

یک رویکرد جدید در استفاده از توابع بی-اسپلاین مکعبی برای حل معادله بلک-شولز

حسین امینی خواه^{۱*}، سیدجواد علوی^۲

^(۱) دانشیار، گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
^(۲) دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۵/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۱/۱۸

چکیده

امروزه قراردادهای متداولترین ابزارهای مالی هستند. به همین دلیل با افزایش تقاضا برای این ابزار مالی، مساله قیمت گذاری قراردادهای یکی از مهم ترین مسائل اقتصادی است. با گسترش مدل های تصادفی، نیاز به روش های محاسباتی باعث ایجاد رشتهای جدید به نام مهندسی مالی شد. در مهندسی مالی ارائه مدل بلک-شولز در سال ۱۹۷۳، معادلات دیفرانسیل جزئی را بیش از پیش مورد توجه اقتصاددانان قرار داد. بنابراین برای تعیین قیمت قراردادهای اختیار نیاز به راه حلی ساده و دقیق برای این دسته از معادلات دیفرانسیل جزئی هستیم. در این مقاله روش هم مکانی بی-اسپلاین مکعبی به شکل یک روش تفاضلی برای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای بلک-شولز به کار گرفته شده است. استفاده از این روش به سادگی روش تفاضلات متناهی است و پیچیدگی محاسباتی معمول روش هم مکانی بی-اسپلاین را ندارد. این روش منجر به حل یک دستگاه معادلات جبری سه قطری می‌شود که برای برنامه‌نویسی کامپیوتری بسیار مناسب است. پایداری و همگرایی روش مورد بحث قرار گرفته و نتایج عددی برای اختیار معامله اروپایی و آمریکایی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادله بلک-شولز، اختیار معامله اروپایی و آمریکایی، طرح تفاضلی، توابع بی-اسپلاین، پایداری.

۱. مقدمه

تعیین ارزش قراردادهای یک مدل ریاضی ارائه نمود. مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک-شولز رایج‌ترین روشی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد و امروزه معروف‌ترین مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله در مهندسی مالی محسوب می‌شود. این مدل اولین بار در سال ۱۹۷۳ در مقاله‌ای تحت عنوان قیمت‌گذاری اختیار معامله و بدهی‌های شرکتی توسط فیشر بلک و مایرون شولز معرفی شد [۱]. برای اختیارات اروپایی معادله بلک-شولز منجر به یک مسأله مقدار مرزی از نوع معادله انتشار و برای اختیارات آمریکایی منجر به مسأله‌ای با مرز آزاد می‌گردد.

فرض کنید S قیمت دارایی، t زمان و V قیمت اختیار باشد. به علاوه فرض کنید Γ معرف نرخ بهره بدون ریسک و σ معرف نوسانات قیمت دارایی باشد. معادله بلک-شولز به شکل زیر نوشته می‌شود [۲]

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \\ (S, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (1)$$

شرایط اولیه برای قرارداد اختیار فروش به شکل $V(S, T) = \max(E - S, 0)$

نوشته می‌شود که T زمان سررسید و E قیمت دارایی در زمان سررسید است. شرایط مرزی را به صورت $V(a, t) = Ee^{-r(T-t)}, V(b, t) = 0$

در نظر می‌گیریم.

با توجه به [۳] با تغییر متغیر $(S, t) = u(x, t)$ و $S = e^x$ ، معادله (۱) به معادله دیفرانسیل پاره‌ای با ضرایب ثابت به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$u_t + \frac{\sigma^2}{2} u_{xx} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) u_x - r = 0, \\ x \in [\log(a), \log(b)], 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

همچنین شرایط مرزی مسأله به صورت

$$u(\log(a), t) = Ee^{-r(T-t)}, \\ u(\log(b), t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

و شرایط اولیه نیز برای قرارداد اختیار فروش به صورت

امروزه قراردادهای به طور گسترده در بین مردم محبوبیت پیدا کرده‌اند این محبوبیت به این دلیل است که قراردادهای برای سرمایه‌گذارها جذاب هستند و هم چنین ارزش این قراردادهای را می‌توان با روشی اصولی تعیین کرد که باعث اطمینان در خرید و فروش آن‌ها می‌شود. در بین قراردادهای، قرارداد اختیار معامله رایج‌ترین قراردادی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد. در هر قرارداد اختیار معامله، دو طرف معامله‌گر وجود دارد. یک طرف معامله‌کننده، سرمایه‌گذاری است، که موقعیت خرید اتخاذ کرده و اختیار معامله را خریده است. در طرف دوم قرارداد، سرمایه‌گذار، موقعیت فروش اتخاذ کرده است، یعنی اختیار معامله را صادر کرده یا فروخته است. خریدار یا دارنده اختیار معامله هیچ‌گونه تعهدی در قبال قرارداد ندارد، در حالی که فروش یا صدور اختیار معامله برای فروشنده تعهدآور است. بدین معنی که فروشنده، مبلغ اختیار را دریافت می‌کند و در مقابل متعهد می‌شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند. سود یا زیان صادرکننده‌ی اختیار درست عکس خریدار است. بنابراین، به طور کلی دو نوع اختیار معامله داریم: الف) قرارداد اختیار خرید: که به دارنده‌ی آن این حق را می‌دهد تا دارائی را در تاریخ معینی و با قیمت مشخصی خریداری نماید. ب) قرارداد اختیار فروش: که به دارنده‌ی آن این حق را می‌دهد تا دارائی را در تاریخ معینی و با قیمت مشخصی بفروشد.

قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود قیمت توافقی یا قیمت اعمال و تاریخ ذکر شده در قرارداد را تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله می‌گویند. اختیار خرید یا فروش، هرکدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شود تفاوت این دو نوع اختیار معامله ربطی به منطقه‌ی جغرافیایی ندارد. اختیار معامله آمریکایی در هر زمان از طول دوره عمر قرارداد تا تاریخ انقضا یا تاریخ سررسید قابل اعمال است اما اختیار معامله‌ی اروپایی تنها در تاریخ انقضای آن قابل اعمال است.

با توجه به مطالب بیان شده، سوآلی که در این جا به پیش می‌آید چگونگی تعیین ارزشی مناسب برای یک قرارداد اختیار است. برای پاسخ به این سوال باید برای

این روش، همچنان روشی با کاربرد وسیع نیست. روش تفاضلات اسپلاین مکعبی نخستین بار توسط وانگ و همکاران [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفت. در این مقاله سعی شده است تا روش هم مکانی بی-اسپلاین مکعبی به شکل یک روش تفاضلی معرفی شده و پایداری آن مورد بحث قرار گیرد. فرض کنید

$$\Delta = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$$

که $x_0 = \log(a)$, $x_N = \log(b)$ ، افزای از بازه $S(\Delta)$ $I = [\log(a), \log(b)]$ باشد. فرض کنید فضای توابع اسپلاین مکعبی روی Δ باشد. یک پایه از $S(\Delta)$ به صورت $\{B_{-3}, B_{-2}, \dots, B_{N-1}\}$ خواهد بود که در آن B_j , $j = -3, -2, \dots, N-1$ ، j امین بی-اسپلاین مکعبی برای نقاط گره

$$\tau_{-3} < \tau_{-2} < \dots < \tau_{N+3}$$

است که $\tau_i = x_i$, $i = 0, 1, \dots, N$ و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$B_j(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_j)^3}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)}, & x \in [x_j - x_{j+1}), \\ \frac{(x-x_j)^2(x_{j+2}-x)}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_j)} + \frac{(x-x_j)(x_{j+3}-x)(x-x_{j+1})}{(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})} + \frac{(x-x_{j+1})^2(x_{j+4}-x)}{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+1})}, & x \in [x_{j+1} - x_{j+2}), \\ \frac{(x-x_j)(x_{j+3}-x)^2}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_j)} + \frac{(x-x_{j+1})(x_{j+3}-x)(x_{j+4}-x)}{(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+1})} + \frac{(x-x_{j+2})(x_{j+4}-x)^2}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+2})}, & x \in [x_{j+2} - x_{j+3}), \\ \frac{(x_{j+4}-x)^3}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+3})}, & x \in [x_{j+3} - x_{j+4}), \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

$$u(x, T) = \max(E - e^x, 0), \quad x \in [\log(a), \log(b)] \quad (۴)$$

خواهد بود. هدف ما به دست آوردن مقدار $u(x, 0)$ برای تعیین قیمت اولیه قرار داد اختیار فروش است. تا کنون روش های فراوانی برای حل عددی معادله بلک-شولز به کار رفته است. از جمله کاظمی و همکاران [۴] یک بسط مجانبی از جواب معادله بلک شولز برای اختیار معامله آمریکایی در نزدیک تاریخ انقضا را مورد مطالعه قرار داده‌اند. سن و لی [۵] روشی بر مبنای تفاضلات متناهی را برای حل معادله بلک-شولز به کار بردند. وحدتی و همکاران [۶] روشی بر مبنای باز تولید هسته در فضای هیلبرت را برای حل حالت کلی معادله بلک-شولز به کار بردند. همچنین سن و همکاران [۷] بسط کسری معادله بلک-شولز را به صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. روش هم مکانی بر اساس پایه‌های بهبود یافته اسپلاین مکعبی توسط رشیدی نیا و جمالزاده [۸] برای حل معادله بلک-شولز به کار گرفته شد. همچنین کادالجو و همکاران [۹] از روش هم مکانی اسپلاین مکعبی برای حل معادله بلک-شولز استفاده کردند. در این مقاله مقادیر $u(x, 0)$ به صورت عددی و با استفاده از یک روش عددی بر مبنای توابع اسپلاین به دست خواهند آمد.

۲. بیان روش

با ظهور توابع اسپلاین [۱۰]، روش هم مکانی اسپلاین به عنوان یک روش با مرتبه دقت بالا [۱۱، ۱۲، ۱۳] شناخته شده است. در روش هم مکانی بی-اسپلاین مکعبی مشتق مرتبه اول برای نقاط گره یکنواخت دارای دقت از مرتبه چهار و برای نقاط گره غیر یکنواخت دارای دقتی از مرتبه سه است. همچنین در این روش مشتق از مرتبه دو برای هر نقاط گره‌ای دارای دقت از مرتبه دو است. اگرچه در این روش مشتقات با استفاده از گسسته سازی مشابه روش تفاضلات متناهی به صورت توابع همجوار، مستقیماً قابل بیان نیستند. بنابراین مقادیر مشتق باید به صورت غیر مستقیم از طریق حل معادلات اساسی و روندی پیچیده به دست آیند. در نتیجه با گذشت سال‌ها از توسعه

صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{(\sigma_{1,0}^i)^3}{m_1^i}, \quad \bar{a}_i = \frac{-3(\sigma_{1,0}^i)^2}{m_1^i}, \quad \hat{a}_i = \frac{6\sigma_{1,0}^i}{m_1^i}, \\ b_i &= \frac{\sigma_{0,-2}^i(\sigma_{1,0}^i)^2}{m_1^i} + \frac{\sigma_{0,-1}^i\sigma_{1,0}^i\sigma_{2,0}^i}{m_2^i}, \\ \bar{b}_i &= \frac{(\sigma_{1,0}^i)^2 - 2\sigma_{0,-2}^i\sigma_{1,0}^i}{m_1^i} + \frac{(\sigma_{2,0}^i)^2}{m_3^i}, \\ \hat{b}_i &= \frac{(\sigma_{1,0}^i - \sigma_{0,-1}^i)\sigma_{2,0}^i - \sigma_{0,-1}^i\sigma_{1,0}^i}{m_2^i} - \frac{4\sigma_{2,0}^i}{m_3^i} - \\ &\frac{2(2\sigma_{1,0}^i - \sigma_{0,-2}^i)}{m_1^i} + \frac{2(-\sigma_{2,0}^i - \sigma_{1,0}^i + \sigma_{0,-1}^i)}{m_2^i}, \\ c_i &= \frac{\sigma_{1,0}^i(\sigma_{0,-1}^i)^2}{m_2^i}, \\ \bar{c}_i &= \frac{2\sigma_{0,-1}^i\sigma_{1,0}^i - (\sigma_{0,-1}^i)^2}{m_2^i} + \frac{\sigma_{0,-1}^i\sigma_{2,0}^i}{m_3^i}, \\ \hat{c}_i &= \frac{2(\sigma_{1,0}^i - 2\sigma_{0,-1}^i)}{m_2^i} + \frac{2(\sigma_{2,0}^i - \sigma_{0,-1}^i)}{m_3^i} + \frac{2\sigma_{3,0}^i}{m_4^i}, \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \sigma_{k,l}^i &= \tau_{i+k} - \tau_{i+l}, \\ m_1^i &= \sigma_{1,-2}^i\sigma_{1,-1}^i\sigma_{1,0}^i, \\ m_2^i &= \sigma_{1,-1}^i\sigma_{1,0}^i\sigma_{2,-1}^i, \\ m_3^i &= \sigma_{2,-1}^i\sigma_{2,0}^i\sigma_{1,0}^i, \\ m_4^i &= \sigma_{1,0}^i\sigma_{2,0}^i\sigma_{3,0}^i. \end{aligned}$$

اگر نقاط $x_i = ih$ متساوی الفاصله باشند یعنی $i = 0, 1, \dots, N$ که $h = 1/N$ آنگاه ضرایب به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{6}, \quad \bar{a}_i = -\frac{1}{2h}, \quad \hat{a}_i = \frac{1}{h^2}, \\ b_i &= \frac{2}{3}, \quad \bar{b}_i = 0, \quad \hat{b}_i = -\frac{2}{h^2}, \\ c_i &= \frac{1}{6}, \quad \bar{c}_i = \frac{1}{2h}, \quad \hat{c}_i = \frac{1}{h^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

با جای‌گذاری (۸) در (۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\left((1 + \tau r)a_i - \frac{\tau\sigma^2}{2}\hat{a}_i - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\bar{a}_i \right) s_{i-1}^{n-1} \\ &+ \left((1 + \tau r)b_i - \frac{\tau\sigma^2}{2}\hat{b}_i - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\bar{b}_i \right) s_i^{n-1} \\ &+ \left((1 + \tau r)c_i - \frac{\tau\sigma^2}{2}\hat{c}_i - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\bar{c}_i \right) s_{i+1}^{n-1} \\ &= U_i^n. \end{aligned} \quad (11)$$

همچنین فرض کنید $t_n = \tau n$, $n = 0, 1, \dots, K$ و $\tau = \frac{T}{K}$ گام زمانی باشد.

با گسسته‌سازی معادله (۲) با استفاده از تفاضل پیشرو در زمان داریم:

$$\begin{aligned} (1 + \tau r)u^{n-1} - \frac{\tau\sigma^2}{2}(u_{xx})^{n-1} \\ - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(u_x)^{n-1} = u^n + R, \\ n = K, K-1, \dots, 1, \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $|R| \leq \tau C$ که C یک مقدار ثابت حقیقی مثبت و $(u_x)^{n-1}$, u^{n-1} و $(u_{xx})^{n-1}$ به ترتیب نشان دهنده مقادیر تقریبی u , u_x و u_{xx} در نقطه (x, t_{n-1}) هستند.

با حذف جمله خطای R در (۵) داریم

$$\begin{aligned} (1 + \tau r)U^{n-1} - \frac{\tau\sigma^2}{2}(U_{xx})^{n-1} \\ - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(U_x)^{n-1} = U^n, \\ n = K, K-1, \dots, 1, \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $(U_x)^{n-1}$, U^{n-1} و $(U_{xx})^{n-1}$ به ترتیب نشان دهنده مقادیر تقریبی u^{n-1} , $(u_x)^{n-1}$ و $(u_{xx})^{n-1}$ هستند.

برای ساختن روشی مشابه روش تفاضلات متناهی برای تقریب $(U_x)^{n-1}$ و $(U_{xx})^{n-1}$ ، با استفاده از روش هم مکانی بی-اسپلاین مکعبی قرار می‌دهیم:

$$U^{n-1} = \sum_{j=-1}^{N+1} s_j^{n-1} B_{j-2}(x). \quad (7)$$

اکنون با توجه به مفهوم تفاضلات متناهی، تقریب‌های زیر را برای مشتقات تا مرتبه کمتر از دو در نقطه $x = x_i$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} U_i^{n-1} = a_i s_{i-1}^{n-1} + b_i s_i^{n-1} + c_i s_{i+1}^{n-1}, \\ (U_x)_i^{n-1} = \bar{a}_i s_{i-1}^{n-1} + \bar{b}_i s_i^{n-1} + \bar{c}_i s_{i+1}^{n-1}, \\ (U_{xx})_i^{n-1} = \hat{a}_i s_{i-1}^{n-1} + \hat{b}_i s_i^{n-1} + \hat{c}_i s_{i+1}^{n-1}. \end{cases} \quad (8)$$

که در آن $(U_x)_i^{n-1}$, U_i^{n-1} و $i = 0, 1, \dots, N$ به ترتیب معرف مقادیر $(U_x)^{n-1}$ و $(U_{xx})_i^{n-1}$ در نقطه $x = x_i$ هستند. با توجه به تعریف توابع بی-اسپلاین [۱۵] و معادله (۷) ضرایبی که در معادله (۸) صدق می‌کنند به

در این مقاله، الگوریتم اشاره شده با استفاده از نرم افزار MATLAB 2016a و با سیستمی با پردازنده Core i5 و حافظه رم 4GB DDR3 پیاده سازی شده است و مقادیر بیشترین خطای مطلق و خطای جذر میانگین مربعات (RMSE) و همچنین زمان اجرای الگوریتم به ازای K مرحله، $n = K, K - 1, \dots, 1$ ، محاسبه شده است.

همان طور که ملاحظه شد، روش ارائه شده منجر دستگاه معادلات جبری سه قطری (۱۴) می شود که به صورت تکراری و در K تکرار با استفاده همزمان از معادله اول از معادلات (۸) حل می شود که این امر موجب سرعت بسیار مناسب الگوریتم خواهد بود. به علاوه در این روش ضرایب مورد استفاده، به صورت بسیار ساده و بدون استفاده از تعریف بی-اسپلاین ها در معادله های (۹) و (۱۰) به دست می آیند که این امر موجب سادگی کاربرد توابع اسپلاین برای حل مسائل گوناگون، همانند روش تفاضلات متناهی می شود.

۳. پایداری و همگرایی

در این بخش ابتدا پایداری و همگرایی معادله (۶) به همراه مرتبه خطای آن به دست می آید. سپس پایداری معادله (۱۱) مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

برای نشان دادن پایداری و همگرایی معادله (۶) روش انرژی [۱۶] و [۱۷] به کار می رود. فرض کنید $L^2[a, b]$ فضایی از توابع اندازه پذیری باشد که مربع آنها در بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر به مفهوم لیگ است. ضرب داخلی و نرم وابسته را در $L^2[a, b]$ به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_a^b u(x)v(x)dx, \\ \|u\| &= (u, u)^{1/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

همچنین فضای توابع زیر را در نظر می گیریم

$$H = \left\{ v \in L^2[a, b] : \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2} \in L^2[a, b] \right\}, \quad (16)$$

و نرم زیر را روی H تعریف می کنیم.

با توجه به شرایط مرزی (۳) داریم:

$$\begin{aligned} s_{-1}^{n-1} &= \frac{1}{a_0} (\alpha(t_{n-1}) - b_0 s_0^{n-1} - c_0 s_1^{n-1}), \\ s_{N+1}^{n-1} &= \frac{1}{c_N} (-a_N s_{N-1}^{n-1} - b_N s_N^{n-1}), \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن $\alpha(t) = Ee^{-r(T-t)}$ حال فرض کنید

$$\begin{aligned} A_i &= (1 + \tau r)a_i - \frac{\tau\sigma^2}{2}\hat{a}_i - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\bar{a}_i, \\ B_i &= (1 + \tau r)b_i - \frac{\tau\sigma^2}{2}\hat{b}_i - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\bar{b}_i, \\ C_i &= (1 + \tau r)c_i - \frac{\tau\sigma^2}{2}\hat{c}_i - \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\bar{c}_i, \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱۲) و (۱۳)، رابطه (۱۱) می تواند به صورت دستگاه معادلات جبری سه قطری زیر نوشته شود

$$\begin{pmatrix} F_0 & F_1 & & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} & \\ & & & & F_2 & F_3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0^{n-1} \\ S_1^{n-1} \\ \vdots \\ S_{N-1}^{n-1} \\ S_N^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0^n - \frac{A_0}{a_0}\alpha(t_{n-1}) \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{N-1}^n \\ U_N^n \end{pmatrix}, \quad n = K, K - 1, \dots, 1, \quad (14)$$

که در آن

$$\begin{aligned} F_0 &= B_0 - \frac{A_0 b_0}{a_0}, F_1 = C_0 - \frac{A_0 c_0}{a_0}, \\ F_2 &= A_N - \frac{C_N a_N}{c_N}, F_3 = B_N - \frac{C_N b_N}{c_N}. \end{aligned}$$

با توجه به شرایط اولیه مقادیر U_i^K که $i = 0, 1, \dots, N$ معلوم هستند. بنابراین از حل دستگاه سه قطری (۱۴) به ازای $n = K$ مقادیر s_i^{K-1} که $i = 0, 1, \dots, N$ به راحتی و با استفاده از الگوریتم توماس دست می آیند. سپس با قرار دادن مقادیر s_i^{K-1} که $i = 0, 1, \dots, N$ در معادله (۸) مقادیر U_i^{K-1} که $i = 0, 1, \dots, N$ به دست خواهند آمد. حال خواهیم توانست دستگاه سه قطری (۱۴) را با قرار دادن $n = K - 1$ حل نماییم. با تکرار این الگوریتم در نهایت مقادیر U_i^0 که $i = 0, 1, \dots, N$ به دست می آیند.

بنابراین از (۲۱) داریم

$$\|E^{n-1}\| \leq e^{T(M\gamma-r)} \|E^K\|, \quad (23)$$

$$n = K, \dots, 1,$$

بنابراین معادله (۶) در $L^2[a, b]$ پایدار است. برای بررسی همگرایی معادله (۶) فرض می‌کنیم u^{n-1} جواب دقیق معادله (۵) و U^{n-1} جواب دقیق معادله (۶) باشد. همچنین فرض می‌کنیم $w^{n-1} = u^{n-1} - U^{n-1}$ با تفاضل معادلات (۵) و (۶) داریم

$$(1 + \tau r)w^{n-1} = \tau \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (w_x)^{n-1} + \frac{\tau \sigma^2}{2} (w_{xx})^{n-1} + w^n + R. \quad (24)$$

اکنون از (۲۴) داریم

$$(1 + \tau r)\|w^{n-1}\| \leq \tau M\gamma \|w^{n-1}\| + \|w^n\| + \tau C \|1\|, \quad (25)$$

بنابراین

$$\|w^{n-1}\| \leq \frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \|w^n\| + \frac{\tau C}{1 + \tau(r - M\gamma)} \|1\|, \quad (26)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \|w^{n-1}\| &\leq \frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \|w^n\| \\ &+ \frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \tau C \|1\| \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \right)^2 \|w^{n+1}\| \\ &+ \left(\frac{1}{(1 + \tau(r - M\gamma))^2} + \frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \right) \tau C \|1\| \\ &\quad \vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \right)^{K-n+1} \|w^K\| \\ &+ \tau C \|1\| \sum_{i=1}^{K-n+1} \frac{1}{(1 + \tau(r - M\gamma))^i}, \quad (27) \end{aligned}$$

اما $w^K = 0$ بنابراین

$$\|w^{n-1}\| \leq \frac{\tau C \|1\|}{(M\gamma - r)} \left(\frac{1}{(1 + \tau(r - M\gamma))^{K-n+2}} - 1 \right). \quad (28)$$

در نتیجه

$$\|w^{n-1}\| \leq \frac{\tau C \|1\|}{(M\gamma - r)} (e^{T(M\gamma - r)} - 1), \quad (29)$$

$$\|v\|_H = \|v\| + \|v_x\| + \|v_{xx}\|. \quad (17)$$

با توجه به (۱۷) برای هر $v \in H$ یک $\gamma > 0$ وجود دارد که $\|v\|_H \leq \gamma \|v\|$

اکنون فرض کنید U^{n-1} و \hat{U}^{n-1} به ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی معادله (۶) باشند. قرار می‌دهیم $E^{n-1} = U^{n-1} - \hat{U}^{n-1}$,

$$(18)$$

از معادله (۶) و (۱۸) داریم

$$E^{n-1} = \frac{1}{(1 + \tau r)} \left(\tau \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (E_x)^{n-1} + \frac{\tau \sigma^2}{2} (E_{xx})^{n-1} + E^n \right). \quad (19)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|E^{n-1}\| &\leq \frac{1}{(1 + \tau r)} \left(\tau \left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right| \|(E_x)^{n-1}\| + \frac{\tau \sigma^2}{2} \|(E_{xx})^{n-1}\| + \|E^n\| \right) \\ &\leq \frac{1}{(1 + \tau r)} (\tau M \|E^{n-1}\| + \tau M \|(E_x)^{n-1}\| + \tau M \|(E_{xx})^{n-1}\| + \|E^n\|) \\ &\leq \frac{1}{(1 + \tau r)} (\tau M\gamma \|E^{n-1}\| + \|E^n\|), \quad (20) \end{aligned}$$

که در آن

$$M = \max \left\{ \left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right|, \frac{\sigma^2}{2} \right\}.$$

اکنون از (۲۰) داریم

$$\begin{aligned} \|E^{n-1}\| &\leq \frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \|E^n\| \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \right)^2 \|E^{n+1}\| \\ &\quad \vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \right)^{K-n+1} \|E^K\|, \quad (21) \\ n &= K, K - 1, \dots, 1, \end{aligned}$$

همچنین از آن جا که

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \tau(r - M\gamma)} \right)^{K-n+1} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{T(r - M\gamma)}{K-n+1}} \right)^{K-n+1} &= \\ e^{T(M\gamma - r)}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\xi = (1 + \tau r) + \frac{3\tau\sigma^2}{h^2} \left(\frac{1 - \cos\beta h}{2 + \cos\beta h} \right) - j \frac{3\tau}{h} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{\sin\beta h}{2 + \cos\beta h} \right), \quad (32)$$

بنابراین $|\xi| > 1$. لذا روش عددی ارائه شده، در حالت گره یکنواخت، بدون قید و شرط پایدار است.

۴. مثال‌های عددی

در این بخش نتایج عددی روش ارائه شده، برای مسائل قرارداد اختیار فروش اروپایی و آمریکایی ارائه شده است. دو مثال پرکاربرد از معادله بلک-شولز که در بیشتر مقالات مورد بحث قرار گرفته است آورده شده است. برای حل این مسائل نقاط گره غیر یکنواخت چبیشف-دمکو [۱۵] و همچنین نقاط گره یکنواخت $x_i = ih$ که $h = 1/N$ به کار برده شده‌اند. دقت روش ارائه شده به وسیله خطای جذر میانگین مربعات (RMSE) در زمان $t = 0$ اندازه‌گیری شده است. جواب دقیق معادله بلک-شولز در [۳] داده شده است.

مثال ۴-۱: در این مثال یک قرار داد اختیار فروش اروپایی را با فرض $a = 1, b = 30, T = 0.5, r = 0.05, \sigma = 0.2$ و $E = 10$ در نظر می‌گیریم [۳]. در جدول ۱ مقادیر خطای RMSE و همچنین بیشترین خطای مطلق و زمان اجرای برنامه به ازای N, τ متفاوت و با نقاط گره یکنواخت ارائه شده است. در شکل ۱ مقادیر خطای مطلق به ازای N, τ متفاوت و با نقاط گره غیر یکنواخت چبیشف-دمکو نمایش داده شده است.

بنابراین معادله (۶) همگرا و با مرتبه همگرایی $O(\tau)$ است.

برای نشان دادن پایداری روش عددی (۱۱) از شیوه وان نیومن استفاده می‌کنیم. با فرض این که نقاط گره $x_i, i = 0, 1, \dots, N$ متساوی الفاصله و با طول گام h باشند از معادله (۱۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}(1 + \tau r) - \frac{\tau\sigma^2}{2h^2} + \frac{\tau}{2h} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) S_{i-1}^{n-1} \\ & + \left(\frac{2}{3}(1 + \tau r) + \frac{\tau\sigma^2}{h^2} \right) S_i^{n-1} \\ & + \left(\frac{1}{6}(1 + \tau r) - \frac{\tau\sigma^2}{2h^2} - \frac{\tau}{2h} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) S_{i+1}^{n-1} \\ & = \frac{1}{6} S_{i-1}^n + \frac{2}{3} S_i^n + \frac{1}{6} S_{i+1}^n. \end{aligned} \quad (30)$$

فرض کنیم $\varepsilon_i^n = S_i^n - \tilde{S}_i^n$ اختلاف مقدار دقیق S_i^n از مقدار تقریبی \tilde{S}_i^n باشد. همچنین فرض کنیم ε_i^n دارای جوابی به صورت $\varepsilon_i^n = \xi^n e^{j\beta ih}$ باشد که در آن ξ در حالت کلی عددی مختلط، β عدد حالت و $j = \sqrt{-1}$ است. بنابراین از معادله (۳۰) داریم:

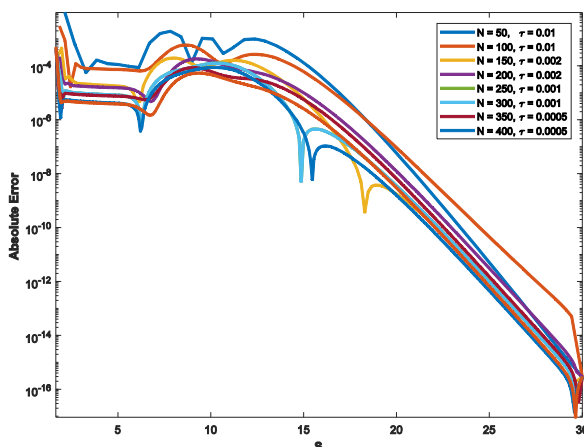
$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}(1 + \tau r) - \frac{\tau\sigma^2}{2h^2} + \frac{\tau}{2h} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) e^{-j\beta h} \\ & + \left(\frac{2}{3}(1 + \tau r) + \frac{\tau\sigma^2}{h^2} \right) \\ & + \left(\frac{1}{6}(1 + \tau r) - \frac{\tau\sigma^2}{2h^2} - \frac{\tau}{2h} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) e^{j\beta h} \\ & = \xi \left(\frac{1}{6} e^{-j\beta h} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} e^{j\beta h} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

حال از آنجا که اندیس n در (۳۰) با توجه به شرط اولیه به صورت نزولی از K تا ۱ حرکت می‌کند لذا برای پایداری روش عددی (۳۰) کافی است $|\xi| \geq 1$ باشد. اما از (۳۱) داریم:

جدول ۱: خطا و زمان اجرای برنامه مثال ۱ برای نقاط گره یکنواخت

N	τ	RMSE	Max error	CPU time(s)
50	0.01	1.31e-3	7.57e-3	0.0056
100	0.01	1.33e-4	5.02e-4	0.0076
150	0.002	6.17e-5	2.35e-4	0.0479
200	0.002	1.71e-5	6.94e-5	0.0698
250	0.001	2.11e-5	8.20e-5	0.1639
300	0.001	1.11e-5	4.30e-5	0.2388
350	0.0005	1.48e-5	5.64e-5	0.5652
400	0.0005	7.78e-6	3.04e-5	1.2120

شکل ۱: نمودار اندازه خطای مطلق مثال ۲ به ازای N, τ متفاوت و با نقاط گره چیبیشف-دمکو



با فرض $a = 1, b = e^6, T = 1, r = 0.1, \sigma = 0.3$ و $E = 100$ در نظر می‌گیریم [۳]. در جدول ۲ مقادیر خطای RMSE به همراه بیشترین خطای مطلق و زمان اجرای برنامه به ازای N, τ متفاوت و با نقاط گره یکنواخت ارائه شده است. در شکل ۲ مقادیر خطای مطلق به ازای N, τ متفاوت و با نقاط گره غیر یکنواخت چیبیشف-دمکو نمایش داده شده است.

مثال ۴-۲: یک اختیار فروش آمریکایی به دارنده آن حق اعمال اختیار در هر زمان قبل از سررسید را می‌دهد لذا در این حالت پس از حل معادله بلک-شولز عمل به روز رسانی به صورت

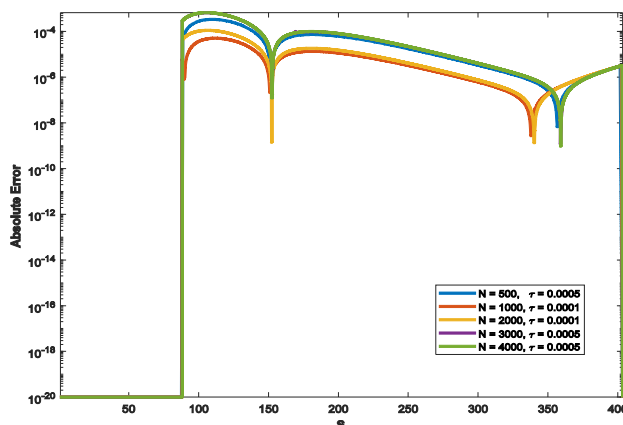
$$U_i^n = \max\{E - e^{x_i}, U_i^n\},$$

انجام می‌گیرد [۳]. یک قرارداد اختیار فروش آمریکایی را

جدول ۲: خطا و زمان اجرای برنامه مثال ۲ برای نقاط گره یکنواخت

N	τ	RMSE	Max. error	CPU time(s)
500	0.0005	9.79e-5	3.51e-4	0.0056
1000	0.0001	1.58e-5	5.65e-5	0.0076
2000	0.0001	3.22e-5	1.16e-4	0.0479
3000	0.0005	1.85e-4	6.70e-4	0.0698
4000	0.0005	1.86e-4	6.74e-4	0.1639

شکل ۲: نمودار اندازه خطای مطلق مثال ۲ به ازای N, τ متفاوت و با نقاط گره چیبیشف-دمکو



نتیجه گیری

در این مقاله یک روش تفاضلی بی-اسپلاین مکعبی با استفاده از مفهوم روش تفاضل متناهی طراحی شد. این روش قادر است به شکل موثری پیچیدگی محاسباتی معمول روش هم مکانی بی-اسپلاین مکعبی را بهبود بخشد. این روش با موفقیت بر روی نشان دادن کارایی و دقت روش مثال‌هایی از معادله دیفرانسیل پاره‌ای بلک-شولز به کار گرفته شد. پایداری و همگرایی روش مورد بحث قرار گرفت و نشان داده شد که روش بدون هیچ قید و شرطی پایدار است. نتایج به صورت جدول‌ها و شکل‌هایی برای گام‌های زمانی و مکانی متفاوت و نقاط گره مکانی یکنواخت و غیر یکنواخت ارائه شدند. سادگی و کم‌هزینه بودن دو ویژگی مهم این روش هستند.

generalized Black-Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling* 55:1483-1505(2012).

[10] H. B. Curry, I. J. Schoenberg. On spline distributions and their limits: The poly distribution functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 53:11-14(1947).

[11] E. N. Houstisf, E. A. Vavalis, j. R. Rice. Convergence of $O(h^4)$ cubic spline collocation methods for elliptic partial differential equations. *siam j. Numer. Anal.* 25: 54-74(1988).

[12] H. Caglar, N. Caglar. Fifth-degree B-spline solution for a fourth-order parabolic partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation* 201: 597-603(2008).

[13] R.C. Mittal, R.K. Jain. Redefined cubic B-splines collocation method for solving convection-diffusion equations. *Applied Mathematical Modelling* 36(11):5555-5573 (2012).

[14] C. C. Wang, J. H. Huang, D. J. Yang. Cubic spline difference method for heat conduction. *569 Int. Commun. Heat Mass Transfer* 39(2): 224-230(2012).

[15] C. D. Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer Verlag New York Inc. *Applied mathematical sciences* 27: (2001).

[16] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi. The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation via the meshless method of radial basis functions. *Comput. Math. Appl.* 68(3): 212-237(2014).

[17] Q. Liu, Y. T. Gu, P. Zhuang, F. Liu, Y. F. Nie. An implicit RBF meshless approach for time fractional diffusion equations. *Comput. Mech.* 48(1):1-12(2011).

فهرست منابع

[1] F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Pol. Econ* 81: 637-659(1973).

[2] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press. Oxford, UK (1993).

[3] Y. Hon, X. Mao. A Radial Basis Function Method For Solving Options Pricing Model. *JFE* 8: 31-44(1999).

[4] S. M. M. Kazemi, M. Dehghan, A. F. Bastani. Asymptotic expansion of solutions to the Black-Scholes equation arising from American option pricing near the expiry. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 311: 11-37(2017).

[5] Z. Cen, A. Le. A robust and accurate finite difference method for a generalized Black-Scholes equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235(13): 3728-3733(2011).

[6] S. Vahdatia, M. Fardib, M. Ghasemi. Option Pricing Using a Computational Method Based on Reproducing Kernel. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 328: 252-266(2018).

[7] Z. Cen, J. Huang, A. Xu, A. Le. Numerical approximation of a time-fractional Black-Scholes equation. *Computers & Mathematics with Applications* 75(8):2874-2887 (2018).

[8] J. Rashidinia, S. Jamalzadeh. Collocation method based on modified cubic B-spline for option pricing models. *Math. Commun.* 22: 89-102(2017).

[9] M. K. Kadalbajoo, L. P. Tripathi, A. Kumar. A cubic B-spline collocation method for a numerical solution of the