دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

ارائه یک روش دو مرحله‌ای برای تعیین الگوی مناسب و بازده به مقیاس (مطالعه موردی: دبیرستان‌های دخترانه ناحیه یک شهرستان شیراز)

جواد گرامی *

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۳/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۳/۲۳

چکیده

در این مقاله به ارائه یک روش دو مرحله‌ای برای تعیین الگوی مناسب و بازده به مقیاس مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم گیرنده می‌پردازیم. در ابتدا به یافتن همه مجموعه‌های مرجع کارا در تحلیل پوششی داده‌ها غیرشعاعی بر پایه برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم. ابتدا مدل بازه تعدیل شده غیر شعاعی را معرفی کرده و واحدها را با استفاده از این مدل ارزیابی می‌کنیم. سپس برای اجرای الگوریتم مورد نظر مراحل زیر را انجام می‌دهیم. در گام اول به معرفی سه نوع مجموعه مرجع می‌پردازیم و در گام دوم برای شناسایی همه مجموعه‌های مرجع ممکن برای یک واحد تصمیم‌گیرنده یک مسئله برنامه‌ریزی خطی منحصر به فرد که بر پایه روش اولیه- دوگانه می‌باشد، پیشنهاد می‌کنیم. در گام سوم بازده به مقیاس را در مدل تحلیل پوششی داده‌ها ی غیر شعاعی اندازه‌گیری می‌نماییم. در انتها برای نشان دادن کاربردی بودن این روش به ارزیابی و تحلیل کارایی دبیرستان‌های دخترانه ناحیه یک شهر شیراز می‌پردازیم و الگوی مناسب و بازده به مقیاس را برای این مجموعه از واحدهای تصمیم گیرنده ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، الگویابی، بازده به مقیاس، مجموعه مرجع کلی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: geramijavad@gmail.com

۱- مقدمه

استفاده مطلوب و بهین از منابع در دسترس بشر، همواره مورد نظر او بوده است. محدودیت‌های عواملی چون سرمایه، نیروی انسانی، انرژی و... مدیران را به فکر پیدا کردن روشی برای استفاده بهین از این عوامل وا داشت. در حقیقت اطلاع از عملکرد واحدهای تحت نظارت مدیر، مهمترین وظیفه مدیریت در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب، به منظور هدایت آنان است. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد داده‌ها، اثرات عوامل بیرونی، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب (مثلاً به دلیل دولتی بودن واحدها و...) از عواملی است که مدیر بدون برخورد علمی نمی‌تواند از کارکرد واحدها مطلع شود. لذا مدیر باید تصمیمات مناسبی را در راستای بهبود کارآیی واثر بخشی[1] اتخاذ نماید. ارزیابی عملکرد سازمان‌ها در جهت‌گیری برای تصمیمات مدیریتی آنها نقش اساسی دارد. در این راستا می‌بایست میزان کارآیی و بهره‌وری سازمان‌ها مورد محاسبه قرار گیرد تا از این طریق بتوان در تصمیم‌گیری‌های آتی روند رشد اقتصادی را نیز در نظر داشت. در عصر حاضر دستیابی به رشد اقتصادی از طریق ارتقاء بهره‌وری از مهم‌ترین اهداف کشورها به شمار می‌رود. ارتقاء بهره‌وری با استفاده از عوامل تولید حاصل می‌گردد و در نیل به رشد اقتصادی مستمر بر تولید پایدار نقش مهمی ایفا می‌کند. کارایی نشان می‌دهد که یک سازمان تا چه میزان از داده‌های ورودی خود به طور بهینه در جهت تولید خروجی‌ها استفاده کرده است و به عبارتی نشان دهنده «صحیح انجام دادن کار» است به این معنی که از حداقل ورودی‌ها، حداکثر خروجی‌ها بدست آید.

تحلیل پوششی داده‌ها از مجموعه مدل‌های ریاضی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی است که به مثابه ابزار قوی، یاری رسان مدیران سازمان‌ها است. تحلیل پوششی داده‌ها با اندازه‌گیری کارآیی نسبی سازمان‌ها، آنها را رتبه‌بندی کرده و سپس با مشخص کردن نقاط ضعف و قوت هر کدام، پیشنهادهایی برای بهبود هر سازمان ارائه می‌کند (مهرگان[1]).

تحلیل پوششی داده‌ها DEA[2] که توسط چارنز، [2] و چارنز،کوپر،رودز [3] بر اساس کار اثر گذار فارل [4]، معرفی شد، روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی(LP) برای اندازه‌گیری کارآیی نسبی یک گروه همگن از واحدهای تصمیم گیرنده (DMU)[3] با چند ورودی و چند خروجی است.

بر اساس داده‌های مشاهده شده و مجموعه‌ای از اصول موضوعه، DEA یک مجموعه امکان تولید مرجع که نسبت به آن یک DMU می‌تواند به عنوان کارا یا ناکارا طبقه‌بندی شود، را تعریف می‌کند. برای DMU ناکارا، DEA یک تصویر منحصر به فرد یا تصویرهای چندگانه در مرز کارا از مجموعه‌ی امکان تولید به رسمیت می‌شناسد. متناظر با هرتصویر، همچنین مجموعه‌ای از DMUهای کارای مشاهده شده به غیر از آن DMU کارآیی که به طور مستقیم با مورد تحت ارزیابی مقایسه شده‌است را شناسایی می‌کند. آن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا، DMUهای مرجع نامیده می‌شوند و مجموعه مربوطه به عنوان یک مرجع درنظر گرفته می‌شود. شناسایی همه DMUهای مرجع محتمل برای یک واحد ناکارا مسئله مهم و جالب توجه در DEA می‌باشد، که در این مقاله برای شناسایی مجموعه مرجع از مدل RAM[4] استفاده کرده‌ایم (کوپر و همکاران [5]). از نقطه نظر مدیریتی در این دیدگاه، شناسایی همه واحدهای مرجع به طور خاص به دو دلیل مهم است. ابتدا، برای بهبود عملکرد یک DMU ناکارا، معرفی یک تصویر مشاهده نشده (مجازی) در عمل به عنوان معیار، منطقی نیست. در چنین موقعیتی، شناسایی همه مجموعه‌های مرجع، امکان یافتن یک معیار عملی از بین DMUهای مرجع را فراهم می‌کند. دوم، زمانی که برخی ازDMUهای مرجع (نه همه) برای یک واحد تحت ارزیابی شناسایی می‌شوند، تصمیم‌گیرنده ممکن است معتقد باشد که واحدهای تصمیم‌گیرنده مشخص‌شده دارای معیار مناسبی نیستند و مایل به انتخاب گزینه‌های بیشتری است. تلاش اولیه برای پیداکردن همه واحدهای مرجع در مدل‌های

1. Effectiveness

2. Data Envelopment analysis
3. Decision Making Unit
4. non-radial range-adjusted model

DEA غیر شعاعی توسط (سویوشی وسکیتانی [6]) انجام شد. براساس قضیه مکمل زائد (SCSCs)[1] ازبرنامه‌ریزی خطی، آنها یک روش مبتنی بر اولیه–دوگان با استفاده از مدل RAM پیشنهاد کردند. با این‌حال همانطور که کریونوسکو، فورسوند و لایچیو [7] استدلال کرده‌اند، نه تنها بار محاسباتی رویکرد سویوشی و سکیتانی [8] بالا می‌باشد، همچنین به نظرمی‌رسد که ماتریس‌های پایه تعریف شده در این رویکرد به احتمال زیاد نا مطلوب بوده، منجر به نتایج نادرست و غیرقابل قبول می‌شود. از این رو تفسیر اقتصادی برخی از محدودیت های مدل پیشنهادی بی‌معنی است، برای غلبه بر این مشکلات، کریونوسکوو همکارانش [9] یک روش مبتنی بر اولیه–دوگان بر اساس حل مسائل LP مختلف پیشنهاد کرده‌اند. با استفاده از آزمایش‌های محاسباتی، آنها نشان دادند که روش پیشنهادی، در مجموعه داده‌های زندگی واقعی، قابل اعتماد و کارآمد است و بهتر از رویکرد سویوشی و سکیتانی [8] کار می‌کند.

شایان ذکر است که روش انجام شده توسط سویوشی و سکیتانی [8] و کریونوسکوو همکاران، [9] دقیقاً تمام DMUهای مشاهده شده را روی وجه می‌نیمم–یک وجه از بعد می‌نیمم که همه‌ی تصاویر درآن واقع شده است، به عنوان یک مجموعه مرجع منحصر به فرد از DMU بنا می‌کند. از سوی دیگر هر دو این مطالعات به امکان وقوع مجموعه‌های مرجع چندگانه اشاره کرده‌اند. با این حال، هیچ یک از آنها به صراحت تمایز روشنی بین مجموعه مرجع منحصر به فرد ساخته شده و سایر انواع مرجع تعیین شده که ممکن است چندگانه، رخ دهند را پیدا نکرده‌اند. این عدم تبعیض، در مورد منحصر به فردی و در نتیجه، در مورد خوش تعریفی تعیین مجموعه‌ی مرجع، ابهام ایجاد می‌کند.

بنابراین، برای از بین بردن این ابهام، سه نوع از مجموعه مرجع پی در پی را پیشنهاد کرده‌ایم، به عنوان اولین قدم، در ارتباط با تصویر داده شده، برای اولین بار مفهوم مجموعه مرجع یگانی (URS)[2] را معرفی می‌کنیم. این مجموعه شامل واحدهای تصمیم گیرنده کارآیی می‌باشد که درترکیب محدب خاص تولیدکننده این تصویر فعال هستند. از آنجا که ممکن است URSهای چندگانه (از این پس به عنوان مسئله نوع ۱ نامیده می‌شود.) رخ دهد، مفهوم مجموعه‌ی مرجع ماکزیمال (MRS)[3] را معرفی می‌کنیم وآن را به عنوان اجتماع همه URSهای مرتبط با تصویر ارائه شده تعیین می‌کنیم. چون در مدل RAM امکان وقوع تصویرهای متعدد (از این پس به عنوان مسئله نوع ۲ نامیده می‌شود)، وجود دارد، اجتماع همه MRSهای مرتبط با همه این تصاویر را به عنوان مجموعه مرجع کلی منحصر به فرد (GRS)[4] مربوط به DMU ارزیابی شده، تعریف می‌کنیم. یک نکته جالب اینکه: پوسته محدب[5] GRS با وجه می‌نیمم برابر است.

مزایای معرفی سه نوع مجموعه مرجع (GRS, MRS, URS) در زیر خلاصه شده است.

- مفاهیم معرفی شده همه خوش تعریف هستند.
- URS و MRS به نشان دادن وقوع مجموعه‌های مرجع چندگانه، به ترتیب متناظر با یک تصویر یا تصویرهای متعدد کمک می‌کند.
- درحالیکه ممکن است چندگانگی برای URS و MRS رخ دهد، GRS مجموعه‌ی مرجع منحصر به فردی که شامل تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده مرجع محتمل می‌باشد را ارائه می‌دهد.

به عنوان قدم دوم، یک مدل LP پیشنهاد داده‌ایم که GRS را شناسایی می‌کند و تصویری در درون نسبی وجه مینیمم به دست می‌آورد. این روش دارای چندین ویژگی مهم است.

اول می‌تواند به طور موثری، همزمان به وقوع مسئله‌های نوع ۱و ۲ رسیدگی کند.

دوم، این روش شامل حل یک مسئله LP منحصر بفرد است که باعث می‌شود بخاطر اجرای آسان آن در کاربردهای عملی کارآمدتر از روش‌های موجود باشد.

سوم، کارآیی محاسباتی این روش نسبت به اولیه – دوگان های قبلی بالاتر است، زیرا بر اساس فرم اولیه

1. Strong Complementary Slackness Conditions(SCSCs)
2. Unary Reference Set
3. Maximal Reference Set
4. Global Reference Set
5. Conv(GRS)

(پوششی) ایجاد شده است که از نظر محاسباتی کارامدتر از فرم‌های دوگان (چندگانه) می‌باشد، (کوپر و همکاران [10]) چهارم، از آنجایی که مسئله LP پیشنهادی، شامل چندین متغیربا کران بالا می‌باشد، کارآیی محاسباتی آن می‌تواند با استفاده از الگوریتم سیمپلکس طراحی شده برای حل مسائل LP با متغیر های کران بالا افزایش یابد، که بسیار کارآمدتر از الگوریتم سیمپلکس عادی می‌باشد، (وینستون [11]).

پنجم، این روش می‌تواند به آسانی و بدون هیچ گونه تغییر، در مدل جمعی (چارنز و همکاران [12]) استفاده شود. زیرا تفاوت بین این مدل و مدل RAM تنها در وزن‌های اختصاص یافته به اسلک‌های ورودی و خروجی در تابع هدف، می‌باشد. با برخی تغییرات جزئی می‌توان از این روش در مدل RAM/BCC (آیدا، کوپر، پاستور وسویوشی [13])، مدل DSMB از جهانشاهلو، حسین زاده لطفی، مهدیلوزاد و رشدی [14] و مدل GMDDF از مهدیلوزاد، ساهو و رشدی [15] استفاده کرد.

به علاوه، این روش می‌تواند به راحتی در هر مدل شعاعی DEA مانند مدل BCC از (بنکر و همکاران [16]) البته با برخی تغییرات جزئی اجرا گردد. در نهایت این روش از فرض این محدودیت که داده‌های ورودی - خروجی باید نامنفی باشند، آزاد است، پس می‌تواند به طور موثری به داده‌های منفی رسیدگی نماید. این کار می‌تواند از نقطه نظر عملی بسیار سودمند باشد. چرا که در بسیاری از برنامه‌های کاربردی، ورودی و یا خروجی‌های منفی می‌توانند ظاهر شوند. برای مثال می‌توان به مقالات پژوهشی پاستور و رویز [17] برای ارائه مثالهای مختلفی از کاربردهای این روش با داده‌های منفی اشاره کرد.

قدم سوم در این مطالعه، اندازه‌گیری RTS درتنظیمات DEA غیر شعاعی است. چنانچه می‌دانیم، مفهوم RTS تنها زمانی معنی‌دار است که DMU مربوطه در مرز مجموعه‌ی امکان تولید، قرار گیرد. بنابراین، برای یک DMU ناکارا، بایستی تصویر کارآیی در نظر گرفته شود. در این مورد، نوع و مقدار RTS از طریق موقعیت(های) ابر صفحه(های) تکیه کننده مجموعه امکان تولید در تصویر مورد استفاده، تعیین می‌شود. ابرصفحه‌های تکیه کننده از MRS مربوط به این تصویر عبور می‌کنند و می‌توانند از لحاظ ریاضی از طریق این MRS مشخص گردند. بنابراین، مسئله نوع ۲ باعث وقوع ابرصفحه‌های تکیه کننده چندگانه می‌شود (از این به بعد به عنوان مسئله نوع ۳ نامیده می‌شود.) که اندازه‌گیری RTS را مشکل می‌سازد. چنین مشکلی می‌تواند به طور مناسب با استفاده از یک نقطه درونی نسبی از وجه می‌نیمم برای اندازه‌گیری RTS رفع شود. چون ابرصفحه‌های تکیه کننده متصل به این نقطه از طریق GRS و نه از طریق یک MRS خاص مشخص می‌شوند. با این وجود منحصر به فرد بودن ابرصفحه‌های تکیه کننده مشخص شده، هنوز نمی‌توانند تضمین شوند، چرا که وجه می‌نیمم ممکن است یک وجه کارا از بعد کامل نباشد، (اولسن و پترسن [18]، اولسن و پترسن [19]). در مجموع مشکل ناشی شده از مسئله نوع ۳ در اندازه‌گیری RTS، از مسئله نوع ۲ و یا از کامل نبودن بعد وجه می‌نیمم نشأت می‌گیرد. برای رسیدگی به این مشکل، یک روش دو مرحله‌ای برای اندازه‌گیری RTS را با استفاده از مطالعه قوی کریونوسکو و همکارانش [9] ایجاد کردیم. در مرحله اول مشکل ناشی از مسئله نوع ۲ را با پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی از وجه می‌نیمم از طریق مسئله LP که برای شناسایی GRS پیشنهاد شده، حل می‌کنیم. سپس برای نقطه بدست‌آمده، از روش غیر مستقیم بنکر– ترال و همکاران [20] استفاده می‌کنیم.

ادامه این مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است، در بخش دوم مفاهیم اولیه مقاله را تشریح می‌کنیم. در بخش سوم به معرفی و تعیین مجموعه مرجع کلی در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در بخش چهارم روش پیشنهادی دو مرحله‌ای برای تعیین بازده به مقیاس را ارائه می‌دهیم. در بخش پنجم به ارزیابی و تعیین الگو و بازده به مقیاس مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده شامل دبیرستان‌های دخترانه شهرستان شیراز می‌پردازیم و در انتها نتایج حاصل از تحقیق را ارائه می‌دهیم.

۲- مفاهیم اولیه

n واحد تصمیم‌گیرنده $\{(X_j,Y_j)|j\in J=\{1,...,n\}\}$ را درنظر بگیرید که در آن $X_j=(x_{1j},x_{2j},...,x_{mj})\in R^m_{\geq 0}$

و $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, ..., y_{sj}) \in R^s_{\geq 0}$ بردار مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های $DMU_j, j = 1,...,n$ باشند و $X_j \geq 0$، $X_j \neq 0$ و $Y_j \geq 0$، $Y_j \neq 0$. مجموعه امکان تولید که آن را با T نمایش می‌دهیم چنین تعریف می‌شود:

$$T = \left\{ (X, Y) \middle| \begin{array}{c} \text{خروجی Y بتواند} \\ \text{توسط ورودی X تولید شود} \end{array} \right\}$$

تعریف فوق با توجه به تکنولوژی تولید، مجموعه امکان تولید را مشخص می‌کند. با پذیرش اصل بازده به مقیاس، متغیر مجموعه امکان تولید T به صورت زیر خواهد بود:

$$T_{VRS}^{DEA} = \left\{ (X, Y) \in R_{\geq 0}^{m+s} \middle| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq X \right.$$
$$\& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq Y_j \ \& \qquad (۱)$$
$$\left. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}$$

آن را با T_V نشان می‌دهند. (بنکر و همکاران [16]).

۲-۱- مدل BCC با ماهیت ورودی

فرض کنید واحد تحت ارزیابی DMU_o است. در ماهیت ورودی به دنبال ترکیب محدبی از DMUها هستیم به طوری که همان خروجی را با حداقل ورودی ممکن تولید کند. مدل ماهیت ورودی BCC با توجه به تعریف T_{VRS}^{DEA} در فرم پوششی بصورت زیر ارائه گردید.(بنکر و همکاران [16]).

$$\begin{aligned} Min \quad & \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{m} s_r^+ \right) \\ St. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, \ i = 1,...,m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \ r = 1,...,s \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \ j = 1,...,n, \\ & i = 1,...,m, \ r = 1,...,s. \end{aligned} \qquad (۲)$$

مدل ماهیت ورودی BCC در فرم مضربی به صورت زیر است، (بنکر و همکاران[16]).

$$\begin{aligned} Max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} - u_0 \\ S.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \\ & + u_o \leq 0, j = 1,\ldots,n, \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\ & u_r \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s, \\ & v_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,m. \end{aligned} \qquad (۳)$$

۲-۲- مدل RAM

فرض کنید DMU_o واحد تحت ارزیابی باشد، مدل RAM با توجه به ساختار مجموعه T_{VRS}^{DEA} به صورت زیر ارائه می‌گردد. (کوپر و همکاران [5]).

$$\rho_o = \min 1 - \frac{1}{m+s} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{R_r^+} \right\}$$

$$\begin{aligned} St. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}, \quad i = 1,...,m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1,...,s, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, j \in J, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i, r, \end{aligned} \qquad (۴)$$

که s_i^- (به ازای هر i) و s_r^+ (به ازای هر r) به ترتیب نشان‌دهنده ورودی هدر رفته i ام وکمبود خروجی rام می‌باشد. در اینجا R_i^- (به ازای هر i) و R_i^+ (به ازای هر r) به ترتیب دامنه‌های تعریف شده بوسیله کمترین و بیشترین مقادیر مشاهده شده در ورودی iام و خروجی rام می‌باشند.

$$\begin{aligned} R_i^- &= \max_{j \in J} \{x_{ij}\} - \min_{j \in J} \{x_{ij}\}, i = 1,...,m \\ R_r^+ &= \max_{j \in J} \{y_{ij}\} - \min_{j \in J} \{y_{ij}\}, r = 1,...,s. \end{aligned} \qquad (۵)$$

۲-۲-۱- تعریف RAM کارا

DMU_o، RAM کارا گفته می‌شود اگر و تنها اگر، $\rho_o = 1$ و همه اسلک‌ها در بهینگی مدل (۴) صفر باشند، (براکت و همکاران [21]). اگر $(\lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ جواب بهینه مدل (۴) باشد، آنگاه تصویر DMU_o به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = (\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (x_o - s^{-*}, y_o + s^{+*}) = \sum_{j \in J} \lambda_j \left(x_j, y_j\right) \quad (۶)$$

این تصویر RAM کارا است.

۲-۳- بازده به مقیاس

بازده به مقیاس بیانگر پیوند بین تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های یک سیستم می‌باشد. یکی از توانایی‌های روش DEA، کاربرد الگوهای مختلف متناظر با بازده به مقیاس‌های متفاوت و همچنین اندازه‌گیری بازده به مقیاس واحدهاست.

الف- بازده به مقیاس ثابت: یعنی هر مضربی از ورودی‌ها همان مضرب از خروجی‌ها را تولید می‌کند. الگوی CCR بازده به مقیاس واحدها را ثابت فرض می‌کند. بنابراین واحدهای کوچک و بزرگ با هم مقایسه می‌شوند.

ب- بازده به مقیاس متغیر: یعنی هر مضربی از ورودی‌ها، می‌تواند همان مضرب از خروجی‌ها یا کمتر از آن و یا بیشتر از آن را، در خروجی‌ها تولید کند. الگوی BCC بازده به مقیاس را متغیر فرض می‌کند، (بنکر و ترال [20])

۲-۳-۱- بازده به مقیاس از دید بنکر:

برای تعیین بازده به مقیاس با استفاده از مدل مضربی BCC در ابتدا این مدل (۳) را حل می‌کنیم. برای تعیین بازده به مقیاس قضیه زیر را داریم.(ببینید: تن [22])

قضیه ۱: فرض می‌کنیم که (x_o, y_o) یک DMU روی مرز کارای T_{VRS}^{DEA} باشد و (U^*, V^*, u_o^*) جواب بهینه مدل (۳) باشد:

الف) (x_o, y_o) بازده به مقیاس ثابت دارد اگر و تنها اگر $u_o^* = 0$ در یکی از جوابهای بهینه مدل (۳) در ارزیابی (x_o, y_o).

ب) (x_o, y_o) بازده به مقیاس افزایشی دارد اگر و تنها اگر $u_o^* < 0$ در تمام جواب‌های بهینه مدل (۳) در ارزیابی (x_o, y_o).

ب) (x_o, y_o) بازده به مقیاس کاهشی دارد اگر و تنها اگر $u_o^* > 0$ در تمام جواب‌های بهینه مدل (۳) در ارزیابی (x_o, y_o).

در صورتی که در ارزیابی (x_o, y_o) جواب بهینه منحصر به فرد نباشد، برای تعیین کلاس بازده به مقیاس در ابتدا مقادیر u^+ و u^- (مقادیر حداکثر و حداقل u_o با توجه به مجموعه جواب‌های بهینه مدل (۳)) را تعیین می‌کنیم. برای تعیین بازده به مقیاس قضیه زیر را داریم. (ببینید: تن [22])

قضیه۲: فرض می‌کنیم که (x_o, y_o) یک DMU روی مرز کارای T_{VRS}^{DEA} باشد و u^+ و u^- بترتیب مقادیر حداکثر و حداقل u_o با توجه به مجموعه جواب‌های بهینه مدل (۳) باشند، در اینصورت:

الف) (x_o, y_o) بازده به مقیاس ثابت دارد اگر و تنها اگر $u^- \le 0 \le u^+$.

ب) (x_o, y_o) بازده به مقیاس افزایشی دارد اگر و تنها اگر $u^+ < 0$.

پ) (x_o, y_o) بازده به مقیاس کاهشی دارد اگر و تنها اگر $u^- > 0$

تا به حال بازده به مقیاس واحدهایی بررسی شد که روی مرز قرار داشتند، یعنی متعلق به ∂T_v بودند. در اینجا فرض می‌کنیم که (x_o, y_o) یک DMU دلخواه از T_{VRS}^{DEA} باشد، ابتدا با بکار بردن مدل پوششی BCC ماهیت ورودی (x_o, y_o)را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. فرض کنید $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$، $\lambda^* = \left(\lambda^*_1, \lambda^*_2, \ldots, \lambda^*_n\right)$، $s^{-*} = \left(s_1^{-*}, s_2^{-*}, \ldots, s_m^{-*}\right)$، $s^{+*} = \left(s_1^{+*}, s_2^{+*}, \ldots, s_s^{+*}\right)$ جواب بهینه مدل فوق باشد، تصویر واحد تصمیم‌گیرنده (x_o, y_o) که روی مرز قرار دارد و آن را با P نشان می‌دهیم، به صورت زیر است.

$$\hat{X} = \theta^* X_o - s^{-*}$$

$$\hat{Y} = Y_o + s^{+*} \quad (۷)$$

در این حالت برای برای تعیین کلاس بازده به مقیاس قضایای بالا را برای تصویرواحد تصمیم‌گیرنده (x_o, y_o) یعنی $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ که روی مرز قرار دارد و کارا می‌باشد، بکار می‌بریم و کلاس بازده به مقیاس را تعیین می‌کنیم.

۳- شناسایی مجموعه مرجع کلی

در این قسمت به ارائه بحث و تعاریف کلیدی، مفاهیم و نتایجی که برای شرح و توضیح روش پیشنهادی ضروری است می‌پردازیم.

۳-۱- تعریف URS

ابتدا هر واحد تصمیم‌گیرنده را به کمک مدل RAM ارزیابی می‌کنیم. این واحد کارا یا ناکارا ارزیابی می‌شود. اگر کارا باشد، بدین معنی است که وضعیت فعلی آن واحد خوب است و اگر واحد ناکارا باشد باید از واحدهای کارا الگوبرداری کند و وضعیت خود را بهبود دهد. فرض کنیم واحد DMUo ناکارا باشد. برای الگوبرداری از واحدهای کارا ابتدا این DMUo را بر مجموعه امکان تولید تصویر می‌کنیم. این تصویر را می‌توان به صورت ترکیب محدب چندگانه از DMUهای مرجع نوشت که آن مجموعه‌های مرجع URSهای تصویر مورد نظر می‌باشند. بنابراین اگر فرض کنیم $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ جواب بهینه مدل (۴) متناظر با تصویر بدست آمده در ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده (x_o, y_o) باشد، مجموعه DMUها با λ_j^* مثبت را به عنوان مجموعه مرجع یگانی (URS) برای DMUo به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و آن را با R_{op}^* نشان می‌دهیم.

$$R_{oP}^* = \{DMU_j \,|\, \lambda_j^* > 0\}.$$

هر کدام از اعضای R_{oP}^* را به عنوان یک DMU مرجع برای DMUo تعیین می‌نماییم. تمام واحدهای مرجع DMUo، RAM کارا می‌باشند و بر روی ابرصفحه‌های تکیه کننده T_{VRS}^{DEA} واقع شده‌اند. از آنجایی‌که تصویر P بدست آمده ممکن است به صورت ترکیب محدب چندگانه از DMUهای مرجع مربوط به خودش نشان داده‌شود، احتمال وقوع مقادیر بهینه چندگانه برای بردار λ که منجر به ایجاد URSهای چندگانه (از این بعد آن را مسئله نوع۱ می‌نامیم) می‌شود، وجود دارد. در این شرایط محاسبه بازده به مقیاس از طریق روش تن [23] دشوار و پیچیده می‌باشد. برای رفع مشکل وقوع URSهای چندگانه برای تصویر P داده‌شده، به توصیف مجموعه مرجعی شامل همه URSهای ممکن احتیاج داریم.

۳-۲- تعریف MRS

در قسمت قبل برای نقطه تصویر P هر URSای که می‌توانست امکان‌پذیر باشد را پیدا کردیم. حال اجتماع همه URSهای مربوط به تصویر P داده شده را به عنوان مجموعه مرجع ماکزیمال (MRS) برای DMUo تعریف می‌کنیم و آن را با R_{oP}^M نمایش می‌دهیم.

$$R_{oP}^M = \{\, DMU_j | \lambda_j^* > 0, \text{ در بعضی از جواب‌های بهینه مدل (۴) مرتبط با تصویر P}\} \quad (۸)$$

از آنجایی که مدل RAM ماهیت غیر شعاعی دارد، ممکن است تصویرهای چندگانه برای DMU_O تولید کند، که منتج به وقوع MRSهای چندگانه (که از این به بعد آن را مسئله نوع ۲ می‌نامیم) می‌شود.

برای حل مشکل وقوع MRSهای چندگانه، از مفهوم وجه می‌نیمم استفاده می‌کنیم. ابتدا، مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه مدل (۴) با نام Ω_o را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به اینصورت که J_E مجموعه اندیس همه DMUهای RAM کارا می‌باشد.

در اینصورت مجموعه همه تصویرهای DMU_O، به عنوان مجموع تصویر را می‌توان به صورت مجموعه Λ_o نشان داد.

همانگونه که توسط کریونوسکو و همکاران [9] ثابت شده است، وجهی از بعد می‌نیمم مانند Γ_o^{min}، وجود دارد که شامل مجموعه تصویر Λ_o می‌باشد. این وجه همان وجه می‌نیمم است و در حقیقت فصل مشترک تمام وجه‌های T_{VRS}^{DEA} است که شامل Λ_o می‌باشد.

$$\Omega_0=\left\{(\lambda,s^-,s^+)\;\middle|\;\begin{array}{l}\sum_{j\in J_E}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=x_{io},\\ i=1,\dots,m,\\ \sum_{j\in J_E}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{ro},\\ r=1,\dots,s,\\ \sum_{j\in J_E}\lambda_j=1,\\ \sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{R_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{R_r^+}=\\ (m+s)(1-\rho_0),\\ \lambda_j\ge 0, j\in J_E,\\ s_i^-,s_r^+\ge 0,\forall i,r,\end{array}\right\} \quad (۹)$$

$$\Lambda_o=\left\{(x_o-s^-,y_o+s^+)\;\middle|\;(\lambda,s^-,s^+)\in\Omega_o\right\}. \quad (۱۰)$$

$$\Gamma_o^{\min}=\bigcap_{\substack{F\,is\,a\,face\,of\,T_{VRS}^{DEA}\\ and\quad \Lambda_o\subseteq F}} F \quad (۱۱)$$

اکنون مفهوم بعدی که وقوع MRSهای چندگانه متناظر با تصویرهای چندگانه را مورد مطالعه قرار می‌دهد، معرفی می‌کنیم.

۳-۳- تعریف GRS

اجتماع همه‌ی MRSهای متناظر هر تصویر DMU_o را به عنوان مجموعه مرجع کلی آن (GRS) تعریف نموده و آن را با نماد R_o^G نشان می‌دهیم.

$$R_o^G=\bigcup_{p\in\Lambda_o} R_{op}^M \quad (۱۲)$$

مفهوم URS و MRS، متناظر با یک تصویر خاص در نظر گرفته می‌شود اما مفهوم GRS متناظر همه تصویرهای ممکن برای DMU_o می‌باشد. وقتی مدل RAM را حل می‌کنیم همیشه یک تصویر دلخواه و یک URS دلخواه تولید می‌کند. اما ما به دنبال یافتن همه مجموعه‌های مرجع ممکن برای DMU_o هستیم. بنابراین هدف ما یافتن راه حلی برای پیدا کردن GRS است.

قضیه۳: وجه می‌نیمم با پوسته محدب GRS برابر است با $\Gamma_o^{min}=conv(R_o^G)$

اثبات: همان طور که می‌دانیم، $conv(R_o^G)$ یک وجه قوی از T_{VRS}^{DEA} است که شامل Λ_o می‌باشد. بنابراین با توجه به تعریف $\Gamma_o^{\min}$ کافی است نشان دهیم $conv(R_o^G)\subseteq\Gamma_o^{\min}$. با توجه به تعریف وجه، یک ابر صفحه مانند $H^{\min}$ وجود دارد که $\Gamma_o^{\min}=H^{\min}\cap T_{VRS}^{DEA}$. از آن جا که $H^{\min}$ در هر تصویر فعال است، از همه DMUهای درون R_o^G می‌گذرد. در اینصورت، تحدب $H^{\min}$ نتیجه می‌دهد که $conv(R_o^G)\subseteq H^{\min}$ و اثبات را کامل می‌شود.□

با توجه به قضیه ۴ نمایش روشنی از وجه می‌نیمم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\Gamma_o^{\min}=\left\{\begin{array}{l}(x,y)\;\middle|\;x=\sum_{j\in J_o^G}\lambda_j x_j,\\ y=\sum_{j\in J_o^G}\lambda_j y_j,\ \sum_{j\in J_o^G}\lambda_j=1,\\ \lambda_j\ge 0,\forall j\in J_o^G\end{array}\right\}, \quad (۱۳)$$

جایی که $J_o^G\in J_E$ مجموعه اندیس DMUها در R_o^G می‌باشد. باید توجه داشت که وجه می‌نیمم یک چند سقفی می‌باشد.

با توجه به قضیه (۴) DMU_k یک واحد مرجع برای DMUo می‌باشد، اگر و فقط اگر $(\lambda,s^-,s^+)\in\Omega_o$ وجود داشته باشد به طوری که $\lambda_k>0$ با توجه به تعریف:

$$R_o^G=\bigcup_{(\lambda,s^-,s^+)\in\Omega_o}\left\{DMU_j\;\middle|\;\lambda_j>0\right\}$$

قضیه۴: اگر $(\lambda',s^{-\prime},s^{+\prime})$ متعلق به Ω_o باشد به طوریکه λ' دارای ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت است آنگاه،

$$R_o^G=\left\{DMU_j\;\middle|\;\lambda_j'>0\right\} \quad (۱۴)$$

اثبات: با فرض اینکه $(\lambda', s^{-'}, s^{+'}) \in \Omega_o$ باشد. از این رو از (۱۳) تنها کافی است ثابت کنیم $R_o^G \subseteq \{DMU_J | \lambda'_j > 0\}$ است که معادل است با این که نشان دهیم، λ مقادیر مثبت هر مؤلفه مثبت λ در هر $(\lambda, s^-, s^+) \in \Omega_O$ را می‌گیرد.

به روش برهان خلف، فرض کنید که یک عضو $(\lambda'', s^{-''}, s^{+''}) \in \Omega_O$ و یک اندیس $j_h \in \{j|\lambda''_j > 0\}$ که برای آن $\lambda''_{j_h} = 0$ وجود دارد: آن گاه فرض کنید که $(\hat{\lambda}, \hat{s}^-, \hat{s}^+) \in \Omega_O$ یک ترکیب محدب اکید از عناصر $(\lambda', s^{-'}, s^{+'}) \in \Omega_O$ و $(\lambda'', s^{-''}, s^{+''}) \in \Omega_O$ باشد. از آن جا که Ω_O محدب است، $(\hat{\lambda}, \hat{s}^-, \hat{s}^+) \in \Omega_O$ و $\{j|\lambda''_j > 0\} \cup \{j|\lambda'_j > 0\} = \{j|\widehat{\lambda_j} > 0\}$. در نتیجه $\{j|\lambda'_j > 0\} \subsetneq \{j|\widehat{\lambda_j} > 0\}$، که با فرض λ' ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت را دارد در تناقض است. بنابراین اثبات کامل است.

۳-۴- شناسایی مجموعه مرجع کلی

یک روش برای شناسایی کردن GRS در واقع یافتن عضوی به طور مثال $(\lambda', s^{-'}, s^{+'})$ از Ω_o می‌باشد، به طوریکه تعداد مؤلفه‌های مثبت λ' ماکزیمم باشد.

قضیه ۵: فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی از جواب‌های شدنی دستگاه معادلات ناهمگن زیر باشد.

$$Au + Bv = d, u \geq 0, v \geq 0, \qquad (۱۵)$$

اگر

$$(u_j{}^*, w_j{}^*, j = 1, \dots, q_1 + 1, , v_j{}^*, j = 1, \dots, q_2)$$

جواب بهینه برای مسئله (۱۶) باشد. آنگاه

$$(u'_j := \frac{u_j^* + w_j^*}{u_{q_1+1}^* + w_{q_1+1}^*}, j = 1, \dots, q_1,$$

$$v'_j := \frac{v_j^*}{u_{q_1+1}^* + w_{q_1+1}^*}, j = 1, \dots, q_2) \in X$$

و u' دارای ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت می‌باشد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{q_1+1} w_j \\ St. \quad & \sum_{j=1}^{q_1} a_j \left(u_j + w_j\right) + \sum_{j=1}^{q_2} b_j v_j \\ & - d \left(u_{q_1+1} + w_{q_1+1}\right) = 0, \qquad (۱۶) \\ & 0 \leq w_j \leq 1, u_j \geq 0, j = 1 \dots q_1 + 1, \\ & v_j \geq 0, j = 1, \dots, q_2. \end{aligned}$$

اثبات: فرض کنید $(u_j^* + w_j^*, j = 1, \dots, q_1 + 1, v_j^*, j = 1, \dots, q_2)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۱۶) باشد، این جواب، ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت را دارد. بنابراین با فرض $X \neq \phi$ ${u_{q_1+1}}^* + {w_{q_1+1}}^*$ مثبت است. در نتیجه محدودیت اول (۱۶) در بهینگی می‌تواند به صورت معادل زیر باز نویسی شود.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{q_1} a_j \left(\frac{u_j^* + w_j^*}{{u_{q_1+1}}^* + {w_{q_1+1}}^*}\right) + \\ & \sum_{j=1}^{q_1} b_j \left(\frac{v_j^*}{{u_{q_1+1}}^* + {w_{q_1+1}}^*}\right) = d \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که اثبات را کامل می‌کند.

بر اساس قضیه بالا، از LP زیر برای یافتن GRS استفاده می‌نماییم. در ابتدا مدل زیر را حل می‌کنیم.

که t نشان دهنده عدد اصلی J_E می‌باشد به طور مثال $J_E = \{j_1, \dots, j_t\}$

فرض می‌کنیم $\left(\lambda^*_{j_k}, \mu^*_{j_k}, s_i^{-^*}, s_r^{+^*}, \forall k, i, r\right)$ جواب بهینه مدل (۱۸) باشد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in J_E} \mu_j + \mu_{j_{t+1}}, \\ St. \quad & \sum_{j \in J_E} \left(\lambda_j + \mu_j\right) x_{ij} + s_i^- - \\ & \left(\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}\right) x_{io} = 0, \; i = 1, \dots m, \\ & \sum_{j \in J_E} \left(\lambda_j + \mu_j\right) y_{rj} - s_r^+ \end{aligned}$$

$$-\left(\lambda_{j_{t+1}}+\mu_{j_{t+1}}\right)y_{ro}=0, r=1,..s,$$

$$\sum_{j\in J_E}\left(\lambda_j+\mu_j\right)- \left(\lambda_{j_{t+1}}+\mu_{j_{t+1}}\right)=0, \quad (۱۸)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{S_i^-}{R_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{S_r^+}{R_r^+}- \left(\lambda_{j_{t+1}}+\mu_{j_{t+1}}\right)(m+s)(1-\rho_o)=0,$$

$$0\le\mu_{j_k}\le 1,\ \lambda_{j_k}\ge 0,$$

$$k=1,...,t+1,\ s_i^-\ge 0,\ s_r^+\ge 0,$$

$$i=1,...,m,\ r=1,...,s.$$

آنگاه

$$\begin{pmatrix}\lambda'_{j_k}=\dfrac{\lambda^*_{j_k}+\mu^*_{j_k}}{\lambda^*_{j_{t+1}}+\mu^*_{jt+1}}, s_i^{-'}=\dfrac{s_i^{-^*}}{\lambda^*_{j_{t+1}}+\mu^*_{jt+1}},\\ s_i^{+'}=\dfrac{s_r^{+^*}}{\lambda^*_{j_{t+1}}+\mu^*_{jt+1}}, \forall k,i,r\end{pmatrix}\in\Omega_o \quad (۱۹)$$

و λ' دارای ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت می‌باشد. GRS را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد.

$$R_o^G=\{DMU_j\,|\lambda'_j>0,\ \}. \quad (۲۰)$$

پس از تشخیص دادن GRS، تصویر مربوط به فرمول (۱۹) را نیز می‌توان به صورت زیربه دست آورد.

$$P_o^*=(x_o^*,y_o^*)=(x_o-s^{-'},y_o+s^{+'}) =\sum_{j\in J_o^G}\lambda'_j(x_j,y_j) \quad (۲۱)$$

چون P_o^* به عنوان ترکیب محدب اکید از واحدهای درون R_o^G معرفی شده‌است، P_o^* نقطه درونی نسبی $\Gamma_o^{\min}$ می‌باشد.

به طور خلاصه جوابهای مسئله (۱۸) مجموعه‌ی تمامی DMUهای مولد وجه می‌نیمم GRS به همراه نقطه درونی نسبی از این وجه (به عنوان مثال تصویر P_o^*) را تعیین می‌کند.

۴- روش پیشنهادی دو مرحله‌ای برای تعیین بازده به مقیاس

همانطور که می‌دانید، واژه RTS تنها زمانی معنادار می‌باشد که DMU مربوطه بر روی مرز مجموعه امکان تولید قرار گرفته باشد. بنابراین برای یک DMU_o ناکارا، باید تصویری کارا در نظر گرفت. در این حالت نوع و اندازه RTS برای DMU_o بوسیله موقعیت(های) ابرصفحه(های) تکیه کننده T_{VRS}^{DEA} در تصویر استفاده شده تعیین می‌گردد. این ابر صفحه(های) تکیه کننده از MRS مرتبط با این تصویر عبور می‌کنند و می‌توانند از لحاظ ریاضی از طریق این MRS مشخص شوند.

اگر DMU_o ناکارا باشد ابتدا آن را روی مرز کارآیی تصویر می‌کنیم و بازده به مقیاس آن را بازده به مقیاس تصویر روی مرز کارآیی تعریف می‌کنیم. اگر DMU_o ناکارا دارای یک تصویر منحصر به فرد باشد مشکلی پیش نمی‌آید و بازده به مقیاس آن همان بازده به مقیاس تصویر بدست آمده است. اما اگر DMU_o ناکارا دارای تصویر چندگانه باشد در این صورت ممکن است بازده به مقیاس مختلفی برای هر تصویر بدست آید و این تعریف مشکل ساز است. زیرا خوش تعریف نیست. اگر DMU_o ناکارا را روی مرز کارآیی تصویر کنیم یک وجه مینیمم شامل این تصویر داریم. همه نقاط درون نسبی وجه مینیمم بازده به مقیاس یکسان دارند. پس هدف پیدا کردن یک نقطه درون نسبی وجه مینیمم است. برای اینکه RTS واحد ناکارا را پیدا کنیم نیاز به شناسایی وجه مینیمم داریم و از طرفی می‌دانیم وجه مینیمم توسط GRS تولید می‌شود. بنابراین اگر GRS را پیدا کنیم وجه مینیمم را یافته‌ایم، ترکیب محدب اعضای R_o^G وجه مینیمم را می‌سازد.

فرض کنیم وجه مینیمم را پیدا کرده‌ایم باز رفع مشکل ایجاد شده توسط مسئله نوع ۲ که همان وقوع تصویرهای چندگانه و ایجاد MRSهای چندگانه و در نتیجه وقوع ابرصفحه‌های تکیه کننده چندگانه (که از این به بعد مسئله نوع ۳ می‌نامیم) می‌باشد، لزوماً منحصر به فردی این ابرصفحه‌های تکیه کننده مشخص شده را

تضمین نمی‌کند زیرا ممکن است وجه مینیمم یک وجه کارا از بعد کامل در فضای ورودی – خروجی (یک وجه کارا از بعد $m+s-1$) نباشد.

اگر وجه مینیمم از بعد $m+s-1$ باشد مشکلی پیش نمی‌آید اما اگر وجه مینیمم از بعد کمتر از $m+s-1$ باشد مشکل‌ساز است زیرا بیشمار ابرصفحه تکیه کننده از آن می‌گذرد پس مشکل دوم، چندگانگی ابرصفحه‌های تکیه کننده ناشی از کامل نبودن بعد وجه مینیمم است. در مجموع مشکل اندازه‌گیری RTS از یکی از دو مسئله زیر ناشی می‌شود:

۱- چندگانگی ناشی از انتخاب نقطه تصویر دلخواه (مجموعه مرجع)

۲- کامل نبودن بعد وجه مینیمم

برای از بین بردن این مشکل یک فرایند دو مرحله‌ای را برای اندازه‌گیری RTS بر اساس مطالعات قوی کریونوسکو و همکاران [9] پیشنهاد می‌کنیم.

مرحله ۱) واحدها را با مدل RAM ارزیابی کرده به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم می‌کنیم. اگر واحدها کارا باشد بازده به مقیاس آن را با استفاده از روش بنکر- ترال [20] محاسبه می‌کنیم. اگر واحد ناکارا باشد مقدار تابع هدف مدل RAM یعنی ρ_o بدست آمده را در مدل (۴) جایگذاری کرده و با استفاده از فرمول (۱۹) (λ', s_i^-, s_r^+) را مشخص می‌کنیم. λ' ها، GRS را که در مدل (۲۰) به آن ذکر شده مشخص می‌کنند. فرمول (۲۱) تصویری از DMU_o ناکارا ارائه می‌دهد که درون نسبی وجه مینیمم قرار دارد و برای این تصویر بازده به مقیاس خوش تعریف است، زیرا همه نقاط درن نسبی وجه می‌نیمم دارای بازده به مقیاس یکسان می‌باشند. بازده به مقیاس این تصویر را به عنوان بازده به مقیاس واحد تحت ارزیابی تعریف می‌کنیم.

مرحله ۲) مشکل ناشی از غیر کامل بودن بعد وجه مینیمم را با اندازه گیری RTS در P_o^* از طریق روش بنکر- ترال [20] رفع می‌کنیم.

۴-۱- بسط به مدل‌های دیگر DEA

روش پیشنهادی به آسانی می‌تواند بدون هیچ تغییری برای مدل جمعی (چارنز و همکاران [24]) و مدل BAM (کوپر و همکاران،[25]؛ پاستور [26]؛ پاستور و رویز [27]) استفاده شود، زیرا تفاوت بین هر یک از این دو مدل و مدل RAM تنها در وزن‌هایی است که به اسلک‌های ورودی و خروجی در تابع هدف اختصاص داده می‌شود. با برخی تغییرات کوچک، می‌توان آن را برای مدل RAM/BCC، ازآیدا و همکاران [13]، مدل DSBM از جهانشاهلو و همکاران [14] و مدل GMDDF از مهدیلوزاد و همکاران [15] تعمیم داد. علاوه براین می‌تواند در هر مدل شعاعی DEA (به عنوان مثال مدل BCC) اجرا شود. در این رابطه اگر $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ یک جواب بهینه برای مدل BCC ورودی محور باشد، آنگاه کافی است θX_o را به جای X_o در محدودیت‌های ورودی (۹) و (۱۸) جایگزین کنیم و مجموع اسلک‌ها را در $\sum_{i=1}^{m} s_i^{-*} + \sum_{r=1}^{s} s_r^{+*}$ ثابت نگه داریم. (مهدیلوزاد و همکاران[15]).

۴-۲- تعمیم به بازده به مقیاس ثابت

فرض بازده به مقیاس متغیر در مطالعه ما حفظ می‌شود. زیرا وقتی یک مجموعه داده دارای مقادیر منفی باشد، با فرض بازده به مقیاس ثابت قادر به تعیین کردن یک مرز کارای گذرنده از مبدأ نخواهیم بود. بنابراین، همان طور که توسط سیلوا پورتلا و تاناسولیس [28]) بحث شده، فرض CRS با داده های منفی قابل قبول نمی‌باشد. به هر حال مهم نیست که وجه می‌نیمم یک چند سقفی در تکنولوژی بر پایه VRS یا یک مخروط چند وجهی بیکران در تکنولوژی بر پایه CRS تولید شده بوسیله واحدهای مرجع در GRS باشد. علیرغم اینکه بین دو تکنولوژی، تفاوت ساختاری وجود دارد، همچنان نتایج ما برای حالت CRS با خارج کردن قید تحدب $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$ قابل اثبات می‌باشد. زیرا این روش بر اساس یافتن جوابی با ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت برای سیستم معادلات خطی می‌باشد و مستقل از وجود قید تحدب است.

۴-۳- مبحث داده‌های ورودی – خروجی منفی

چون روش پیشنهادی مستقل از مجموعه داده‌های

استفاده شده می‌باشد، بنابراین هیچ محدودیتی در فرض اینکه داده‌های ورودی – خروجی حتما نامنفی باشند، وجود ندارد، به طوریکه شناسایی GRS را با وجود داده‌های منفی ممکن می‌سازد. این روش از لحاظ کاربردی بسیار مفید است چون در بسیاری از کاربردهای تجربی با ورودی یا خروجی‌های منفی سر و کار داریم.

۵- مطالعه موردی دبیرستان‌های دخترانه ناحیه یک شیراز

برای اینکه کاربرد روش تحقیق مطرح شده را در زندگی واقعی نشان دهیم، این روش را بر روی بیست دبیرستان دخترانه ناحیه ۱ شهرستان شیراز که دارای مقطع پیش‌دانشگاهی بوده‌اند بررسی کردیم. برای تهیه داده‌های ورودی و خروجی ابتدا پرسشنامه‌ای تهیه کرده (در پیوست آمده) با مراجعه به مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۱ و همچنین مراجعه به مدیریت بیست دبیرستان دخترانه ناحیه ۱ شیراز پرسشنامه را برای این مدارس تکمیل نمودیم و داده‌های خام وروی و خروجی را به دست آوردیم.

سپس داده‌ها را نرمال سازی کرده و الگوریتم مطرح شده را روی داده‌های نرمال سازی شده اجرا کردیم. برای انجام کلیه محاسبات، از برنامه نرم افزاری گمز استفاده کردیم. داده ها شامل ۴ ورودی و ۳ خروجی می‌باشند.

۵-۱- معرفی داده‌های ورودی و خروجی برای دبیرستان‌ها

با توجه به اینکه امتحانات پایه اول و دوم هر دبیرستان به صورت داخلی برگزار می‌شود و سختی یا راحتی امتحانات مدارس قابل مقایسه نیست بنابراین تصمیم گرفتیم که فقط پایه سوم و پیش دانشگاهی را مورد مطالعه قرار دهیم و کیفیت را در این دو پایه مقایسه کنیم، چون امتحانات در این دو پایه به صورت نهایی برگزار می‌شود. به دلیل زیاد بودن پارامترها مجبور به ترکیب آنها با وزن‌های مختلف به نام‌های ورودی و خروجی شدیم.

ورودی‌ها:

۱- فضای آموزشی- پارامتری است که برای هر دبیرستان توسط ترکیب خطی از امکانات دبیرستان که شامل چند نوبته بودن (a_1)- تعداد غیر کلاس (a_2)- تعداد کلاس (a_3)- مساحت کل (a_4) و مساحت زیر بنا (a_5) می‌باشد.

$$\text{فضای آموزشی} = x_1 = 2N(a_1) + 3N(a_2) + 5N(a_3) + 2N(a_4) + 3N(a_5)$$

تابع $N(.)$ تابعی نرمال ساز می‌باشد.

۲- کادر اداری- (کادر اداری شامل مدیر و معاونین آموزشی و پرورشی و مشاور و معاونین اجرایی و سرایدار و خدمت گذار است). پارامتری است که برای هر دبیرستان ترکیب خطی از عوامل زیر می‌باشد:

تعداد دیپلم(b_1) - تعداد فوق دیپلم (b_2) - تعداد لیسانس و فوق لیسانس (b_3)- تعداد دفتر دار (b_4)- تعداد خدمت گذار(b_5)

$$\text{کادر اداری} = x_2 = 2N(b_1) + 3N(b_2) + 5N(b_3) + 2N(b_4) + 3N(b_5)$$

۳- کادر آموزشی- پارامتری که برای هر دبیرستان توسط ترکیب خطی از عوامل زیر حاصل شده است: میانگین گروه معلمین (c_1)- میانگین سابقه کار معلمین (c_2)- تعداد متخصصین (c_3)- تعداد کل معلمین (c_4)- تعداد دیپلم (c_5)- تعداد فوق دیپلم (c_6)-تعداد لیسانس (c_7)- تعداد فوق لیسانس و دکترا (c_8) و تعداد کلاس (c_9). ترکیب خطی برای پارامتربه صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\text{هیات مدرسین} = x_3 = N((N(c_5) + 2\mathrm{N}(c_6) + 4N(c_7) + 5N(c_8))/c_9) + N(c_1) + N(c_2) + \mathrm{N}(c_3/c_4)$$

۱-کیفیت تحصیلی سال قبل (سال تحصیلی ۹۳-۹۲)- پارامتری است که از ترکیب خطی عوامل زیر حاصل می‌شود:

تعداد دانش آموزان پایه سوم در سال قبل (d_1)- تعداد قبولی در پایه سوم در سال قبل (d_2)- تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل (d_3)- تعداد قبولی

دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل (d_4)

$$\text{کیفیت سال قبل} = x_4 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right) + 3\left(\frac{d_4}{d_3}\right)$$

خروجی‌ها:

۱- تعداد دانش آموزان: پارامتری است که در فاصله (۷۰۰-۱۰۰) تغییر می‌کند و مدارسی که دارای تعداد دانش آموزان بیشتری باشند خروجی بالاتری دارند.

تعداد دانش آموزان $= y_1$

۲-کیفیت تحصیلی سال ۹۴-۹۳ (سال مورد مطالعه): پارامتری است که توسط ترکیب خطی از عوامل زیر به دست می‌آید:

تعداد دانش آموزان پایه سوم در سال مورد مطالعه (e_1)- تعداد قبولی در پایه سوم در سال مورد مطالعه (e_2)- تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال مورد مطالعه (e_3)- تعداد قبولی دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال مورد مطالعه (e_4) ترکیب خطی برای این پارامتر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{کیفیت تحصیلی سال مورد مطالعه} = y_2 = (e_2/e_1) + 3(e_4/e_3)$$

به طور خلاصه ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت زیر است:

ورودی‌ها:

۱- فضای آموزشی

۲- کادر اداری

۳- کادر آموزشی

۴- کیفیت تحصیلی سال قبل (سال تحصیلی ۹۳-۹۲)

خروجی‌ها:

۱-تعداد دانش آموزان

۲-کیفیت تحصیلی سال ۹۴-۹۳ (سال مورد مطالعه)

(جدول مربوط به اطلاعات خام مربوط به هر ورودی و هر خروجی در پیوست آمده است.)

جدول ۱. نمره کارآیی و الگوی (تصاویر ورودی‌ها و خروجی‌ها) متناظر با دبیرستان‌ها حاصل از مدل RAM

واحد	کارایی ρ_o	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
DMU_1	1	13.196	12	3.34	3.67	632	3.8
DMU_2	1	9.418	8	3.39	3.3	586	3.31
DMU_3	1	7.011	7.277	3.61	2.76	416	2.76
DMU_4	1	7.51	8	3.66	3.04	566	3.26
DMU_5	1	7.744	7	3.57	2.48	491	2.81
DMU_6	1	7.915	5.722	3.5	3.62	454	3.5
DMU_7	1	6.786	4.22	3.1	2.77	265	2.43
DMU_8	0.86	7.75	5.467	2.801	3.278	326.19	3.63
DMU_9	1	7.023	3.944	3.58	2.77	267	2.61
DMU_{10}	1	7.204	6.778	2.66	3.35	210	3.68
DMU_{11}	0.817	7.183	6.56	3.226	2.999	437	3.266
DMU_{12}	1	8.595	6.833	3.15	3.52	440	3.86
DMU_{13}	0.838	7.178	6.022	3.05	3.029	387	3.32
DMU_{14}	0.867	8.375	6.477	3.059	3.457	410.31	3.8
DMU_{15}	0.768	7.249	6.85	3.313	3.008	463	3.265
DMU_{16}	0.958	7.399	6.989	3.306	3.076	460	3.34
DMU_{17}	1	7.399	7.278	3.52	2.74	426	3.11
DMU_{18}	0.86	6.948	4.866	2.784	2.78	290	3.127
DMU_{19}	0.889	7.341	5.444	3.103	2.9	365	3.137
DMU_{20}	1	6.464	3.389	2.27	2.91	153	3.28

۵-۲- اجرای روش پیشنهادی بر روی داده‌های دبیرستان‌ها

برای اجرای روش ارائه شده در ابتدا بیست مدرسه مورد نظر را با استفاده از مدل RAM ارزیابی می‌کنیم و نمره کارآیی (ρ_o) آنها را با استفاده از این مدل محاسبه می‌کنیم. جدول (۱) نمره کارآیی حاصل از مدل RAM و الگوی (تصاویر ورودی‌ها و خروجی‌ها) متناظر با مطالعه موردی دبیرستان‌ها را نشان می‌دهد. نتایج جدول (۱) نشان می‌دهد که ۱۲ مدرسه (۶۰%) کارآ می‌باشد و ۸ مدرسه (۴۰%) باقی‌مانده ناکارا می‌باشد.

همانطور که می‌دانیم مدل RAM به تنهایی قادر به یافتن همه واحدهای مرجع ممکن برای DMUهای ناکارا نیست. بنابراین با حل مدل (۱۸) برای هر مدرسه ناکارا، همه مجموعه‌های مرجع کارا (GRS) را شناسایی می‌کنیم. جدول (۲) همه مدارس مرجع برای مدارس ناکارا با وزن‌های مربوط به آنها را نشان می‌دهد. برای مثال برای ناکارترین مدرسه یعنی $DMU_{۱۵}$ مدارس کارای $DMU_{۴}$ و $DMU_{۲۰}$ با مقادیر وزن‌های ۰،۷۵۱ و ۰،۲۴۹ به عنوان مرجع معرفی شده‌اند. این بدان معنی است که ورودی‌ها و خروجی‌های هدف مدرسه $DMU_{۱۵}$ ترکیب خطی از ورودی‌ها و خروجی‌های $DMU_{۴}$ و $DMU_{۲۰}$ هستند و برای اینکه $DMU_{۱۵}$ کارا شوند باید ورودی‌ها و خروجی‌هی خود را تعدیل کند تا بتواند $y_{۲۰}$ ۰،۲۴۹ + ۰،۷۵۱$y_{۴}$ مقدار خروجی را با فرض $x_{۲۰}$ ۰،۲۴۹ + ۰،۷۵۱$x_{۴}$ مقدار ورودی به دست آورد.

اکنون به اندازه‌گیری بازده به مقیاس مدارس می‌پردازیم. بازده به مقیاس مدارس کارا را از روش دو مرحله‌ای بنکر – ترال به دست می‌آوریم. برای اندازه‌گیری بازده به مقیاس هر واحد DMU ناکارا ابتدا به کمک فرمول (۲۱) یک نقطه در درون نسبی وجه می‌نیمم مربوط به خودش به دست می‌آوریم و سپس با به کار بردن روش دو مرحله‌ای بنکر – ترال بازده به مقیاس هر واحد ناکارا را در نقطه درون نسبی به دست آمده محاسبه می‌کنیم. بازده به مقیاس واحد ناکارا، با بازده به مقیاس نقطه درون نسبی وجه مینیمم بدست آمده برابر است. نتایج در جدول (۳) و (۴) آمده است.

در میان دوازده مدرسه کارا، ۹ مدرسه دارای بازده به مقیاس ثابت و ۳ مدرسه دارای بازده به مقیاس افزایشی است.و در میان ۸ مدرسه ناکارا، همگی دارای بازده به مقیاس ثابت هستند.

جدول ۲. مجموعه‌های مرجع متناظر با مدارس ناکارا و وزن‌های مربوط به آنها

واحدهای ناکارا	مجموعه‌های مرجع و وزن‌های آنها								
DMU_{8}	DMU_{12}	(0.603)	DMU_{20}	(0.397)					
DMU_{11}	DMU_{4}	(0.688)	DMU_{20}	(0.312)					
DMU_{13}	DMU_{4}	(0.507)	DMU_{12}	(0.086)	DMU_{20}	(0.407)			
DMU_{14}	DMU_{12}	(0.897)	DMU_{20}	(0.103)					
DMU_{15}	DMU_{4}	(0.751)	DMU_{20}	(0.249)					
DMU_{16}	DMU_{4}	(0.674)	DMU_{10}	(0.055)	DMU_{12}	(0.089)	DMU_{20}	(0.182)	
DMU_{18}	DMU_{4}	(0.068)	DMU_{5}	(0.323)	DMU_{20}	(0.61)			
DMU_{19}	DMU_{5}	(0.415)	DMU_{6}	(0.238)	DMU_{20}	(0.347)			

جدول ۳. بازده به مقیاس مدارس کارا با مدل RAM

واحد	U-	U+
DMU_{1}	-0.631	Unb.
DMU_{2}	-0.656	5.37
DMU_{3}	-0.958	-0.657
DMU_{4}	-0.772	5.493
DMU_{5}	-1	0.478
DMU_{6}	-0.578	3.258
DMU_{7}	-1	-0.582
DMU_{9}	-1	-0.208
DMU_{10}	-0.169	2.948
DMU_{12}	-0.399	Unb.
DMU_{17}	-0.652	0.279
DMU_{20}	-1	4.747

جدول ۴. بازده به مقیاس مدارس ناکارا با مدل RAM

u^+	u^-	y_2	y_1	x_4	x_3	x_2	x_1	
2.942	-0.447	3.63	326.19	3.278	2.801	5.467	7.75	DMU_8
0.201	-0.814	3.266	437	2.999	3.226	6.56	7.183	DMU_{11}
0.202	-0.432	3.32	387	3.029	3.05	6.022	7.178	DMU_{13}
2.484	-0.41	3.8	410.31	3.457	3.059	6.477	8.375	DMU_{14}
0.198	-0.805	3.265	463	3.008	3.313	6.85	7.249	DMU_{15}
0.194	-0.117	3.34	460	3.076	3.306	6.989	7.399	DMU_{16}
0.039	-0.867	3.127	290	2.78	2.784	4.866	6.948	DMU_{18}
0.041	-0.601	3.137	365	2.9	3.103	5.444	7.341	DMU_{19}

۵-۳ - اجرای الگوریتم در مدل BCC بر روی داده‌های مدارس

از آنجایی که الگوریتم پیشنهادی در هر مدل DEA شعاعی مانند BCC قابل اجراست، لذا با برخی تغییرات جزئی این روش را در مدل BCC اجرا می‌کنیم. نتایج بدست آمده از مدل BCC در جداول (۵)، (۶)، (۷) ارائه شده است.

اطلاعات جدول (۵) نشان می‌دهد که از میان بیست مدرسه مورد ارزیابی توسط مدل BCC، ۱۲ مدرسه کارا و ۸ مدرسه ناکار می‌باشد. در جدول (۶) مجموعه‌های مرجع و وزن‌های مربوط به آنها آمده است.

جدول ۵. نمره کارایی و الگوی (تصاویر ورودی‌ها و خروجی‌ها) متناظر با دبیرستان‌ها حاصل از مدل BCC

y_2	y_1	x_4	x_3	x_2	x_1	Slack	ρ_o	DMU
3.8	632	3.67	3.34	12	13.196	0	1	DMU_1
3.31	586	3.3	3.39	8	9.418	0	1	DMU_2
2.76	416	2.76	3.61	7.277	7.011	0	1	DMU_3
3.26	566	3.04	3.66	8	7.51	0	1	DMU_4
2.81	491	2.48	3.57	7	7.744	0	1	DMU_5
3.5	454	3.62	3.5	5.722	7.915	0	1	DMU_6
2.43	265	2.77	3.1	4.22	6.786	0	1	DMU_7
3.743	339.591	3.403	2.907	6.444	7.945	4.144	0.97	DMU_8
2.61	267	2.77	3.58	3.944	7.023	0	1	DMU_9
3.68	210	3.35	2.66	6.778	7.204	0	1	DMU_{10}
3.314	481.183	3.03	3.29	7.872	9.178	2.907	0.908	DMU_{11}
3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	0	1	DMU_{12}
3.676	428.524	3.34	3.14	6.703	8.423	2.811	0.903	DMU_{13}
3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	74.708	0.984	DMU_{14}
3.416	570.895	3.206	3.557	8.755	8.777	0.371	0.811	DMU_{15}
3.354	461.89	3.123	3.36	7.278	7.399	0.197	0.996	DMU_{16}
3.11	426	2.74	3.52	7.278	7.399	0	1	DMU_{17}
2.848	327.763	2.78	3.31	4.944	7.144	0	0.885	DMU_{18}
3.356	390.278	3.29	3.17	5.444	7.656	0.849	0.935	DMU_{19}
3.28	153	2.91	2.27	3.389	6.464	0	1	DMU_{20}

جدول ۶. مجموعه مرجع مدارس ناکارا و وزن‌های مربوط به آنها حاصل از مدل BCC

واحدهای ناکارا	مجموعه‌های مرجع واحدهای ناکارا و وزن‌های آنها											
DMU_8	DMU_{10}	(0.302)	DMU_{12}	(0.59)	DMU_{20}	(0.108)		(0.109)				
DMU_{11}	DMU_1	(0.26)	DMU_5	(0.445)	DMU_{12}	(0.187)	DMU_{20}	(0.079)				
DMU_{13}	DMU_1	(0.023)	DMU_5	(0.13)	DMU_{12}	(0.768)	DMU_{20}					
DMU_{14}	DMU_{12}	(1)										
DMU_{15}	DMU_1	(0.209)	DMU_4	(0.72)	DMU_{12}	(0.071)		(0.077)				
DMU_{16}	DMU_4	(0.677)	DMU_6	(0.063)	DMU_{10}	(0.183)	DMU_{20}	(0.068)				
DMU_{18}	DMU_4	(0.074)	DMU_5	(0.234)	DMU_6	(0.038)	DMU_7	(0.265)	DMU_9	(0.405)	DMU_{20}	(0.182)
DMU_{19}	DMU_2	(0.095)	DMU_5	(0.098)	DMU_6	(0.542)	DMU_{20}					

جالب توجه هست که مدارس ناکارای به دست آمده از مدل BCC همان مدارس ناکارای شناسایی شده در مدل RAM هستند. و ناکاراترین مدرسه در هر دو مدل RAM و BCC مدرسه شماره ۱۵ ($DMU_{۱۵}$) معرفی شده است. اما مجموعه‌های مرجع معرفی شده برای $DMU_{۱۵}$ در مدل BCC، واحدهای $DMU_۱$، $DMU_۴$ و $DMU_{۱۲}$ با وزن‌های ۰،۲۰۹ ، ۰،۷۲ و ۰،۰۷۱ می‌باشند. یعنی مدرسه شماره ۱۵ برای اینکه کارا شود باید با استفاده از $۰،۲۰۹x_۱ + ۰،۷۲x_۲ + ۰،۰۷۱x_۳$ خروجی خود را به $۰،۲۰۹y_۱ + ۰،۷۲y_۲ + ۰،۰۷۱y_۳$ برساند. حال به اندازه‌گیری بازده به مقیاس واحدهای کارا و ناکارا در مدل BCC می‌پردازیم. همانطور که در جدول (۷) دیده می‌شود، از میان ۱۲ مدرسه کارا ۳ مدرسه دارای بازده به مقیاس افزایشی و ۹ مدرسه دارای بازده به مقیاس ثابت می‌باشند.

از جدول (۸) مشاهده می‌شود که از میان ۸ واحد ناکارا ۴ مدرسه دارای بازده به مقیاس افزایشی و ۴ مدرسه دارای بازده به مقیاس ثابت است.

جدول ۷. بازده به مقیاس مدارس کارا در مدل BCC

u+	u-	DMU
Unb.	-0.631	**DMU_1**
5.37	-0.656	**DMU_2**
-0.657	-0.958	**DMU_3**
5.493	-0.772	**DMU_4**
0.478	-1	**DMU_5**
3.258	-0.578	**DMU_6**
-0.582	-1	**DMU_7**
-0.208	-1	**DMU_9**
2.948	-0.169	**DMU_{10}**
Unb.	-0.399	**DMU_{12}**
0.279	-0.652	**DMU_{17}**
4.747	-1	**DMU_{20}**

جدول ۸. بازده به مقیاس مدارس ناکارا در مدل BCC

u^+	u^-	y_2	y_1	x_4	x_3	x_2	x_1	DMU
1.435	-0.117	3.743	339.591	3.403	2.907	6.444	7.945	**DMU_8**
-0.131	-0.28	3.314	481.183	3.03	3.29	7.872	9.178	**DMU_{11}**
-0.123	-0.274	3.676	428.524	3.34	3.14	6.703	8.423	**DMU_{13}**
Unb.	-0.399	3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	**DMU_{14}**
3.556	-0.29	3.416	570.895	3.206	3.557	8.755	8.777	**DMU_{15}**
0.193	0.178	3.354	461.89	3.123	3.36	7.278	7.399	**DMU_{16}**
-0.575	-0.575	2.848	327.763	2.78	3.31	4.944	7.144	**DMU_{18}**
-0.13	-0.552	3.356	390.278	3.29	3.17	5.444	7.656	**DMU_{19}**

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق برای یافتن همه مجموعه‌های مرجع کارا برای واحدهای تحت ارزیابی در DEA غیر شعاعی ابتدا هر واحد را با استفاده از مدل غیر شعاعی RAM ارزیابی کردیم. از آنجایی که در مدل‌های DEA غیر شعاعی مجموعه‌های مرجع چندگانه برای واحد تصمیم گیرنده وجود دارد، در گام اول به تعریف سه نوع مجموعه مرجع می‌پردازیم. ابتدا مفهوم مجموعه مرجع یگانی (URS) مربوط به تصویر DMUo تحت ارزیابی را معرفی کردیم. URS، شامل DMUهای کارایی می‌باشند که در ترکیب محدب خاص تولید کننده تصویر فعال هستند. به علت وقوع URSهای چند گانه، مفهوم مجموعه مرجع ماکزیمال (MRS) را معرفی کردیم و آنرا به صورت اجتماع همه URSهای متناظر با تصویر داده شده تعریف می‌کنیم. چون در مدل‌های DEA غیر شعاعی امکان وقوع تصویرهای چندگانه وجود دارد، اجتماع MRSهای متناظر با همه تصاویر را به عنوان مجموعه مرجع کلی منحصر به فرد (GRS) تعریف می‌کنیم.

در گام دوم، یک رویکرد مبتنی بر برنامه برنامه‌ریزی خطی برای تعیین GRS مطرح می‌کنیم. چون تعیین GRS از طریق اجرای یک مدل برنامه‌ریزی خطی اولیه – دوگان منحصر به فرد است، کارایی محاسباتی آن در کاربردهای عملی از روش‌های موجود بیشتر است.

در گام آخر به اندازه‌گیری بازده به مقیاس در مدل DEA غیر شعاعی می‌پردازیم. بالاخره روش مطرح شده را بر روی داده‌های مربوط به بیست دبیرستان دخترانه ناحیه یک شیراز اجرا کرده و برای واحدهای ناکارای بدست آمده الگو مناسب و کلاس بازده به مقیاس را معرفی کردیم. به عنوان کارهای آتی می‌توانیم روش ارائه شده را برای سایر داده‌ها نظیر داده‌های مربوط به بانک و بیمه بکار ببریم.

فهرست منابع

[۱] م. ر. مهرگان، مدل‌های کمّی در ارزیابی عملکرد سازمان‌ها، تهران، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، چاپ دوم نشر کتاب دانشگاهی، ۱۳۹۱.

[2] A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operation Research, 2 (6) (1978) 429-441.

[3] A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes, Short Communication: Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 3 (1979) 339.

[4] M.J. Farrell, The Measurement of Productive Efficiency, Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General) 120 (3) (1957) 253-290.

[5] W. W. Cooper, K. S. Park, J. T. Pastor, RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models and relations to other models and measures in DEA. Journal of productivity Analysis, 11 (1999) 5-42.

[6] T. Sueyoshi, K. Sekitani, Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach, European Journal Operational Research, 176 (2007) 1918-1946.

[7] V. E. Krivonozhko, F. R. Forsund, A. V. Lychev, A note on imposing strong complementary slackness conditions in DEA, European Journal of Operational Research, 220 (2012) 716-721.

[8] T. Sueyoshi, K. Sekitani, The measurement of returns to scale under a simultaneous occurrence of multiple solutions in a reference set and a supporting hyper plane, European Journal of Operational Research, 181 (2007) 549-570.

[9] V. E Krivonozhko, F. R. Forsung, A. V. Lynchev, Measurement of returns to scale using non-radial DEA models, European Journal of Operation Research, 232 (2014) 664-670.

[10] W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone, Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Boston: Kluwer Academic Publishers, (2007).

[11] W.L. Winston, Operations Research: Applications and Algorithms, Boston: Duxbury Press, (2003).

[12] A. Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, J. Stutuz, Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical productions functions, Journal of Econometrics, 30 (1985) 91-107.

[13] K. Aida, W. W. Cooper, J.T. Pator, T. Sueyoshi, Evaluation water supply services in Japan with Ram: A range-adjusted measure of inefficiency, Omega, 26 (1998) 207-232.

[14] G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, M. Mehdillozad, I. Roshdi, connected directional slack-based measure of efficiency in DEA, Applied Mathematical Sciences, 6 (2012) 237-246.

[15] M. Mehdiloozad, B. K. Sahoo, A generalized multiplicative directional distance function for efficiency measurement in DEA, European Journal of Operational Research, 214 (2014) 679-688.

[16] R. D. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper, Some models for the estimation of technical and scale inefficiencies in

data envelopment analysis, Management science, 30 (1984) 1078-1092.

[17] J. T. Pator, J. L. Ruiz, Variables with Negative in DEA, In W. D. Cook, & Zhu (Eds.), Modeling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis (pp. 63-84). New York: Springer, (2007).

[18] O. B. Olesen, N. C. Petersen, Identification and use of efficient faces and facets in DEA. Journal of productivity Analysis, 20 (1996) 323-360.

[19] O. B. Olesen, N. C. Peterson, Indicators of ill-conditioned data sets and model misspecification in data envelopment analysis: An extended facet approach, Management Science, 42 (1996) 205-219.

[20] R. D. Banker, W. W. Cooper, Seiford, L. M., Thrall, R. M., Z7 Zhu, J. (2004). Returns to scale in different DEA models. European Journal of Operational Research, 154-345-362.

[21] P. L. Brockett, W. W. Cooper, L.L. Golden, J. J. Russeau, Y. Wang, Evaluating solvency versus efficiency performance and different forms of organization and marketing in US property-liability insurance companies, European Journal Operational Research, 154 (2004) 492-514.

[22] K. Tone, On returns to scale under weights restrictions in data envelopment analysis, Journal of Productivity Analysis, 16 (2001) 31–47.

[23] K. Tone, A simple characterization of return to scale in DEA, Journal of Operations Research Society of Japan, 39 (1996) 604–613.

[24] A. Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, J. Stutz, Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical productions functions. Journal of Econometrics, 30 (1985) 91–107.

[25] W. W. Cooper, J. T. Pastor, F. Borras, J. Aparicio, D. Pastor, BAM: A bounded adjusted measure of efficiency for use with bounded additive models, Journal of Productivity Analysis, 35 (2011) 85–94.

[26] J. T. Pastor, New additive models for handling zero and negative data (Working Paper). Spain: Universidad de Alicante, Departamento de Estadí'stica e Investigación Operativa. (1994).

[27] J. T. Pastor, J. L. Ruiz, Variables with negative values in DEA. In W. D. Cook, & J. Zhu (Eds.), Modeling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis (pp. 63–84). New York: Springer. (2007).

[28] M. C. A. Silva Portela, E. Thanassoulis, Malmquist-type indices in the presence of negative data: An application to bank branches, Journal of Banking & Finance, 34 (2010) 1472–1483.

پیوست۱: پرسش نامه

پرسش نامه ارائه شده به ناحیه ۱ آموزش و پرورش شیراز جهت جمع آوری اطلاعات

قبلاً از اینکه در نهایت بردباری با دقت این پرسش نامه را تکمیل می‌کنید نهایت سپاس‌گذاری را دارم.

الف: لطفاً در ارتباط با فضای آموزشی آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- این آموزشگاه چند نوبته است؟

یک نوبته☐ دو نوبته☐

۲- تعداد غیر کلاس در آموزشگاه چند تا است؟

۳- تعداد کلاس چند تا است؟

٤- مساحت کل مدرسه چقدر است؟

۵- مساحت زیر بنا ی مدرسه چقدر است؟

ب: لطفاً در ارتباط با کادر اداری آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- چند نفر دیپلم هستند؟

۲- چند نفر فوق دیپلم هستند؟

۳- چند نفر لیسانس یا فوق لیسانس هستند؟

۴- چه تعداد دفتر دار (معاون اجرایی) در مدرسه مشغولند ؟

۵- تعداد خدمت گذاران مدرسه چند نفر است؟

پ: لطفاً در ارتباط با کادر آموزشی آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- میانگین گروه معلمین چند نفر است؟

۲- به طور میانگین سابقه کار معلمین چقدر است؟

۳- تعداد متخصصین که در رشته خود کار می‌کنند چند نفر است؟

۴- تعداد کل معلمین مدرسه چند نفر است؟

۵- چه تعداد از معلمین دیپلم هستند؟

۶- چه تعداد از معلمین فوق دیپلم هستند؟

۷- چه تعداد از معلمین لیسانس هستند؟

۸- چه تعداد فوق لیسانس و دکترا در کادر آموزشی مشغول به کار هستند؟

ت: لطفاً در ارتباط با کیفیت تحصیلی سال قبل آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- تعداد دانش آموزان پایه‌های اول و دوم و سوم در سال قبل چند نفر بوده است؟

۲- تعداد قبول شدگان پایه های اول و دوم و سوم در سال قبل چند نفر بوده است؟

۳- تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل چند نفر بوده است؟

۴- تعداد قبول شدگان دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل چند نفر بوده است؟

ث: لطفاً در ارتباط با تعداد دانش آموزان به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- تعداد کل دانش آموزان مدرسه چند نفر است؟

۲- تراکم دانش آموزان در کلاسها چقدر است؟ (تقسیم تعداد دانش آموزان بر تعداد کلاس‌ها)

۳- توزیع دانش آموزان پایه دوم چگونه است؟

(تقسیم تعداد دانش آموزان هر رشته در پایه دوم به تعداد کل دانش آموزان)

توزیع در رشته ریاضی----------

توزیع در رشته تجربی----------

توزیع در رشته انسانی و معارف اسلامی----------

ج: لطفاً در ارتباط با کیفیت تحصیلی سال تحصیلی جاری آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- تعداد دانش آموزان پایه های اول و دوم و سوم در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است؟

۲- تعداد قبول شدگان پایه‌های اول و دوم و سوم در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است؟

۳- تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است؟

۴- تعداد قبول شدگان دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است ؟
۵- میانگین نمره دانش آموزان پایه دوم چقدر است؟ (میانگین نمره از تقسیم مجموع نمرات سالیانه دانش آموزان شرکت کننده در امتحانات بر تعداد دانش آموزان شرکت کننده در امتحان به دست می‌آید.)
۶- میانگین نمره دانش آموزان پایه سوم چقدر است؟
۷- میانگین نمره دانش آموزان پیش دانشگاهی چقدر است؟

د: لطفاً در ارتباط با راهیابی دانش آموزان آموزشگاه به دانشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.
۱- تعداد قبول شدگان فوق دیپلم چند نفر است؟
۲- تعداد قبول شدگان لیسانس چند نفر است؟
۳- تعداد قبول شدگان فوق لیسانس و دکترا چند نفر است؟
۴- تعداد قبول شدگان مراکز تربیت معلم چند نفر است؟
۵- تعداد قبول شدگان دانشگاه پیام نور و شبانه چند نفر است؟
۶- تعداد قبول شدگان در مراکز روزانه دانشگاه‌ها چند نفر است؟

با تشکر مجدد از همکاری صمیمانه شما

پیوست۲: داده‌های مربوط به بیست دبیرستان دخترانه ناحیه یک شیراز

جدول ۹. اطلاعاتی ورودی x_1 (فضای آموزشی)

نام مدرسه	چند نوبته ضریب ۲	تعداد غیر کلاس ضریب ۳	تعداد کلاس ضریب ۵	مساحت کل ضریب ۲	مساحت زیر بنا ضریب۳	ورودی x1 (فضای آموزشی)
DMU_1	1	15	24	4100	3500	13.196
DMU_2	1	10	17	2500	2000	9.418
DMU_3	1	6	17	2000	1800	7.011
DMU_4	1	3	16	1795	1879	7.51
DMU_5	1	8	14	2030	1071	7.744
DMU_6	1	9	11	3150	1485	7.915
DMU_7	1	8	10	2000	1285	6.786
DMU_8	1	8	12	2406	1999	7.945
DMU_9	1	5	9	2500	2520	7.023
DMU_{10}	1	3	6	2021	5137	7.204
DMU_{11}	1	5	15	6000	5750	11.125
DMU_{12}	1	7	14	3897	1871	8.595
DMU_{13}	1	10	15	5010	4000	10.882
DMU_{14}	1	11	13	4319	1531	9.149
DMU_{15}	1	7	15	4000	1767	8.777
DMU_{16}	2	8	14	975	1063	7.399
DMU_{17}	2	8	14	975	1063	7.399
DMU_{18}	1	7	10	3110	1201	7.144
DMU_{19}	1	8	12	3012	2135	8.218
DMU_{20}	1	2	8	5000	1400	6.464

جدول ۱۰. اطلاعاتی ورودی x_2 (کادر اداری)

نام مدرسه	تعداد دیپلم ضریب۲	تعداد فوق دیپلم ضریب۳	تعداد لیسانس و فوق لیسانس ضریب۵	تعداد معاون اجرایی ضریب ۲	تعداد خدمتگذار ضریب۳	ورودی x2: کادر اداری
DMU_1	4	0	18	4	3	12
DMU_2	2	1	9	2	2	8
DMU_3	3	0	10	2	2	7.277
DMU_4	2	1	9	2	2	8
DMU_5	3	0	9	2	2	7
DMU_6	2	0	8	1	2	5.722
DMU_7	1	0	8	1	1	4.22
DMU_8	1	1	7	1	2	6.444
DMU_9	1	0	7	1	1	3.944
DMU_{10}	2	1	10	1	1	6.778
DMU_{11}	3	0	12	4	2	8.833
DMU_{12}	2	0	12	1	2	6.833
DMU_{13}	2	0	11	2	2	7.055
DMU_{14}	1	0	15	1	2	7.167
DMU_{15}	1	2	10	3	1	8.778
DMU_{16}	1	1	10	3	1	7.278
DMU_{17}	1	1	10	3	1	7.278
DMU_{18}	0	1	7	1	1	4.944
DMU_{19}	2	0	7	1	2	5.444
DMU_{20}	1	0	5	1	1	3.389

جدول ۱۱. اطلاعاتی ورودی x_3 (هیئت مدرسین تمامی مدارس)

نام مدرسه	میانگین گروه معلمین	میانگین سابقه کار	تعداد کل معلمین	تعداد دیپلم	تعداد فوق دیپلم	تعداد لیسانس	تعداد فوق لیسانس و دکترا	ورودی x3 : هیات مدرسین مدارس پیش دانشگاهی	تعداد کلاس	ورودی x3: هیات مدرسین تمام مدارس
DMU_1	2.6	20.9	34	0	0	20	14	3.34	19	3.25
DMU_2	2.38	20.9	31	0	0	22	9	3.39	12	3.29
DMU_3	2.87	21.9	45	0	0	32	13	3.61	17	3.5
DMU_4	2.4	23.7	35	0	0	36	14	3.66	16	3.53
DMU_5	2.46	21.8	32	0	0	22	14	3.57	14	3.45
DMU_6	2.46	22.8	27	0	0	17	9	3.5	11	3.39
DMU_7	1.92	23.6	25	0	0	23	2	3.1	10	3.03
DMU_8	2.09	20.4	23	0	0	17	6	3.23	9	3.14
DMU_9	1.87	22.9	30	0	0	20	10	3.58	9	3.45
DMU_{10}	1.25	13.6	15	0	0	11	4	2.66	6	2.57
DMU_{11}	2.4	22	36	0	0	29	7	3.29	15	3.2
DMU_{12}	2.25	19.03	26	0	0	20	7	3.15	12	3.05
DMU_{13}	2	19.43	26	0	0	20	7	3.14	11	3.04
DMU_{14}	2.23	17.81	33	0	0	14	15	3.49	11	3.36
DMU_{15}	2.92	21.68	38	0	0	28	10	3.61	14	3.5
DMU_{16}	3	20.11	42	0	0	32	10	3.52	16	3.41
DMU_{17}	3	20.11	42	0	0	32	10	3.52	16	3.41
DMU_{18}	1.63	18.55	18	0	0	11	7	3.31	8	3.18
DMU_{19}	2.06	20.74	31	0	0	25	6	3.17	12	3.08
DMU_{20}	0.91	14.79	11	0	0	10	1	2.27	6	2.22

جدول ۱۲. اطلاعاتی ورودی x4 (کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۲)

نام مدرسه	تعداد دانش آموزان سال سوم	تعداد قبول شدگان پایه سوم	تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی	تعداد قبولی پیش دانشگاهی	ورودی x4 : کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۲
DMU_1	117	113	122	110	3.67
DMU_2	169	153	178	142	3.3
DMU_3	93	50	292	216	2.76
DMU_4	167	115	121	95	3.04
DMU_5	136	92	83	50	2.48
DMU_6	136	128	104	93	3.62
DMU_7	42	22	80	60	2.77
DMU_8	81	75	85	81	3.78
DMU_9	64	33	105	79	2.77
DMU_{10}	27	23	30	25	3.35
DMU_{11}	119	115	316	218	3.03
DMU_{12}	152	150	110	93	3.52
DMU_{13}	106	102	92	73	3.34
DMU_{14}	80	74	80	74	3.7
DMU_{15}	94	86	129	111	3.5
DMU_{16}	93	75	94	74	3.16
DMU_{17}	117	87	54	36	2.74
DMU_{18}	80	48	73	51	2.78
DMU_{19}	68	58	194	158	3.29
DMU_{20}	27	15	28	22	2.91

جدول ۱۳. اطلاعاتی خروجی y_1 (تعداد دانش آموزان سال ۹۴-۹۳)

نام مدرسه	تعداد دانش اموزان سال ۹۵-۹۴	خروجی ۱: تعداد دانش آموزان سال ۹۴-۹۳
DMU_1	527	632
DMU_2	401	586
DMU_3	500	416
DMU_4	442	566
DMU_5	400	491
DMU_6	305	454
DMU_7	261	265
DMU_8	219	326
DMU_9	213	267
DMU_{10}	120	210
DMU_{11}	432	437
DMU_{12}	309	440
DMU_{13}	266	387
DMU_{14}	274	361
DMU_{15}	405	463
DMU_{16}	465	460
DMU_{17}	0	426
DMU_{18}	151	290
DMU_{19}	264	365
DMU_{20}	92	153

جدول ۱۴. اطلاعاتی ورودی و خروجی y_2 (تعداد دانش آموزان سال ۹۴-۹۳)

نام مدرسه	تعداد دانش آموزان سال سوم	تعداد قبولی سال سوم	تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی	تعداد قبولی پیش دانشگاهی	خروجی ۲: کیفیت تحصیلی سال ۹۴-۹۳
DMU_1	126	118	116	111	3.8
DMU_2	136	127	190	151	3.31
DMU_3	124	78	229	163	2.76
DMU_4	135	119	145	115	3.26
DMU_5	135	93	103	73	2.81
DMU_6	115	107	126	108	3.5
DMU_7	34	21	71	43	2.43
DMU_8	86	82	75	67	3.63
DMU_9	69	45	72	47	2.61
DMU_{10}	47	39	21	20	3.68
DMU_{11}	127	121	269	185	3.01
DMU_{12}	111	111	134	128	3.86
DMU_{13}	106	88	101	84	3.32
DMU_{14}	86	83	77	73	3.8
DMU_{15}	96	88	95	59	2.77
DMU_{16}	68	59	69	57	3.34
DMU_{17}	160	128	92	71	3.11
DMU_{18}	62	37	28	18	2.52
DMU_{19}	54	36	178	131	2.87
DMU_{20}	28	20	14	12	3.28

جدول ۱۵. اطلاعاتی ورودی و خروجی دبیرستان‌ها

نام مدرسه	ورودی x_1 (فضای آموزشی)	ورودی x_2: کادر اداری	ورودی x_3: هیات مدرسین مدارس پیش دانشگاهی	ورودی x_4: کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۲	خروجی y_1: تعداد دانش آموزان سال ۹۴-۹۳	خروجی y_2: کیفیت تحصیلی سال ۹۴-۹۳
DMU_1	13.196	12	3.34	3.67	632	3.8
DMU_2	9.418	8	3.39	3.3	586	3.31
DMU_3	7.011	7.277	3.61	2.76	416	2.76
DMU_4	7.51	8	3.66	3.04	566	3.26
DMU_5	7.744	7	3.57	2.48	491	2.81
DMU_6	7.915	5.722	3.5	3.62	454	3.5
DMU_7	6.786	4.22	3.1	2.77	265	2.43
DMU_8	7.945	6.444	3.23	3.78	326	3.63
DMU_9	7.023	3.944	3.58	2.77	267	2.61
DMU_{10}	7.204	6.778	2.66	3.35	210	3.68
DMU_{11}	11.125	8.833	3.29	3.03	437	3.01
DMU_{12}	8.595	6.833	3.15	3.52	440	3.86
DMU_{13}	10.882	7.055	3.14	3.34	387	3.32
DMU_{14}	9.149	7.167	3.49	3.7	361	3.8
DMU_{15}	8.777	8.778	3.61	3.5	463	2.77
DMU_{16}	7.399	7.278	3.52	3.16	460	3.34
DMU_{17}	7.399	7.278	3.52	2.74	426	3.11
DMU_{18}	7.144	4.944	3.31	2.78	290	2.52
DMU_{19}	8.218	5.444	3.17	3.29	365	2.87