختی‌های اول مرتب منظم در رسته سیستم‌های مرتب جزیی باشد، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک S- سیستم مرتب جزیی A را یک درونبر اول مرتب از توسیع اول مرتب $f: A \to B$ نامیم هرگاه f دارای وارون چپ $g: B \to A$ باشد، که به آن یک درونبری اول مرتب گوییم. نشان خواهیم داد که اگر f یک همریختی اول مرتب منظم باشد، آن‌گاه حاصلضرب $\prod f$ و هم‌حاصلضرب $\coprod f$ آن نیز تکریختی اول مرتب منظم است و برعکس. اما این امر لزوما برای یک خانواده مجزا از تکریختی‌های اول مرتب منظم برقرار نمی‌باشد. همچنین خاصیت ایستایی عقب بر و جلوبر تکریختی‌های اول مرتب منظم را در این مقاله بررسی می‌کنیم.

۳- خواص رسته‌ای تکریختی‌های اول مرتب منظم

در این بخش بعد از معرفی نشانندههای مرتب اول مرتب به بررسی خواص رسته‌ای مربوط به حاصلضرب و هم‌حاصلضرب و جلوبر و عقب بر برای تکریختی‌های اول مرتب منظم می‌پردازیم.

تعریف ۳-۱) الف) یک ایده‌آل I از S را اول مرتب نامیم، هرگاه برای هر $\mathrm{s, s' \in S}$، شمول $\mathrm{sSs' \subseteq \downarrow I \cap \uparrow I}$ ایجاب کند $\mathrm{s \in I}$ یا $\mathrm{s' \in I}$.

ب) یک زیر S- سیستم مرتب جزیی B از S- سیستم مرتب جزیی A را یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب نامیم، هرگاه برای هر $\mathrm{a \in A}$ و $\mathrm{s \in S}$ شمول $\mathrm{aSs \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B}$ ایجاب کند $\mathrm{a \in B}$ یا $\mathrm{As \subseteq B}$.

ج) S- سیستم مرتب جزیی A را اول مرتب نامیم هرگاه $\Theta = \{\theta\}$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از A باشد. به خصوص، تکواره مرتب جزیی S اول مرتب است هرگاه ایده‌آل صفر $\{0\}$ از S به عنوان یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از S باشد.

د) یک S- همریختی مرتب جزیی $\mathrm{f : A \to B}$ را اول مرتب نامیم، هرگاه $\mathrm{f(A)}$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از B باشد. بنابراین هر S- همریختی مرتب جزیی پوشا، اول مرتب است.

گزاره ۲-۳) ایده‌آل I از تکواره مرتب جزیی S یک ایده‌آل اول مرتب است اگر و تنها اگر I به عنوان یک زیر S- سیستم از S، مرتب جزیی اول مرتب باشد.

اثبات: فرض کنید ایده‌آل I از S یک ایده‌آل اول مرتب باشد و برای هر $s \in \mathrm{S}$ و $\mathrm{s' \in S}$ شمول $\mathrm{sSs' \subseteq \downarrow I \cap \uparrow I}$ را داشته باشیم. چون I یک ایده‌آل اول مرتب است، پس $\mathrm{s \in I}$ یا $\mathrm{s' \in I}$. از آن جایی که I یک ایده‌آل است، می‌توان گفت $\mathrm{s \in I}$ یا $Ss' \subseteq \mathrm{I}$. در نتیجه I یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از S است. برعکس، فرض کنید I یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از S باشد. نشان می‌دهیم که کنید ایده‌آل I از S اول مرتب است. برای هر $s, s' \in \mathrm{S}$ شمول $\mathrm{sSs' \subseteq \downarrow I \cap \uparrow I}$ را داشته باشیم. در نتیجه $\mathrm{s \in I}$ یا $Ss' \subseteq \mathrm{I}$. چون S یک تکواره مرتب جزیی است، پس $\mathrm{s \in I}$ یا $s' = 1, s' \in \mathrm{I}$ و حکم برقرار است. □

گزاره ۳-۳) هر زیر S- سیستم مرتب جزیی ناصفر B از S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب A یک S- سیستم مرتب جزیی اول مرتبه است.

اثبات: فرض کنید برای $s \in S$ و $b \in B$ که عضو ثابت نیست داشته باشیم $bSs \subseteq \downarrow \Theta \cap \uparrow \Theta$. از آن‌جایی که A یک S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب است یعنی $\Theta = \{\theta\}$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از A است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $As = \Theta$. در نتیجه $Bs \subseteq As = \Theta$. بنابراین B اول مرتب است.□

گزاره ۴-۳) فرض کنید B یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از A باشد. در این صورت

$(B : A)=\{s \in S | As \subseteq B\}$

یک ایده‌آل اول مرتب از تکواره مرتب جزیی S است.

اثبات: فرض کنید برای $s, s' \in S$ داشته باشیم:

$sSs' \subseteq \downarrow (B : A) \cap \uparrow (B : A)$

و $s \notin (B: A)$. در این صورت $As \nsubseteq B$. درنتیجه عضو $a' \in A$ چنان موجود است که $a's \notin B$. حال نشان خواهیم داد که

$\downarrow (B : A) \subseteq (\downarrow B : A)$.

برای این منظور عضو $r \in \downarrow (B : A)$ را در نظر بگیرید. در این صورت یک عضو $t \in (B : A)$ چنان موجود است که $r \leq t$ و $At \subseteq B$. به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که برای هر $a \in A$ داریم $ar \leq at$ و $at \in B$. بنابراین برای هر $a \in A$ داریم $ar \in \downarrow B$. در نتیجه می‌توان نوشت $Ar \subseteq \downarrow B$ و به همین ترتیب $r \in (\downarrow B : A)$. با برهانی مشابه به راحتی می‌توان نشان داد که

$\uparrow (B: A) \subseteq (\uparrow B : A)$.

اکنون می‌توان نوشت

$sSs' \subseteq \downarrow (B: A) \cap \uparrow (B: A)$

$\subseteq (\downarrow B: A) \cap (\uparrow B : A)$.

به وضوح می‌توان دید که

$(\downarrow B : A) \cap (\uparrow B : A) \subseteq (\downarrow B \cap \uparrow B : A)$.

در نتیجه $AsSs' \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$. به خصوص برای $a' \in A$ داریم $a'sSs' \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$. چون B یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از A است، پس $a's \in B$ یا $Bs' \subseteq A$. باتوجه به انتخاب a'، نتیجه می‌شود $Bs' \subseteq A$. به عبارت دیگر $s' \in (B : A)$. □

قضیه ۵-۳) فرض کنید S یک تکواره مرتب جزیی باشد. یک زیر S- سیستم مرتب جزیی B از یک S- سیستم مرتب جزیی A اول مرتب است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل چپ I از S و هر $C \subseteq A$ شمول $CI \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$ ایجاب کند $C \subseteq B$ یا $AI \subseteq B$.

اثبات: فرض کنید B یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از A باشد و همچنین برای یک ایده‌آل چپ I از S و برای یک زیر S- سیستم مرتب جزیی C از A داشته باشیم $CI \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$. در این صورت

$CSI \subseteq CI \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$

بنابراین برای هر $c \in C$ و هر $i \in I$ داریم $cSi \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$. چون B یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از A است، پس برای هر $c \in C$ و هر $i \in I$ داریم $c \in B$ یا $Ai \subseteq B$. نهایتا نتیجه می‌گیریم که $C \subseteq B$ یا $AI \subseteq B$. برعکس، فرض کنید برای هر $a \in A$ و هر $s \in S$ داشته باشیم $aSs \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$. در این صورت

$(aS)(Ss) = aSSs \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$.

در نتیجه $aS \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$ یا

$ASs = A(Ss) \subseteq B$.

چون $1 \in S$، پس $a \in \downarrow B \cap \uparrow B$ یا $As \subseteq B$. □

گزاره ۶-۳) تکواره مرتب جزیی S اول مرتب است اگر و تنها اگر یک S- سیستم مرتب جزیی باوفای اول مرتب وجود داشته باشد.

اثبات: فرض کنید تکواره منظم جزیی S اول مرتب باشد. در این صورت $\{0\}$ یک ایده‌آل اول مرتب از S است. عضو دلخواه $t \in (0:S)$ را در نظر بگیرید. در نتیجه $St = 0$. این به این معنی است که برای هر $u \in S$ داریم $ut = 0$. از آن‌جایی که S به عنوان یک S- سیستم مرتب جزیی دارای صفر یکتا است، پس $t = 0$. بنابراین S یک S- سیستم مرتب جزیی باوفا است. برعکس، فرض کنید A یک S- سیستم مرتب جزیی باوفا باشد. در این صورت ما نشان خواهیم داد که S یک تکواره منظم جزیی اول مرتب است، یعنی $\{0\}$ یک ایده‌آل اول مرتب از S است. فرض کنید برای $s, s' \in S$ داشته باشیم

$$sSs' \subseteq \downarrow \{0\} \cap \uparrow \{0\} = \{0\}.$$

حال اگر $s \neq 0$ آن‌گاه $AsS \neq \Theta$، زیرا اگر $AsS = \Theta$، پس به وضوح $sS \subseteq (\Theta : A) = \{0\}$. این نشان می‌دهد $s = 0$ که تناقض با فرض می‌باشد. لذا عضو $a \in A$ چنان موجود است که $asS \neq \Theta$. اما چون $sSs' = \{0\}$، پس $asSs' = \Theta$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی از A است. از آن‌جایی که A یک S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب است و $asSs' = \Theta$ و چون as یک عضو ناصفر از A است، می‌توان نتیجه گرفت که $s' \in (\Theta : A) = \{0\}$. در نتیجه $\{0\}$ یک ایده‌آل اول مرتب از S است که نشان می‌دهد S یک تکواره منظم جزیی اول مرتب است.

گزاره ۷-۳) فرض کنید I یک ایده‌آل از S باشد. ایده‌آل I یک ایده‌آل اول مرتب است اگر و تنها اگر یک S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب A چنان موجود باشد که $I = (\Theta : A)$.

اثبات: فرض کنید I یک ایده‌آل اول مرتب از S باشد. در این صورت تکواره مرتب جزیی خارج قسمتی ریس $S/_I$ یک تکواره مرتب جزیی اول مرتب صفردار است. با توجه به گزاره ۶-۳ یک $S/_I$– سیستم مرتب جزیی اول مرتب A چنان موجود است به طوری‌که

$$(\Theta : A) = [0]_I$$

از این چنین نتیجه می‌شود که $I = (\Theta : A)$. برعکس، فرض کنید A یک S – سیستم مرتب جزیی اول مرتب باشد و $I = (\Theta : A)$. در این صورت A یک $S/_I$ - سیستم مرتب جزیی اول مرتب روی $S/_I$ یک تکواره مرتب جزیی خارج قسمتی ریس و باوفا می‌باشد. بنا به گزاره ۶-۳، $S/_I$ یک تکواره مرتب جزیی اول مرتب است و در نتیجه I یک ایده‌آل اول مرتب از S است.□

یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم یک S- تکریختی مرتب جزیی منظم است که اول مرتب هم باشد. اکنون در ادامه این مقاله با توجه به این تعریف حاصلضرب و هم‌حاصلضرب S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گزاره ۸-۳) فرض کنید $f: A \to B$ یک S- همریختی باشد. در این صورت عبارت های زیر معادل هستند:

۱) S- همریختی f یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است.

۲) S- همریختی مرتب جزیی $\prod f: \prod A \to \prod B$ القا شده توسط حاصلضرب، یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است.

۳) S- همریختی مرتب جزیی $\coprod f: \coprod A \to \coprod B$ القا شده توسط حاصلضرب، یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است.

اثبات: (۱) ⇐ (۲) با توجه به گزاره ۷. ۱. ۲ در مرجع [۸]، داریم $\prod f = \langle (f\, p_i)_{i \in I} \rangle$ یک S- همریختی یکتاست به طوری که نمودار زیر برای هر $i \in I$ جابجایی است و برای هر

$\langle a_i\rangle_{i\in I} \in \prod A$، $(\prod f)(\langle a_i\rangle_{i\in I}) = \langle f(a_i)_i\rangle_{i\in I}$.

$$\begin{tikzcd} \prod A \arrow[r, dotted, "\prod f"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod B \arrow[d, "p'_i"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

با توجه به گزاره (۲) از مرجع [۹]، اگر f یک S- تکریختی مرتب جزیی منظم باشد، آن‌گاه $\prod f$ نیز یک S- تکریختی مرتب جزیی منظم است. پس کافی است ثابت کنیم که $\prod f: \prod A \to \prod B$ اول مرتب است. در حالتی که تکریختی f پوشا باشد، داریم

$\prod f\,(\prod A) = \prod f(A) = \prod B,$

پس $\prod f$ نیز پوشاست. در نتیجه $\prod f$ اول مرتب است. پس فرض کنید f پوشا نباشد. نشان خواهیم داد که اگر $f(A) \subset B$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب باشد، آن‌گاه $\prod f(\prod A) \subset \prod B$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب است. فرض کنید برای هر $s \in S$ و هر

$$\langle b_i\rangle_i \in \prod B\backslash \prod f(A) = \big((B\backslash f(A)) \times B \times B \times \ldots\big) \cup \big(B \times (B\backslash F(A)) \times B \times \ldots\big) \cup \big(B \times B \times (B\backslash f(A)) \times \ldots\big) \cup \ldots \neq \emptyset$$

داشته باشیم:

$$\langle b_i\rangle_i Ss \subseteq \downarrow \prod f(\prod A) \cap \uparrow \prod f(\prod A) = \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A).$$

در این صورت عضو $j \in I$ چنان موجود است که $b_j \notin f(A)$. اکنون ما نشان می‌دهیم که

$$\downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A) \subseteq \prod\big(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)\big).$$

برای این منظور عضو $\langle x_i\rangle \in \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A)$ را در نظر بگیرد. در نتیجه $\langle x_i\rangle \in \downarrow \prod f(A)$ و $\langle x_i\rangle \in \uparrow \prod f(A)$. بنابراین عضوهای $\langle x'_i\rangle, \langle x''_i\rangle \in \prod f(A)$، چنان موجود است که $\langle x''_i\rangle \le \langle x_i\rangle \le \langle x'_i\rangle$. می‌توان دریافت که برای هر $i \in I$ داریم $x''_i \le x_i \le x'_i$، یعنی برای هر $i \in I$ داریم $x_i \in \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$. به وضوح نتیجه می‌گیریم $\langle x_i\rangle \in \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$. حال شمول $\langle b_i\rangle_i Ss \subseteq \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A)$ نتیجه می‌دهد که $\langle b_i Ss\rangle_i \subseteq \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$. پس برای هر $i \in I$، داریم $b_i Ss \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$. چون $f(A)$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از B است، پس برای هر $i \in I$، خواهیم داشت $b_i \in f(A)$ یا $Bs \subseteq f(A)$. در حالت خاص برای $j \in I$ نیز داریم $b_j Ss \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$. چون $b_j \notin f(A)$ و $f(A)$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از B است، پس $Bs \subseteq f(A)$. بنابراین $\prod Bs \subseteq \prod f(A)$ و $\prod f$ یک تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) نشان خواهیم داد که $f: A \to B$ اول مرتب است، هرگاه $\prod f$ اول مرتب باشد. برای این منظور فرض کنید برای هر $s \in S$ و هر $b \in B\backslash f(A)$ داشته باشیم $bSs \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\langle b\rangle = (b, b, b, \ldots) \in \prod\big(B\backslash f(A)\big) \subseteq (\prod B)\backslash(\prod f(A))$$

و

$$\langle b\rangle Ss \subseteq \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)).$$

اکنون نشان می‌دهیم

$$\prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)) \subseteq \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A).$$

برای این منظور عضو $\langle x_i\rangle \in \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $i \in I$ داریم

$$x_i \in \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$$

که می‌توان نوشت

$\langle x_i\rangle \in \prod \uparrow f(A)$ یا $\langle x_i\rangle \in \prod \downarrow f(A)$.

به وضوح می‌توان نشان داد که

$\prod \downarrow f(A) = \downarrow \prod f(A)$ و $\prod \uparrow f(A) = \uparrow \prod f(A)$

و از این رو نتیجه می‌گیریم که $\langle x_i\rangle \in \prod \downarrow f(A) \cap \prod \uparrow f(A)$. حال می‌توان ادعا کرد که

$$\langle b\rangle Ss \subseteq \prod\big(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)\big) \subseteq \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A).$$

از آن‌جایی که $\prod f$ اول مرتب است و همچنین چون $\langle b\rangle \in (\prod B)\backslash(\prod f(A))$، پس $(\prod B)s \subseteq \prod f(A)$. عضو دلخواه $b's \in Bs$ را در نظر بگیرید. در نتیجه به وضوح داریم:

$$\langle b's\rangle = (b's, b's, \dots) \in \prod Bs \subseteq \prod f(A)$$

و نتیجه می‌گیریم $b's \in f(A)$. می‌توان استنتاج کرد که $Bs \subseteq f(A)$ و $f(A)$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از B است و به همین ترتیب f اول مرتب است.

(۱) ⇐ (۳) فرض کنید $f: A \to B$ یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم باشد. بنا بر گزاره ۱۴.۱.۲ از مرجع [۸]، خواهیم داشت که $\coprod f: \coprod A \to \coprod B$ یک S - همریختی است به طوری که طبق خاصیت جهانی حاصلضرب به طور منحصر بفرد چنان وجود دارد و نمودار زیر را جابجا می‌کند:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_i"'] & B \arrow[d, "u'_i"] \\ \coprod A \arrow[r, dotted, "\coprod f"'] & \coprod B \end{tikzcd}$$

به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $\coprod f u_i = u'_i f$. در نتیجه $\coprod f u_i(A) = u'_i f(A)$ و به عبارت دیگر $\coprod f(i, A) = \big(i, f(A)\big)$ و همچنین خواهیم داشت

$$\coprod f(\coprod A) = \cup_i\ (i, f(A)) = \coprod f(A)$$

طبق گزاره (۵) از مرجع [۹]، $\coprod f$ یک S- تکریختی مرتب جزیی منظم است هرگاه f یک S- تکریختی مرتب جزیی منظم باشد. پس فقط کافی است نشان دهیم $\coprod f$ اول مرتب است و همچنین

$$\coprod f(\coprod A) = \coprod f(A) \subseteq \coprod B$$

یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب است، هرگاه $f(A) \subseteq B$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب باشد. به ازای هر $s \in S$ و برای هر

$$(i, b) \in \coprod B\backslash \coprod f(A) = \coprod (B\backslash f(A))$$

شمول $(i, b)Ss \subseteq \downarrow\coprod f(A) \cap \uparrow\coprod f(A)$ را در نظر بگیرید. اکنون نشان می‌دهیم که

$$\downarrow \coprod f(A) \cap \uparrow \coprod f(A) \subseteq \coprod \big(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)\big).$$

برای این منظور عضو دلخواه

$$(i, b) \in \downarrow \coprod f(A) \cap \uparrow \coprod f(A)$$

را در نظر بگیرید. در این صورت $(i, b) \in \downarrow \coprod f(A)$ و $(i, b) \in \uparrow \coprod f(A)$ را خواهیم داشت. در نتیجه به ترتیب عضوهای (i, b') و (i, b'') در $\coprod f(A)$ چنان موجود است که $(i, b'') \le (i, b) \le (i, b')$. در نتیجه

$$(i, b) \in \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$$

و به همین ترتیب

$$(i, b) \in \big(i, \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)\big) \subseteq \coprod\ (\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$$

از آن‌جایی که داریم $(i, bSs) \subseteq \downarrow \coprod f(A) \cap \uparrow \coprod f(A)$، پس $(i, bSs) \subseteq (i, \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$. چون $b \in B \backslash f(A)$ و $bSs \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$ و $f(A)$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از B است، پس داریم $Bs \in f(A)$. که مستقیماً می‌توان نتیجه گرفت که $\coprod Bs \subseteq \coprod f(A)$.

(۳) ⇐ (۱) فرض کنید $\coprod f$ یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم باشد. به وضوح $f : A \to B$ یک S- تکریختی مرتب جزیی منظم است. حال نشان می‌دهیم که f اول مرتب است. برای هر $s \in S$ و هر $b \in B\backslash f(A)$، شمول $bSs \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$ را در نظر بگیرید. در نتیجه برای هر $i \in I$، داریم:

$$(i,b)Ss = (i,bSs) \subseteq \big(i, \downarrow f(A)\ \cap \uparrow f(A)\big)$$
$$\subseteq\ \coprod\,(\downarrow f(A)\ \cap \uparrow f(A))$$

حال نشان می‌دهیم که
$$\coprod\big(\downarrow f(A) \cap\uparrow f(A)\big) \subseteq \downarrow \coprod f(A) \cap \uparrow \coprod f(A).$$

فرض کنید $(j,b) \in \coprod\,(\downarrow f(A) \cap\uparrow f(A))$. در این صورت $b \in \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$. از ایـــن رو عضوهای $b_1, b_2 \in f(A)$ چنان موجود است که $b_2 \le b \le b_1$. می‌توان اسـتـنـتـاج کـرد کـه به ازای $(j,b_1),(j,b_2) \in \big(j,f(A)\big) \subseteq \coprod f(A),$ داریم $(j,b_2) \le (j,b) \le (j,b_1)$. به وضوح این نشان می‌دهد که $(j,b) \in \downarrow \coprod f(A) \cap \uparrow \coprod f(A)$.
از آن جایی که می‌دانیم $\coprod f$ اول مرتب است و همچنین به ازای
$$(i,b) \in \coprod\,(B\setminus f(A)) = (\coprod B)\setminus (\coprod f(A))$$

داریم
$$(i,bSs) \subseteq \coprod\big(\downarrow f(A) \cap\uparrow f(A)\big)$$
$$\subseteq \downarrow\coprod f(A) \cap\uparrow\coprod f(A)$$

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $(\coprod B)s \ \subseteq \coprod f(A)$. حال عضو دلخواه $bs \in Bs$ را در نظر بگیرید. در این صورت به وضوح برای هر اندیس $i \in I$ داریم
$$(i,bs) \in \coprod\,(Bs) = (\coprod B)s \subseteq f(A)$$

و به همین ترتیب $bs \in f(A)$. از این رو همان طور که خواسته شده است داریم $Bs \ \subseteq\ f(A)$ □
یادآوری می‌کنیم که منظور از جمع مستقیم خانواده $\{A_i:\ i \in I\}$ از S- سیستم‌های مرتب جزیی که هر یک دارای صفر یکتا هستند، زیر S- سیستم مرتب جزیی از حاصلضرب $\prod A_i$ می‌باشد که شامل همه $(a_i)_{i\in I}$هایی است که به ازای همه $i \in I$ به استثنای تعداد متناهی‌ای داریم $a_i = \theta$، و آن را با $\bigoplus A_i$ نمایش می‌دهیم. حال به عنوان یک نتیجه از گزاره ۸- ۳ به نکته زیر توجه کنید.

نکته ۹-۳) فرض کنید $f: A \to B$ یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم باشد به طوری که A و B حاوی عضو ثابت یکتا باشند. S- همریختی مرتب جزیی القا شده توسط حاصلضرب $\prod f$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که
$$\bigoplus f\!:\!\bigoplus A \to \bigoplus B$$

برابر با تحدید $\prod f\!: \prod A \to \prod B$ به $\bigoplus A$ می‌باشد. از این رو با توجه به گزاره ۸- ۳ ، $\prod f$ یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است و در نتیجه $\bigoplus f$ نیز یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است.
رسته $\mathcal{A}$ را دارای خاصیت M- انتقالی گوییم هرگاه M یک زیر رده‌ای از تکریختی ها باشد و برای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

که $f \in M$، آن‌گاه در نمودار جابجایی زیر $h \in M$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

اکنون این خاصیت را که به خاصیت ایستایی جلوبر نیز شناخته شده است را برای رده تمام S– تکریختی‌های مرتب جزیی اول مرتب منظم مورد مطالعه قرار می‌دهیـــم (برای اطلاعات بیشتر از مفهوم جلوبر، جلوبرچندگانه و عقب بر می‌توان به مرجع [۸] رجوع کرد).

قضیه ۱۰-۳) جلوبرها در رسته S– سیستم‌هـــای مرتب جزیی، S– تکریختی‌های مرتب جزیی اول مرتب منظم را انتقال می‌دهند.
اثبات: در قضیه (۱) از مرجع [۹] نشان داده شده است که جلوبرها S– تکریختی‌های مرتب جزیی

منظم را انتقال می‌دهند. از این رو فقط کافی است آن را برای تکریختی‌های اول مرتب اثبات کنیم. در نظر بگیرید $D = {(B \dot\cup C)}/_{\rho}$ به طوری که ρ همنهشتی تولید شده توسط مجموعه زوج مرتب‌های $\{ (g(a), f(a)) \mid a \in A \}$

می‌باشد و $B \dot\cup C := (\{1\}\times B) \cup (\{2\}\times C)$ همـچنین قرار دهید $q_B = \pi u_B$ و $q_C = \pi u_C$ به طــوری کــه π برریختی کانونی به توی $B \dot\cup C$ و u_B و u_C نگاشت های تزریق هستند. در این صورت $((q_C, q_B), D)$ جلوبر (g,f) در رسته Pos-S است. اکنون فرض کنید $f: A \to B$ یک $S-$ تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم باشد. نشان می‌دهیم که q_C یک $S-$ تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است، یعنی

$$\begin{aligned} q_C(C) &= \{q_C(c) \mid c \in C\} \\ &= \{\pi u_C(c) \mid c \in C\} \\ &= \{[(2,c)]_\rho \mid c \in C\} \end{aligned}$$

یک زیر $S-$ سیستم مرتب جزیی اول مرتب است. فرض کنید برای هر $s \in S$ و هر $[(i,d)]_\rho \in D$ داشته باشیم

$$[(i,d)]_\rho Ss \subseteq \downarrow q_C(C) \cap \uparrow q_C(C)$$

که اگر $i = 1$ یا $i = 2$، آن‌گاه به ترتیب $d \in B$ یا $d \in C$. از این رو باید نشان دهیم که

$[(i,d)]_\rho \in q_C(C)$ یا

$Ds \subseteq q_C(C) = \{[(2,c)]_\rho \mid c \in C\}.$

اگر $[(i,d)]_\rho \in q_C(C)$ که در این صورت چیزی برای اثبات نخواهیم داشت. از این رو فرض کنید $[(i,d)]_\rho \notin q_C(C)$ و نشان می‌دهیم که $Ds \subseteq q_C(C)$. این نشان می‌دهد که عضو $b' \in B$ چنان موجود است که $[(i,d)]_\rho = [(1,b')]_\rho$. حال چون داریم $[(1,b')]_\rho Ss \subseteq \downarrow q_C(C)$ و $[(1,b')]_\rho Ss \subseteq \uparrow q_C(C)$، پس برای هر $t \in S$، داریم

$$[(1,b')]_\rho ts \subseteq \downarrow q_C(C)$$

و $[(1,b')]_\rho ts \subseteq \uparrow q_C(C)$. در نتیجه عضوهای $[(2,c_1)]_\rho \in q_C(C)$ و $[(2,c_2)]_\rho \in q_C(C)$ چنان موجود اند که $[(1,b'ts)]_\rho < [(2,c_1)]_\rho$ و $[(2,c_2)]_\rho < [(1,b'ts)]_\rho$. طبق گزاره ۳. ۳ مرجع [۲]، برای هر $t \in S$ عضوهای $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ و $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ چنان موجود اند که

$$\begin{aligned} &(1, b'ts) \le (1, f(a_1)s_1) \\ &(1, f(a_2)s_2) \le (1, f(a_3)s_3) \\ &(2, g(a_1)s_1) \le (2, g(a_2)s_2) \\ &(2, g(a_n)s_n) \le (2, c_1) \end{aligned}$$

و همچنین برای هر $t \in S$ عضوهای $a'_1, a'_2, \dots, a'_n \in A$ و $s'_1, s'_2, \dots, s'_n \in S$ چنان موجود اند که

$$\begin{aligned} &(2, c\,2) \le (2, g(a'_1)s'_1) \\ &(2, g(a'_2)s'_2) \le (2, g(a'_3)s'_3) \\ &(1, f(a'_1)s'_1) \le (1, f(a'_2)s'_2) \\ &(1, f(a'_n)s'_n) \le (1, b'ts). \end{aligned}$$

می‌توان دریافت که برای هر $t \in S$، داریم $b'ts \le f(a_1s_1)$ و $f(a'_ns'_n) \le b'ts$. به عبارت دیگر می‌توان نتیجه گرفت که $b'Ss \subseteq \downarrow f(A)$ و $b'Ss \subseteq \uparrow f(A)$ و به همین ترتیب داریم $b'Ss \subseteq \downarrow f(A) \cap \downarrow f(A)$. از این که $f(A)$ یک زیر $S-$ سیستم مرتب جزیی از B است، پس نتیجه می‌گیریم که $b' \in f(A)$ یا $Bs \subseteq f(A)$. حال اگر $b' \in f(A)$، پس عضو $a' \in A$ چنان موجود است که $b' = f(a')$. در نتیجه

$$\begin{aligned} [(1,b')]_\rho &= [(1, f(a'))]_\rho \\ &= [(2, g(a'))]_\rho \in q_C(C) \end{aligned}$$

که یک تناقض با انتخاب $[(i,d)]_\rho \notin q_C(C)$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $Bs \subseteq f(A)$. حال ادعا می‌کنیم که $Ds \subseteq q_C(C)$. برای این منظور فرض کنید که $[(i,d')]_\rho \in D$. در این صورت با توجه به

اینکه $D = {}^{(B \,\dot{\cup}\, C)}/_{\rho}$. عضوهای $b' \in B$ یا $c' \in C$ به ترتیب چنان موجود است که $[(i,d')]_\rho = [(1,b's)]_\rho$ یا $[(i,d')]_\rho = [(2,c's)]_\rho$. اکنون اگر داشته باشیم $[(i,d')]_\rho = [(1,b's)]_\rho$، پس چون $Bs \subseteq f(A)$ عضو $a' \in A$ چنان وجود دارد که $b's = f(a')$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}[(1,b's)]_\rho &= [(1,f(a'))]_\rho \\ &= [(2,g(a'))]_\rho \in q_C(C).\end{aligned}$$

اگر $[(i,d')]_\rho = [(2,c's)]_\rho$، چون $Cs \subseteq C$، پس $[(2,c's)]_\rho \in 0q_C(C)$. این مشخص می‌کند که $Ds \subseteq q_C(C)$. □

با روشی مشابه برای جلوبر، می‌توان برای جلوبرهای چندگانه نیز قضیه ۱۰-۳ را بیان و اثبات نمود که نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۱-۳) جلوبرهای چندگانه نشانده های مرتب اول مرتب را انتقال می‌دهند.

گزاره ۱۲-۳) عقب‌برها نشانده‌های مرتب اول را انتقال می‌دهند.

اثبات: نمودار مربعی عقب بر زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "P_A"] \arrow[d, "P_B"'] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

به طوری که $P = \{(a,b) : g(a) = f(b)\}$، یک زیر S- سیستم مرتب جزیی از $A \times B$ می‌باشد و $p_A : P \to A$ و $p_B : P \to B$ به ترتیب نگاشت‌های تصویر تحدید شده به P روی مولفه اول و دوم هستند. فرض کنید f تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم باشد. نشان می‌دهیم p_A تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم است. براساس گزاره (۴) از مرجع [۹]، p_A تکریختی منظم است، پس فقط کافی است نشان دهیم $p_A(P)$ یک زیر S- سیستم اول مرتب از A است. برای این منظور فرض کنید برای هر $a \in A$ و هر $s \in S$ که $As \not\subseteq p_A(P)$ داشته باشیم $aSs \subseteq \downarrow p_A(P) \cap \uparrow p_A(P)$. بنابراین $aSs \subseteq \downarrow p_A(P)$ و $aSs \subseteq \uparrow p_A(P)$. در نتیجه می‌توان نوشت که برای هر $t \in S$ داریم $ats \in \downarrow p_A(P)$ و $ats \in \uparrow p_A(P)$. در این صورت عضوهای $a_1, a_2 \in p_A(P)$ چنان موجود است که $a_2 \le ats \le a_1$. این نشان می‌دهد که

$$g(a_2) \le g(a)ts = g(ats) \le g(a_1)$$

از آن جایی که $a_1, a_2 \in p_A(P)$، نتیجه می‌گیریم که عضوهای $b_1, b_2 \in B$ چنان موجود است که $g(a_1) = f(b_1)$ و $g(a_2) = f(b_2)$. بنابراین برای هر $t \in S$، داریم

$$f(b_2) = g(a_2) \le g(a)ts = g(ats) \le g(a_1) = f(b_1)$$

و این ایجاب می‌کند که $g(a)Ss \subseteq \downarrow f(B)$ و $g(a)Ss \subseteq \uparrow f(B)$ و به همین ترتیب داریم $g(a)Ss \subseteq \downarrow f(B) \cap \uparrow f(B)$. چون $f(B)$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از C است، پس داریم $g(a) \in f(B)$ یا $Cs \subseteq f(B)$. حال اگر $g(a) \in f(B)$، عضو $b \in B$ چنان موجود است که $f(b) = g(a)$. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که $a \in p_A(P)$ و $p_A(P)$ یک زیر S- سیستم مرتب جزیی اول مرتب از A است. اکنون نشان می‌دهیم $Cs \not\subseteq f(B)$ و تنها داریم $g(a) \in f(B)$. با توجه به فرض $As \not\subseteq p_A(P)$، پس عضو $a' \in A$ چنان موجود است که $a's \notin p_A(P)$. از این رو برای هر $b \in B$ داریم

$$g(a')s = g(a's) \ne f(b).$$

در نتیجه عضو $c = g(a') \in C$ چنان موجود است که برای هر $b \in B$ داریم $cs \ne f(b)$. بنابراین $Cs \not\subseteq f(B)$ و حالت دیگر ما برقرار است یعنی $g(a) \in f(B)$. با توجه به تعریف P، یک عضو $b \in B$ چنان موجود است که $g(a) = f(b)$ و

$(a,b) \in P$. در نتیجه $a \in p_A(P)$. □

۴- انژکتیوی اول مرتب منظم

هم اکنون با توجه به رده تمام S- تکریختی‌های مرتب جزیی اول مرتب منظم مفهوم انژکتیوی اول مرتب منظم را برای یک S- سیستم مرتب جزیی بیان و برخی از خواص آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱-۴) الف) یک S- سیستم مرتب جزیی A را انژکتیو اول مرتب منظم گوییم، هرگاه برای هر S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب $g : B \to C$، هر S- همریختی مرتب جزیی $f : B \to A$ قابل توسیع دادن به یک همریختی $\bar{f}: C \to A$ باشد به طوری که $\bar{f}g = f$.

ب) یک S- سیستم مرتب جزیی A را انژکتیو اول مرتب منظم ضعیف گوییم، هرگاه انژکتیو منظم نسبت به تمام نشانندههای مرتب جزیی از تمام ایده‌آل‌های اول مرتب به توی S باشد.

ج) یک S- سیستم مرتب جزیی A را انژکتیو اول مرتب منظم متناهی تولید شده (اصلی) گوییم، هرگاه برای هر S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب $g : F \to C$ از یک S – سیستم مرتب جزیی متناهی تولید شده (دوری) F به S – سیستم مرتب جزیی C، هر S- همریختی مرتب جزیی $f : F \to A$ قابل توسیع دادن به یک همریختی $h: C \to A$ باشد به طوری که $hg = f$.

د) یک S- سیستم مرتب جزیی A را انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزیی متناهی تولید شده (اصلی) گوییم، هرگاه هر S- همریختی مرتب جزیی $f: I \to A$ از یک ایده‌آل مرتب جزیی متناهی تولید شده (اصلی) I به S، قابل توسیع دادن به یک S – همریختی از S به A باشد.

این تعاریف را در حد یکریختی این‌گونه می‌توان نوشت که به جای هر S- سیستم مرتب جزیی، S- سیستم مرتب جزیی یکریخت با آن را به کار برد. یعنی می‌توانیم تفاوتی بین یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب منظم بین دو S- سیستم مرتب جزیی و یک توسیع اول مرتب قایل نباشیم. درنتیجه در ادامه لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۲ – ۴) یک S- سیستم مرتب جزیی A انژکتیو اول مرتب منظم است اگر و تنها اگر برای هر S- سیستم مرتب جزیی C و زیر S- سیستم مرتب جزیی B از C و هر S - همریختی مرتب جزیی $f: B \to A$، S- همریختی $\bar{f}: C \to A$ چنان موجود است که $\bar{f}|_B = f$.

قضیه ۳ – ۴) یک S- سیستم مرتب جزیی A انژکتیو اول مرتب منظم است اگر و تنها اگر یک درونبر از هر توسیع اول مرتبش باشد.

اثبات: فرض کنید A انژکتیو اول مرتب منظم باشد. نمودار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

به طوری که $f : A \to B$ یک نشاننده مرتب جزیی اول مرتب است. در این صورت چون A انژکتیو اول مرتب منظم است، پس یک S- همریختی مرتب جزیی $\overline{\mathrm{id}} : B \to A$ چنان موجود است که $\overline{\mathrm{id}}\, f = \mathrm{id}_A$. این نشان می‌دهد که $\overline{\mathrm{id}}$ یک درونبری از f است. برای عکس قضیه، نمودار زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \\ A & \end{tikzcd}$$

به طوری که f یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب است که می‌تواند به صورت نمودار جابجایی زیر کامل شود،

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "k"'] & Q \end{tikzcd}$$

به طوری که Q جلوبر $(B,(f,g))$ است. با توجه به قضیه ۱۰-۳، چون f یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب است، پس k نیز یک S- تکریختی مرتب جزیی اول مرتب است. طبق فرض درونبری $\bar{k} : Q \to A$ چنان موجود است که $k\bar{k} = id_A$. اکنون قرار دهید $\bar{g} = k\bar{h} : C \to A$ که نمودار را جابجایی می‌کند. بنابراین A انژکتیو اول مرتب منظم است. □

گزاره ۴ - ۴) هر ایده‌آل مرتب جزیی I از تکواره مرتب جزیی S که انژکتیو اول مرتب منظم باشد یک ایده‌آل مرتب جزیی دوری است که توسط یک عضو پوچ‌توان تولید می‌شود.

اثبات: نشانده مرتب اول مرتب $g : I \to S$ را در نظر بگیرید. چون I انژکتیو اول مرتب منظم است S- همریختی $id : I \to I$ می‌تواند به S- همریختی $\overline{id} : S \to I$ توسیع داده شود. در نتیجه می‌توان ادعا کرد که I یک ایده‌آل مرتب جزیی تولید شده توسط عضو خوتوان $\overline{id}\,(1)$ می‌باشد. توجه کنید که $\overline{id}\,(1) \in I$ داریم:

$$\overline{id}(1)\,\overline{id}\,(1) = \overline{id}\left(1\,\overline{id}\,(1)\right) = \overline{id}\left(\overline{id}\,(1)\right) = \overline{id}\,(1).$$

و برای هر $s \in I$ داریم

$$s = \overline{id}\,(s) = \overline{id}(1s) = \overline{id}(1)s$$

قضیه ۵- ۴) هر S- سیستم مرتب جزیی انژکتیو اول مرتب منظم کراندار بین دو عضو ثابت است.

اثبات: فرض کنید A یک S- سیستم مرتب جزیی انژکتیو اول مرتب منظم و همچنین زیر S- سیستم مرتب جزیی از S- سیستم مرتب جزیی

$B = A \cup \{\theta_1\} \cup \{\theta_2\}$

باشد که عضوهای صفر θ_1 و θ_2 به A به طوری الصاق شده اند که برای هر $a \in A$ داریم $\theta_1 \leqslant a \leqslant \theta_2$.

نشان می‌دهیم B یک توسیع اول مرتبی از A است. فرض کنید برای هر $s \in S$ و برای هر $b \in B\setminus A = \{\theta_1\} \cup \{\theta_2\}$ داشته باشیم $bSs \subseteq \downarrow A \cap \uparrow A$. اگر b به ترتیب برابر با θ_1 یا θ_2 باشد، آن‌گاه به ترتیب داریم

$bSs = \{\theta_1\} \not\subseteq \downarrow A \cap \uparrow A$ یا

$bSs = \{\theta_2\} \not\subseteq \downarrow A \cap \uparrow A$.

چون زمانی که $\theta_1 \in \downarrow A$ داریم $\theta_1 \notin \uparrow A$ و همچنین زمانی که $\theta_2 \in \uparrow A$ خواهیم داشت $\theta_2 \notin \downarrow A$ که در این صورت زیرمجموعه ای از $\downarrow A \cap \uparrow A$ نیست. در نتیجه A یک زیر S- سیستم مرتب جزیی از B است. چون A انژکتیو اول مرتب منظم است، پس S- همریختی درونبری $f : B \to A$ برای توسیع اول مرتب B از A موجود است. در این صورت عضوهای صفر $f(\theta_1)$ و $f(\theta_2)$ به ترتیب عضو ابتدا و انتهای A هستند. □

عکس قضیه ۵- ۴ در حالت‌های خاصی از انژکتیوی سیستم‌های مرتب جزیی در رده خاص تکریختی‌های منظم مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال انژکتیوی سیستم‌های مرتب جزیی در رده تکریختی‌های منظم بسته پایینی در قضیه ۲.۶ از [۱۰] را می توان مشاهده کرد. حال ما در اینجا این موضوع را برای سیستم‌های مرتب جزیی انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزیی روی گروه‌های مرتب جزیی در قضیه زیر بررسی می‌کنیم.

قضیه ۶- ۴) هر G- سیستم مرتب جزیی روی تکواره موتب جزیی G انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزیی است اگر و تنها اگر از بالا کراندار توسط یک عضو ثابت باشد.

اثبات: شرط لازم: با توجه به قضیه ۵- ۴ برقرار است. شرط کافی: فرض کنید G یک تکواره مرتب جزیی باشد و A یک G- سیستم مرتب جزیی از بالا کراندار توسط یک عضو ثابت T باشد. برای یک

ایده‌آل مرتب جزیی و اول مرتب I از S تکریختی مرتب جزیی اول مرتب $g: I \to S$ را در نظر گرفته و همچنین فرض کنید $f: I \to A$ یک همریختی باشد. اکنون نگاشت $\bar{f}$ را تعریف می‌کنیم که برای هر $s \notin I$، $\bar{f}(s) = \top$ و برای هر $s \in I$، $\bar{f}(s) = f(s)$. به وضوح $\bar{f}_{|I} = f$. اکنون نشان می‌دهیم که این همریختی حافظ تــرتیـــب اســت. یعنی اگر $s \leq s'$، آن‌گاه $\bar{f}(s) \leq \bar{f}(s')$. ســه حالــت پیش خواهـــد آمـــد.

حالت اول: فرض کنید $s \leq s'$ و $s, s' \in I$. در این حالت $\bar{f}(s) = f(s) = f(s') = \bar{f}(s')$.

حالت دوم: فرض کنید $s \leq s'$ و $s \in I, s' \notin I$. در این صورت داریم $\bar{f}(s) = f(s) \leq \top = \bar{f}(s')$.

و حالت سوم: فرض کنید $s \leq s'$ و $s \notin I, s' \in I$. که این حالت امکان پذیر نیست چون با اینکه I یک ایده‌آل مرتب جزیی است تناقض دارد و باید s عضوی از I باشد. اکنون کافی است نشان دهیم $\bar{f}$ حافظ عمل است یعنی برای هر $s, t \in S$ داریم $\bar{f}(st) = \bar{f}(s)t$. فرض کنید $st \in I$. چون I یک ایده‌آل است، پس $s = stt^{-1} \in I$. در نتیجه می‌توان گفت $\bar{f}(st) = f(st) = f(s)t = \bar{f}(s)t$ اکنون فرض کنید که $st \notin I$. چون I یک ایده‌آل است، پس $s \notin I$. در نتیجه

$$\bar{f}(st) = \top = \top t = \bar{f}(s)t.$$

بنابراین نمودار زیر جابجایی است و A یک G-سیستم انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزیی است.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[dl, dotted, "\bar{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

فهرست منابع

[1] L. Shahbaz, M. Mahmoudi, Injectivity with respect to down closed regular monomorphisms, Semigroup Forum, 91 (3):584-600 (2015)

[2] S. Bulman-Fleming, M. Mahmoudi, The category of S-posets, Semigroup Forum 71(3):443-461 (2005)

[3] X, Shi. On flatness properties of cyclic S-posets, Semigroup Forum, 77:248-266 (2008)

[4] A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups I, II, Providence, (1961, 1967)

[5] J. Dauns, Prime modules, Journal für die Reine und Agnewantte Mathematik, 298:156-181 (1978)

[6] J. Ahsan, L. Zhongkui, Prime and semiprime acts over monoids with zero, Mathematical Journal of Ibaraki University. 33:9-15 (2001)

[7] B. Banaschewski, Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras, Queens Papers in Pure and Applied Mathematics, 25:131-147 (1970)

[8] M. Kilp, U. Knauer, A. Mikhalev, Monoids, Acts and Categories, Walter deGruyter, Berlin, (2000)

[9] H. Rasouli, Categorical Properties of Regular Monomorphisms of S-posets, European Journal of Pure Applied Mathematics. 7(2):166-178 (2014)

[10] F. Farsad, A. Madanshekaf, On unitary down-closed monomorphisms of pomonoid actions. Quaestiones Mathematicae 1-11 (2017)